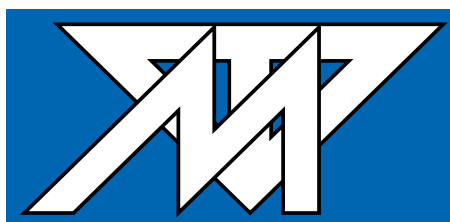


ЛАБОРАТОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ им. Н. Н. БОГОЛЮБОВА



Геометрические методы в математической физике

(под редакцией Б. А. Дубровина)

Лекции летней школы
Воскресенское
27.06.2011—1.07.2011

Москва 2012

Содержание

А. П. Веселов. Цепочка Тоды и линейная алгебра.....	5
Б. А. Дубровин. Введение в теорию фробениусовых многообразий.....	31
И. М. Кричевер. Аналитическая теория разностных уравнений...	51
М. Б. Минеев-Вайнштейн. Интегрируемая контурная динамика на комплексной плоскости.....	65
А. И. Нейштадт. Усреднение возмущений в динамических системах.....	98

Цепочка Тоды и линейная алгебра

А. П. Веселов

Лекция 1

Определение 1. Гамильтоновой системой в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ будем называть систему:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}, \quad \text{где } i = 1 \dots n, \quad (1)$$

а функцию $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ её гамильтонианом.

В 1837 году Гамильтоном было показано, что уравнения механики при некоторых предположениях всегда можно записать в виде такой системы. Гамильтонову систему можно записать в более элегантном виде, используя следующие важное определение.

Определение 2. Скобкой Пуассона двух функций $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ называется следующее выражение:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right).$$

Используя скобку Пуассона, систему (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \{H, p_i\} \\ \dot{q}_i = \{H, q_i\}, \end{cases} \quad \text{где } i = 1 \dots n$$

Введённая нами скобка кососимметрична, билинейна и обладает следующим важным свойством.

Утверждение 1 (Тождество Якоби). Для трёх функций $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ верно тождество:

$$\{\{F, H\}, G\} + \{\{H, G\}, F\} + \{\{G, F\}, H\} = 0.$$

Рассмотри теперь функцию $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и её производную по времени:

$$\dot{F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \{H, F\}.$$

Теперь мы можем ввести следующие важное определение.

Определение 3. Функция $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ называется *интегралом* системы (1) если $\{F, H\} \equiv 0$ или, что то же самое, $\dot{F} = 0$.

Пример 1. $\{H, H\} = -\{H, H\} \equiv 0$, то есть гамильтониан является интегралом и называется *интегралом энергии*.

Из тождества Якоби легко выводится следующая теорема.

Теорема 1 (Пуассон). Скобка Пуассона интегралов — интеграл.

Из этой теоремы следует, что интегралы образуют алгебру относительно скобки Пуассона.

Дадим теперь определение интегрируемой системы.

Определение 4. Гамильтонова система (1) называется *интегрируемой по Лиувиллю*, если у неё есть n независимых интегралов $F_1 \dots F_n$ в инволюции, то есть $\{F_i, F_j\} \equiv 0 \quad \forall i, j$

Пример 2 (Задача Кеплера). Система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - \frac{k}{|\mathbf{q}|}, \quad \text{где } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$$

является интегрируемой по Лиувиллю, в качестве упражнения найдите три интеграла в инволюции.

Перейдём теперь к основному объекту курса — цепочке Тоды. А именно, к системе с гамильтонианом

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} e^{q_i - q_{i+1}},$$

которая описывает систему из n занумерованных точек на прямой, каждая из которых взаимодействует с соседними по нумерации. Введём новые переменные:

$$a_j = -\frac{1}{2}p_j, \text{ где } j = 1 \dots n,$$

$$b_k = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}(q_k - q_{k+1})}, \text{ где } k = 1 \dots n-1,$$

называемые *переменными Фляшке*. Запишем теперь уравнения движения для цепочки Тоды в старых и новых координатах:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = e^{q_{j-1} - q_j} - e^{q_j - q_{j+1}} \\ \dot{q}_i = p_i, \end{cases} \quad (2)$$

или в переменных Фляшке:

$$\begin{cases} \dot{a}_j = 2(b_j^2 - b_{j-1}^2) \\ \dot{b}_k = b_k(a_{k+1} - a_k) \end{cases}. \quad (3)$$

Утверждение 2 (Представление Лакса для цепочки Тоды). *Система (3) эквивалентна матричному уравнению $\dot{L} = [B, L]$, где*

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

а $[B, L] = BL - LB$ — обычный коммутатор.

