

Направление:

“Некоммутативная геометрия и топология”

Руководитель:

лауреат Государственной премии РФ и

Ломоносовской премии МГУ,

кавалер медали Дружбы Китайской Народной республики

заслуженный профессор МГУ

Александр Сергеевич МИЩЕНКО

А.С.Мищенко, В.М.Мануйлов, Е.В.Троицкий

22.03.2012



профессор
Мануйлов
Владимир
Маркович



профессор
Мищенко
Александр
Сергеевич



профессор
Троицкий
Евгений
Вадимович

- Фредгольмовы представления дискретных групп
- Теория индекса эллиптических операторов над C^* -алгебрами
- Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами
- Транзитивные алгеброиды Ли
- К- и КК-теория C^* -алгебр, крученная К-теория
- Гильбертовы модули над C^* -алгебрами
- Топологическая динамика, числа Райдемайстера
- Некоммутативный гармонический анализ

Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Альтернатива Фредгольма гласит:

Неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x)$$

($x \in [a, b]$,) имеет единственное решение φ для произвольной функции f в правой части, либо однородное уравнение

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = 0$$

имеет ненулевое решение. Во втором случае число линейно независимых решений однородного уравнения совпадает с числом линейных условий, которые нужно наложить на правую часть неоднородного уравнения, для существования решения неоднородного уравнения.

Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Формулировка в терминах компактных операторов

Пусть $K : H \rightarrow H$ – компактный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда неоднородное уравнение

$$\varphi - K\varphi = f$$

имеет единственное решение для любой правой части $f \in H$, либо однородное уравнение

$$\varphi - K\varphi = 0$$

имеет ненулевое решение.

Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Формулировка в терминах ядра и коядра

Пусть $K : H \rightarrow H$ – компактный оператор в гильбертовом пространстве H .

Теорема (о фредгольмовых операторах)

Оператор

$$F = 1 - K : H \rightarrow H$$

нетеров (или фредгольмов), т.е.

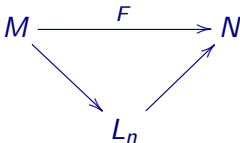
- $\dim \ker F < +\infty$,
- образ $\operatorname{Im} F \subset H$ – замкнут,
- $\dim \operatorname{Coker} F = \dim (\operatorname{Im} F)^\perp < +\infty$,

При этом $\operatorname{index} F = \dim \ker F - \dim \operatorname{Coker} F = 0$.

Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Обобщение на случай скаляров из C^* -алгебры $\mathbf{A}$

$L_n = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A} \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}$ (n раз) – конечно порожденный свободный модуль. Гильбертов модуль $l_2(\mathbf{A})$ – это банахово пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, $x_k \in \mathbf{A}$, у которых ряд $\|x\|^2 = \sum_k x_k^* x_k \in \mathbf{A}$ сходится по норме в алгебре $\mathbf{A}$. Гомоморфизм модулей $F : M \rightarrow N$ ограниченный как оператор банаховых пространств называется конечно порожденным, если он разлагается в композицию



Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Обобщение на случай скаляров из C^* -алгебры A

Компактный гомоморфизм – это предел конечно порожденных гомоморфизмов.

Гомоморфизм $F : l_2(A) \rightarrow l_2(A)$ называется фредгольмовым, если существует такой гомоморфизм $G : l_2(A) \rightarrow l_2(A)$, что для двух возможных композиций и двух компактных гомоморфизмов K_1, K_2 имеют место равенства

$$F \cdot G = 1 + K_1; \quad G \cdot F = 1 + K_2.$$

Фредгольмовы операторы над C^* -алгебрами

Обобщение на случай скаляров из C^* -алгебры $\mathbf{A}$

Теорема (о нетеровости фредгольмовых гомоморфизмов)

Пусть $F : l_2(\mathbf{A}) \rightarrow l_2(\mathbf{A})$ – фредгольмов гомоморфизм. Тогда имеется такой компактный гомоморфизм $K : l_2(\mathbf{A}) \rightarrow l_2(\mathbf{A})$, что у суммы $F + K$ ядро $\ker(F + K)$ и коядро $\mathbf{Coker}(F + K)$ являются конечно порожденными проективными модулями над алгеброй $\mathbf{A}$.



Irmatov, A.A. and Mishchenko, A.S. *On Compact and Fredholm Operators over C^* -algebras and a New Topology in the Space of Compact Operators* Journal of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology, 2, Special Issue 02, 2008, 329-351

Асимптотические представления

Пример. Рассмотрим матрицы размерности n

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_n = \begin{pmatrix} \omega & & & & \\ & \omega^2 & & & \\ & & \omega^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^n \end{pmatrix},$$

где $\omega = \omega_n = e^{2\pi i/n}$. Тогда $U_n V_n U_n^{-1} V_n^{-1} = \omega_n \cdot E$, где E — единичная матрица. При $n \rightarrow \infty$, $\omega_n \rightarrow 1$, и матрицы U_n и V_n асимптотически коммутируют. Полезная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать такую последовательность пар (U_n, V_n) как асимптотическое представление свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^2$ с двумя образующими, a, b (считаем, что “представление” π_n переводит a в U_n , b в V_n).

В общем случае, если матрицы U, V таковы, что $UVU^{-1}V^{-1}$ близко к единичной матрице, $\det(tUVU^{-1}V^{-1} + (1-t)E) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$, таким образом получаем непрерывное отображение $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ в комплексную плоскость без 0.

Ясно, что $f(0) = \det E = 1$, $f(1) = \det(UVU^{-1}V^{-1}) = 1$. Функцию на отрезке, имеющую равные значения на концах, можно считать заданной на окружности, поэтому f задает отображение окружности S^1 в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Каждому такому отображению можно сопоставить *число вращения*.

