Секция «Математика и механика»

Аналоги хроматических многочленов для числа Бухштабера

Айзенберг Антон Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: aizenbergaa@yandex.ru

Пусть K — абстрактный симплициальный комплекс на m вершинах. Комплексу K можно сопоставить топологическое пространство $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ с действием группы $\mathbb{Z}_2^m$. Пространство $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ называется вещественным момент-угол комплексом и определяется как подмножество m-мерного куба следующим образом: $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K = \bigcup_{\sigma\in K}[-1;1]^\sigma \times \{-1;1\}^{[m]\setminus\sigma} \subseteq [-1;1]^m$. Группа $\mathbb{Z}_2^m$ действует на пространстве $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$ покоординатными инволюциями. Известно, что такое действие не бывает свободным, и возникает вопрос: чему равен наибольший ранг s подгрупп группы $\mathbb{Z}_2^m$, действующих свободно на вещественном момент-угол комплексе. Число $s_{\mathbb{R}}(K) = s$ называется вещественным числом Бухштабера и является комбинаторным инвариантом симплициального комплекса K. Вещественное число Бухштабера было определено в работе [3] и является очевидным аналогом (комплексного) числа Бухштабера [1].

Оказывается, число $r(K) = m - s_{\mathbb{R}}(K)$ обладает свойствами, аналогичными хроматическому числу простого графа [2]. Рассмотрим отображение $V \to \mathbb{Z}_2^l$, сопоставляющее каждой вершине симплициального комплекса l-мерный вектор над полем из двух элементов. Будем называть такие отображения l-векторными раскрасками. Назовем векторную раскраску линейно независимой, если вершины любого симплекса комплекса K покрашены в линейно независимый набор бинарных векторов. В таком случае, $r(K)$ равно наименьшему числу l, для которого существует линейно независимая l-векторная раскраска комплекса K.

Для числа $r(K) = m - s_{\mathbb{R}}(K)$ существует аналог хроматического многочлена. А именно, существует многочлен $P_K(t)$ с целыми коэффициентами, такой что значение $P_K(2^l)$ равно числу линейно независимых l-векторных раскрасок комплекса K. Более того, для одномерных комплексов K (то есть графов) справедливо равенство $P_K(t) = \chi_K(t-1)$, где $\chi_K(\cdot)$ — хроматический многочлен графа K.

Литература

1. В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. М., 2004.

2. A.A.Ayzenberg. The problem of Buchstaber number and its combinatorial aspects // arXiv:1003.0637

3. Yukiko Fukukawa, Mikiya Masuda. Buchstaber invariants of skeleta of a simplex // arXiv:0908.3448