Предложение 1. Поток $\dot{L} = [B, L]$ сохраняет спектр матрицы L . И наоборот, любая изоспектральная деформация $L \longrightarrow C(t)LC^{-1}(t)$ описывается $\dot{L} = [B, L]$ для подходящей матрицы $B = B(t)$.

Доказательство. Пусть $C(t)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{C}(t) = B(t)C(t), \quad C(0) = E.$$

Рассмотрим матрицу $X(t) = C^{-1}(t)L(t)C(t)$ и найдём её производную

$$\dot{X} = (\dot{C}^{-1})LC + C^{-1}\dot{L}C + C^{-1}L\dot{C},$$

Из цепочки $0 = \dot{E} = (\dot{C}^{-1}C) = (\dot{C}^{-1})C + C^{-1}\dot{C}$ имеем $(\dot{C}^{-1}) = -C^{-1}(\dot{C})C^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -C^{-1}\dot{C}C^{-1}LC + C^{-1}\dot{L}C + C^{-1}L\dot{C}C^{-1}C = -C^{-1}BLC + C^{-1}\dot{L}C + \\ &+ C^{-1}LBC = C^{-1}(\dot{L} - [B, L])C \equiv 0. \end{aligned}$$

Откуда $X(t) \equiv L_0$ и соответственно $L(t) = C(t)L_0C^{-1}(t)$. Запишем теперь характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda E) &= \det(CL_0C^{-1} - \lambda CC^{-1}) = \det C(L_0 - \lambda E)C^{-1} = \\ &= \det(L_0 - \lambda E). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический многочлен, а значит, и спектр, не зависит от времени. $\square$

Следствие 1. *Функции*

$$F_k = \frac{1}{k} \operatorname{tr} L^k, \quad \text{где } k = 1 \dots n$$

являются интегралами движения цепочки Тоды.

Доказательство. Заметим, что

$$F_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad (4)$$

и, в силу постоянности спектра, функции F_k также постоянны. $\square$

Воспользуемся формулой (4) и посчитаем несколько F_k .

$$\begin{aligned} F_1 &= a_1 + \dots + a_n = -\frac{1}{2}(p_1 + \dots + p_n) \text{ — полный импульс,} \\ F_2 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{j=1}^n b_j^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{4} p_i^2 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{4} e^{q_j - q_{j+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} H \text{ — энергия.} \end{aligned}$$

Однако, F_3 и остальные интегралы уже не имеют естественной механической интерпретации, им отвечает так называемая *скрытая симметрия* цепочки Тоды.

Теорема 2. $\{F_k, F_l\} \equiv 0$, то есть цепочка Тоды интегрируема по Лиувиллю.

Для доказательства теоремы нам понадобится определение и две леммы.

Определение 5. Трёхдиагональная матрица L вида:

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad \text{где все } b_i > 0,$$

называется *матрицей Якоби*.

Лемма 1. *Матрицы Якоби имеют простой спектр, то есть собственные числа различны.*

Доказательство. В силу симметричности, матрицы Якоби диагонализуются, и все собственные значения вещественны. Таким образом, нам достаточно показать, что каждому собственному значению отвечает единственный собственный вектор.

Пусть λ — собственное значение, найдем собственные векторы.

$$(L - \lambda E)\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 - \lambda)x_1 + b_1x_2 = 0 \\ b_1x_1 + (a_2 - \lambda)x_2 + b_2x_3 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Пусть задано $x_1 \neq 0$. Тогда из первого уравнения, в силу условия на b_i , мы можем найти x_2 , из второго уравнения — x_3 и так далее. То есть эта система задаёт $x_2, \dots, x_n$ при данном x_1 . $\square$

Нормируем собственный вектор $\mathbf{x}$ так, что $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$, и для удобства записи некоторых формул положим $x_0 = x_{n+1} := 0$.