Как обычно в топологии, если “пошевелить” U и V , заменив их на близкие к ним матрицы, число вращения не изменится.

Если $UV = VU$, то f не зависит от t и тождественно равна 1, ее число вращения равно 0.

Упражнение. Проверить, что для матриц U_n, V_n (при $n \geq 3$) число вращения равно 1.

Вывод: “рядом” с асимптотическим представлением $\pi = (\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ группы $\mathbb{Z}^2$ не существует “настоящих” представлений.

Такой подход позволяет определить асимптотические представления групп, заданных образующими и соотношениями (надо требовать, чтобы образы соотношений были близки к E), а также на еще более общие объекты, называемые C^* -алгебрами. Они включают также кольца $C(X)$ непрерывных функций на хороших топологических пространствах X .

Для одних C^* -алгебр любое асимптотическое представление можно продеформировать в настоящее представление, для других имеется много асимптотических представлений, не сводимых к настоящим (как в примере с $\mathbb{Z}^2$).

С помощью асимптотических представлений можно определить инварианты C^* -алгебр (в том числе, топологических пространств). Получаемая в результате K -теория является важнейшим инструментом некоммутативной геометрии и топологии. В коммутативном случае получается классическая K -теория, а возможность рассматривать некоммутативные C^* -алгебры позволяет усилить мощность этого инструмента.

Бернсайд-Фробениус и крученные классы сопряженности

Из курса алгебры третьего семестра хорошо известна

Теорема (теорема Бернсайда-Фробениуса)

Число классов сопряженности $(x \sim gxg^{-1})$ конечной группы G совпадает с числом классов эквивалентности ее неприводимых представлений.

Можно определить следующее обобщение классов сопряженности —

Определение

Классами Райдемайстера (классами крученной сопряженности) автоморфизма ϕ (счетной дискретной) группы G называются классы $\{g\}_\phi$ следующего отношения эквивалентности

$$g \sim xg\phi(x^{-1}), \quad g, x \in G.$$

Число этих классов называется **числом Райдемайстера** $R(\phi)$.

В отличие от обычных классов, имеется много примеров бесконечных групп и таких ϕ , что $R(\phi) < \infty$. На классах эквивалентности представлений ϕ индуцирует биекцию $\hat{\phi}$ по формуле $\hat{\phi}[\rho] = [\rho \circ \phi]$. Кандидатом на правую часть гипотетической формулы является число неподвижных точек $F(\hat{\phi})$.

Пример

Пусть $G = \mathbb{Z}$ и $\phi = -Id$. Отношение крученой сопряженности:

$$m \sim k + m - (-k) = m + 2k, \quad \forall k$$

Т.о., имеются два класса: четные и нечетные числа, и $R(\phi) = 2$. Каждое неприводимое представление одномерно и оператор, отвечающий $m \in \mathbb{Z}$, есть оператор умножения на $(e^{i\alpha})^m = e^{i\alpha m}$. Точка $e^{i\alpha} \in S^1$ и отвечает данному представлению, которое обозначим ρ_α . Тогда

$$\hat{\phi}(\rho_\alpha)(m) = (\rho_\alpha)(-m) = (e^{i\alpha})^{-m} = (e^{-i\alpha})^m.$$

Т.о. на S^1 $\hat{\phi}$ действует как комплексное сопряжение, и имеет ровно две неподвижные точки: ± 1 . Итак, $F(\hat{\phi}) = 2 = R(\phi)$.

Определение

Группа G называется **конечно-аппроксимируемой**, если для любого ее элемента $g \neq e$ имеется такой гомоморфизм α_g на некоторую конечную группу, что $\alpha_g(g) \neq e$.

Теорема (Е.В.Троицкий–А.Л.Фельштын, 2012)

Пусть G — конечно-порожденная и конечно-аппроксимируемая группа и $R(\phi) < \infty$. Тогда $R(\phi)$ совпадает с числом неподвижных точек $\hat{\phi}$ на множестве классов **конечномерных** представлений.

- В общей ситуации эта теорема не имеет места, нужна другая формулировка.
- Эти и смежные результаты важны не только для теории групп, но, в первую очередь, для топологической динамики, а также алгебраической геометрии.
- Хотя формулировки просты, для доказательств нужны весьма тонкие факты, не только из теории групп, но и некоммутативной геометрии (групповые алгебры, гармонический анализ).



Еще книги



Некоторые наши соавторы



Alexander Felshtyn
(Szczecin)



Victor Nistor
(Penn State)



Michael Frank
(Leipzig)



A.M.Вершик
(ПОМИ)



Nicolae Teleman
(Ancona)



Jan Kubarski
(Lodz)



Klaus Thomsen
(Aarhus)

Некоторые наши ученики



А.Павлов и
Н.Иванков



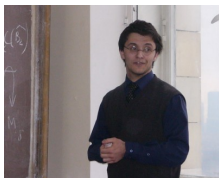
Quitzeh Morales
Melendez



Yu Chao



Т.Шульман



А.Корчагин



Zhu Jingming



Н.Новоселов

Некоторые награды

Государственная премия в области науки и техники А.С.Мищенко



Момент вручения
Государственной Премии РФ

Слева: Мищенко А.С.
Справа: Булгак В.Б.,
вице-премьер Правительства РФ

Весна 1998 года

Некоторые награды

Медаль дружбы Китайской Народной Республики А.С.Мищенко



Момент вручения
Медали Дружбы
Китайской Народной
Республики

Слева: Мищенко А.С.
Справа: Чжан Дэцзян,
Вице-премьер КНР,
29 сентября 2011 г.



Некоторые награды

В.М.Мануйлов и Е.В.Троицкий