Лемма 2. *Верны следующие формулы для производных λ :*

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a_k} = x_k^2, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial b_j} = 2x_jx_{j+1}.$$

Доказательство. Варьируем $(L - \lambda E)\mathbf{x} = 0$:

$$(\delta L - \delta \lambda E)\mathbf{x} + (L - \lambda E)\delta \mathbf{x} = 0,$$

умножим скалярно на $\mathbf{x}$:

$$((\delta L - \delta \lambda E)\mathbf{x}, \mathbf{x}) + ((L - \lambda E)\delta \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0.$$

Воспользуемся самосопряжённостью оператора $L - \lambda E$:

$$((L - \lambda E)\delta \mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\delta \mathbf{x}, (L - \lambda E)\mathbf{x}) = 0.$$

Тогда

$$(\delta L \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \delta \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \delta \lambda.$$

Из равенства $\delta \lambda = (\delta L \mathbf{x}, \mathbf{x})$ следуют необходимые равенства. $\square$

Теперь можем перейти к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 2. Перепишем скобку Пуассона в переменных Фляшке:

$$\{F, G\} = \frac{1}{4} \sum \left(\left(b_j \frac{\partial F}{\partial b_j} - b_{j-1} \frac{\partial F}{\partial b_{j-1}} \right) \frac{\partial G}{\partial a_j} - \left(b_j \frac{\partial G}{\partial b_j} - b_{j-1} \frac{\partial G}{\partial b_{j-1}} \right) \frac{\partial F}{\partial a_j} \right).$$

Пусть λ и μ — два собственных числа L , а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — соответствующие нормированные собственные векторы.

$$\begin{aligned} \{\lambda, \mu\} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (b_j x_j x_{j+1} - b_{j-1} x_{j-1} x_j) y_j^2 - (b_j y_j y_{j+1} - b_{j-1} y_{j-1} y_j) x_j^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j y_j (b_j (x_{j+1} y_j - y_{j+1} x_j) + b_{j-1} (x_j y_{j-1} - y_j x_{j-1})) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j y_j (W(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j + W(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{j-1}). \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь просто определяет $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})_j$.

Так как $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы, можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} b_{j-1} x_{j-1} + (a_j - \lambda) x_j + b_j x_{j+1} = 0 \\ b_{j-1} y_{j-1} + (a_j - \mu) y_j + b_j y_{j+1} = 0 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на y_j , второе — на x_j и вычтем:

$$W_j - W_{j-1} = (\lambda - \mu) x_j y_j.$$

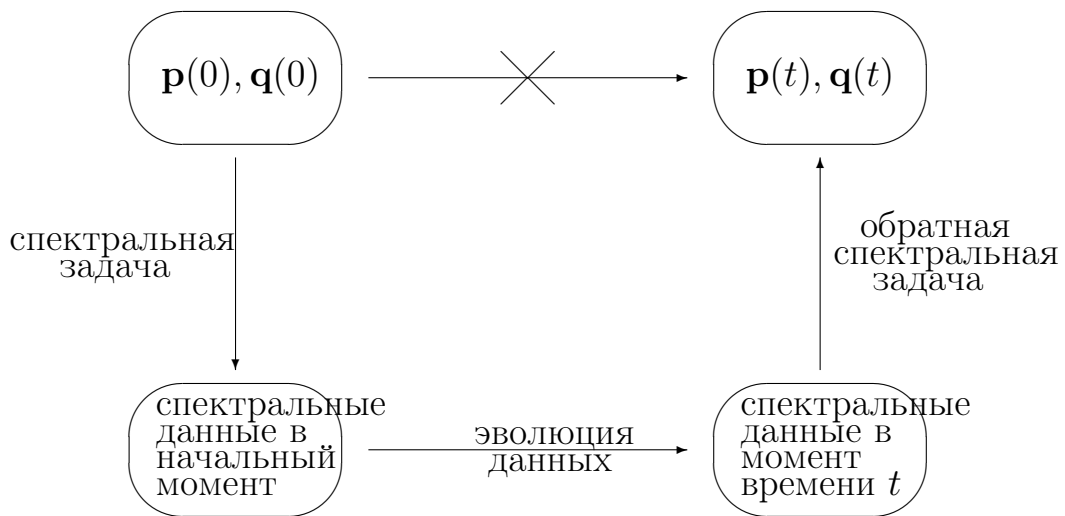
Тогда для скобки имеем:

$$\{\lambda, \mu\} = \frac{1}{2} \sum (W_j + W_{j-1}) \frac{W_j - W_{j-1}}{\lambda - \mu} = \frac{1}{2(\lambda - \mu)} \sum (W_j^2 - W_{j-1}^2) \equiv 0.$$

Откуда сразу следует, что $\{F_k, F_l\} \equiv 0$ и система интегрируема по Лиувиллю. $\square$

Лекция 2

Доказанные теоремы говорят нам об интегрируемости цепочки Тоды, однако явного решения мы не имеем. Для того, чтобы найти его мы воспользуемся методом обратной задачи (рассеяния). Идея метода состоит в том, что вместо



прямого поиска решения по начальным данным, мы сначала найдем спектральные данные по начальным условиям (спектральная задача), затем эволюцию спектральных данных (эта часть часто очень простая) и восстановим $\mathbf{p}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ по этим данным (обратная спектральная задача).

В случае цепочки Тоды мы имеем представление Лакса, и спектральная задача есть задача на собственные значения матрицы L . Дадим точное определение.

Определение 6. *Спектральными данными для матриц Якоби будем называть $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ — спектр матрицы L — и первые компоненты $\xi_1 \dots \xi_n$ нормированных собственных векторов, такие, что все $\xi_i > 0$ (дополнительные спектральные данные).*

Заметим, что данных $2n$, а элементов в матрице L на единицу меньше, и между данными есть соотношение.

Утверждение 3. $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix},$$

в которой по столбцам записаны нормированные собственные векторы. Ввиду самосопряженности L , матрица C ортогональна, откуда и следует нужное равенство. $\square$

Рассмотрим множество $\text{Spec} = \{(\lambda, \xi) : \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n, \xi_i > 0, \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1\}$.

Теорема 3. *Отображение $S : L(a, b) \longrightarrow (\lambda, \xi)$ задаёт диффеоморфизм между множеством матриц Якоби и множеством Spec .*

По матрице Якоби мы можем найти спектральные данные, а обратная задача заключается в том, чтобы по (λ, ξ) построить матрицу L , и сейчас мы приведём два решения (Мозер, 1974).

I. Функция Вейля и цепные дроби. Рассмотрим резольвенту $R(z) = (zE - L)^{-1}$ и её первый диагональный элемент:

$$W(z) = ((zE - L)^{-1}e_1, e_1), \quad \text{где } e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

который и называется *функцией Вейля*.

Лемма 3.

$$W(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{z - \lambda_i}.$$

Доказательство. Введем две матрицы:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Для них выполнено равенство $LC = C\Lambda$ и, соответственно, $L = C\Lambda C^{-1}$. Тогда для функции Вейля имеем:

$$\begin{aligned} W(z) &= ((zCC^{-1} - C\Lambda C^{-1})^{-1}e_1, e_1) = (C(zE - \Lambda)^{-1}C^{-1}e_1, e_1) = \\ &= ((zE - \Lambda)^{-1}C^T e_1, C^T e_1). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (zE - \Lambda)^{-1} &= \text{diag}((z - \lambda_1)^{-1}, \dots, (z - \lambda_n)^{-1}), \\ C^T e_1 &= \xi, \end{aligned}$$

откуда

$$W(z) = ((zE - \Lambda)^{-1}C^T e_1, C^T e_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i^2}{z - \lambda_i}.$$

□

Лемма 4.

$$W(z) = \frac{1}{z - a_1 - \frac{b_1^2}{z - a_2 - \frac{b_2^2}{\ddots - \frac{b_{n-1}^2}{z - a_n}}}},$$

где a и b — те же, что и в $L(a, b)$.

Доказательство. Рассмотрим угловые миноры

$$\Delta_j(z) = \det \begin{pmatrix} z - a_{j+1} & -b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ -b_{j+1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} & z - a_n \end{pmatrix},$$

где $j = 1 \dots n - 1$, и положим $\Delta_n := 1, \Delta_{-1} := 0$.

Имеем рекурсивное соотношение:

$$\Delta_{j-1}(z) = (z - a_j)\Delta_j(z) - b_j^2\Delta_{j+1}(z), \quad j = 1 \dots n,$$

которое получается разложением по первой строке $\Delta_{j-1}(z)$. Разделим Δ_{j-1} на Δ_j :

$$\frac{\Delta_{j-1}}{\Delta_j} = (z - a_j) - \frac{b_j^2}{\frac{\Delta_j}{\Delta_{j+1}}}.$$

Раскладывая дальше знаменатель последней дроби, получим нужную цепную дробь, если заметить, что $W(z) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$. $\square$

II. Ортогональные многочлены и ортогонализация Грамма–Шмидта.

Определение 7. *Ортогональные многочлены* — это результат процесса ортогонализации Грамма–Шмидта, применённого к базису $1, z, z^2, \dots$ по отношению к некоторому скалярному произведению.

Мы ещё потребуем, чтобы скалярное произведение задавалась некоторым функционалом l следующим образом:

$$\langle f, g \rangle = l(fg),$$

это даст нам самосопряженность оператора умножения.

Утверждение 4. *Ортогональные многочлены $p_0, p_1, \dots$ удовлетворяют рекуррентному соотношению:*

$$zp_i = p_{i+1} + \alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1}, \quad \text{где } \alpha_i = \frac{\langle zp_i, p_i \rangle}{\langle zp_i, p_i \rangle}, \quad \beta_i = \frac{|p_i|^2}{|p_{i-1}|^2}.$$

Доказательство. Поскольку zp_i — многочлен степени $i+1$ с единичным старшим коэффициентом, то его разложение по ортогональным многочленам выглядит следующим образом:

$$zp_i = p_{i+1} + \alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1} + \gamma_i p_{i-2} + \dots$$

Покажем, что начиная с γ_i , все коэффициенты — нулевые:

$$\gamma_i \langle p_{i-2}, p_{i-2} \rangle = \langle zp_i, p_{i-2} \rangle = \langle p_i, zp_{i-2} \rangle = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что p_i ортогонален всем многочленам меньшей степени.

Таким образом, $\gamma_i = 0$, и, аналогично, все последующие также нулевые; равенство

$$zp_i = p_{i+1} + \alpha_i p_i + \beta_i p_{i-1}$$

установлено. Для нахождения коэффициентов, умножим его скалярно на p_i и p_{i-1} :

$$\begin{aligned}\alpha_i \langle p_i, p_i \rangle &= \langle zp_i, p_i \rangle, \\ \beta_1 \langle p_{i-1}, p_{i-1} \rangle &= \langle zp_i, p_{i-1} \rangle = \langle p_i, zp_{i-1} \rangle = \langle p_i, p_i \rangle.\end{aligned}$$

□

Пусть теперь $(\lambda, \xi) \in \text{Срес}$. Рассмотрим пространство

$$V = \mathbb{R}[z] \mod \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) g(\lambda_i) \xi_i^2.$$

Применим ортогонализацию Грамма–Шмидта и получим многочлены

$P_0 = 1, P_1, \dots, P_{n-1}$. Положим $P_n := \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \equiv 0$.

Предложение 2. *Равенства*

$$\begin{aligned}a_{i+1} &= \frac{\langle zP_i, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, \quad \text{где } i = 0, \dots, n-1, \\ b_j &= \frac{|P_j|}{|P_{j-1}|}, \quad \text{где } j = 1, \dots, n-1,\end{aligned} \tag{5}$$

дают решение обратной задачи: $(\lambda, \xi) \rightarrow L(a, b)$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. Пусть a и b определены формулами (1), тогда

$$P_k = \begin{pmatrix} z - a_1 & -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -b_{k-1} & z - a_k \end{pmatrix} := D_k$$

и $P_0 = D_0 := 1$.

Доказательство. Действительно, D_k удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, а именно:

$$D_{k+1} = (z - a_{k+1})D_k - b_k^2 D_{k-1},$$

с теми же начальными условиями $D_0 = P_0 = 1, D_1 = P_1 = z - a_1$, что проверяется разложением по последнему столбцу. И формулы для a и b взяты из рекуррентного соотношения для ортогональных многочленов. $\square$

Доказательство предложения 2. Из предыдущей леммы, в частности, следует, что

$$D_n = \det(zE - L) = \prod (z - \lambda_i) = P_n.$$

Из этих равенств сразу следует, что $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — собственные числа $L(a, b)$.

Теперь осталось разобраться с дополнительным спектром. Рассмотрим нормированные ортогональные многочлены $Q_i = \frac{P_i}{|P_i|} = (b_1 \dots b_i)^{-1} P_i$. Разделим рекурсивное соотношение для P_i на $b_1 \dots b_i$ и получим рекуррентное соотношение для Q_i :

$$b_{i+1} Q_{i+1} + (a_{i+1} - z) Q_i + b_i Q_{i-1} \equiv 0.$$

Подставим $z = \lambda_k$:

$$b_{i+1}Q_{i+1}(\lambda_k) + (a_{i+1} - \lambda_k)Q_i(\lambda_k) + b_iQ_{i-1}(\lambda_k) = 0,$$

заметим, что при подстановке λ_k мы получим уже настоящее равенство, а не равенство по модулю. Из полученного равенства следует, что вектор $v_k = \xi_k(Q_0(\lambda_k), Q_1(\lambda_k), \dots, Q_{n-1}(\lambda_k))$ является нормированным собственным вектором с собственным значением $\lambda = \lambda_k$ для $L(a, b)$. Посмотрим теперь на Q_0 :

$$Q_0(z) = \frac{1}{|1|} = \frac{1}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} = 1,$$

откуда $v_k = (\xi_k, \dots)$, то есть ξ_k является первой компонентой собственного вектора. $\square$

Лекция 3

Итак, мы научились решать прямую и обратную спектральные задачи, осталось найти, как изменяются со временем спектральные данные.

Лемма 6.

$$\dot{L} = [B, L] \iff \begin{cases} (L - \lambda E)x = 0 \\ \dot{x} = Bx \end{cases}, \quad \text{где } |x| = 1.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Дифференцируем $Lx = \lambda x$:

$$\dot{L}x + L\dot{x} = \lambda\dot{x}.$$

Теперь подставим $\dot{x} = Bx$ и преобразуем:

$$\dot{L}x + LBx = \lambda Bx = B\lambda x = BLx,$$

тогда $(\dot{L} + LB - BL)x = 0$ и $\dot{L} = [B, L]$.

$\implies$ Пусть $(L - \lambda E)x = 0$, дифференцируем:

$$\dot{L}x + (L - \lambda E)\dot{x} = 0.$$

Подставим $\dot{L} = [B, L]$ и преобразуем:

$$\begin{aligned} BLx - LBx + (L - \lambda E)\dot{x} &= 0, \\ B\lambda x - LBx + (L - \lambda E)\dot{x} &= 0, \\ -(L - \lambda E)Bx + (L - \lambda E)\dot{x} &= 0, \\ (L - \lambda E)(\dot{x} - Bx) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{x} - Bx = \mu x$. Домножим скалярно на x :

$$(\dot{x}, x) - (Bx, x) = \mu(x, x).$$

Заметим, что $(\dot{x}, x) = 0$, так как $|x| = 1$, и $(Bx, x) = 0$, так как $(Bx, x) = (x, -Bx) = -(Bx, x)$. Таким образом, $\mu = 0$ и $\dot{x} = Bx$. $\square$

Теорема 4. *Динамика спектральных данных цепочки Тоды явно описывается формулами:*

$$\lambda(t) = \lambda(0), \quad \xi(t) = \frac{e^{\Lambda t} \xi(0)}{|e^{\Lambda t} \xi(0)|}, \quad \text{где } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Или, что тоже самое,

$$\xi(t) = \frac{(e^{\lambda_1 t} \xi_1(0), \dots, e^{\lambda_n t} \xi_n(0))}{\sqrt{e^{2\lambda_1 t} \xi_1(0)^2 + \dots + e^{2\lambda_n t} \xi_n(0)^2}}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} Lx_k &= \lambda_k x_k, \\ \dot{x}_k &= Bx_k, \end{aligned}$$

где $x_k = (\xi_k, \eta_k, \dots)^T$ — нормированный собственный вектор с $\xi_k > 0$. Посмотрим теперь только на первые координаты:

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda_k)\xi_k + b_1\eta_k = 0 \\ \dot{\xi}_k = b_1\eta_k \end{cases},$$

откуда $\dot{\xi}_k = (\lambda_k - a_1)\xi_k$, или $\dot{\xi} = (\Lambda - a_1 E)\xi$. Продифференцируем равенство $(\xi, \xi) = 1$ и преобразуем:

$$0 = (\dot{\xi}, \xi) = ((\Lambda - a_1 E)\xi, \xi) = (\Lambda\xi, \xi) - a_1(\xi, \xi) = (\Lambda\xi, \xi) - a_1.$$

Тогда

$$a_1 = (\Lambda\xi, \xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2,$$

откуда

$$\dot{\xi} = (\Lambda - (\lambda\xi, \xi)E)\xi. \quad (6)$$

Не сложно проверить, что решение уравнения (1) даёт нужные формулы для $\xi(t)$. $\square$

Замечание 1 (Мозер, 1974). Уравнение (1) есть градиентный поток на сфере $|\xi|^2 = 1$ для функции

$$V = \frac{(\Lambda\xi, \xi)}{(\xi, \xi)}.$$

Следствие 2. $a_j(t)$ и $b_j^2(t)$ являются рациональными функциями от $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

Таким образом, мы теперь имеем полный рецепт решения. Выпи-

шем, в качестве примера, решение для $n = 2$:

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2}p_1 = \frac{\lambda_1 \xi_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \lambda_2 \xi_2^2 e^{2\lambda_2 t}}{\xi_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \xi_2^2 e^{2\lambda_2 t}} \\ a_2 = -\frac{1}{2}p_2 = \frac{\lambda_2 \xi_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \lambda_1 \xi_2^2 e^{2\lambda_2 t}}{\xi_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \xi_2^2 e^{2\lambda_2 t}} \\ b_1 = \frac{1}{2}e^{q_1 - q_2} = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\xi_1 \xi_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}}{\xi_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \xi_2^2 e^{2\lambda_2 t}} \end{cases} . \quad (7)$$

Разберем теперь рассеяние в цепочке Тоды. Начнем со случая $n = 2$ и воспользуемся формулами (2):

$$\begin{aligned} \text{при } t \rightarrow -\infty : \quad & a_1 \rightarrow \lambda_1, \quad a_2 \rightarrow \lambda_2, \\ \text{при } t \rightarrow +\infty : \quad & a_1 \rightarrow \lambda_2, \quad a_2 \rightarrow \lambda_1, \end{aligned}$$

где при вычислении пределов используется неравенство $\lambda_1 < \lambda_2$. Таким образом, видно, что в результате рассеяния частицы меняются импульсами.

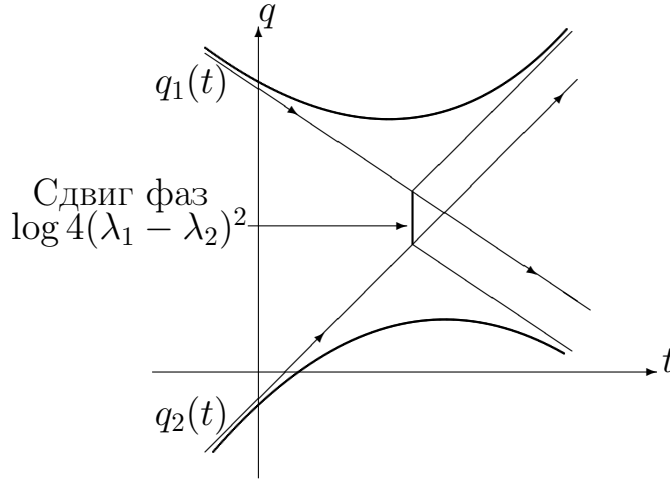
Замечание 2. Динамический смысл $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — асимптотические скорости частиц ($\Rightarrow$ скобка Пуассона $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$).

В случае цепочки Тоды задача рассеяния $p(0), q(0) \rightarrow p^\pm$ при $t \rightarrow \pm\infty$ решается явно:

$$(p, q) \rightarrow L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n,$$

и полученные собственные значения равны асимптотическим скоростям.

Теперь разберёмся с фазами. Итак, при $t \rightarrow \pm\infty$, имеем $q_i(t) \rightarrow p_i^\pm t + \beta_i$, где β_i и есть фазы.



При взаимодействии частиц происходит сдвиг фаз, одна частица выигрывает в фазе, а другая теряет. На рисунке жирным показаны траектории и сдвиг фаз.

Для любого n имеем закон сохранения энергии:

$$H = 2 \sum a_j^2 + 4 \sum b_j^2 = \text{const.}$$

Откуда видно, что $a(t)$ и $b(t)$ ограничены. Вспомним уравнения движения:

$$\dot{a}_1 = 2b_1^2, \quad \dot{a}_j = 2(b_j^2 - b_{j-1}^2).$$

Тогда $\int b_j^2(t) dt < \infty$, и соответственно $b_j \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \pm\infty$.

Посмотрим на второе уравнение движения:

$$\dot{b}_j = b_j(a_{j+1} - a_j),$$

разделим на b_j :

$$(\log b_j)^\cdot = a_{j+1} - a_j,$$

решим это уравнение:

$$b_j(t) = b_j(0) \exp \int_0^t (a_{j+1}(t) - a_j(t)) dt.$$

Так как $b_j(t)$ ограничены, имеем $a_{j+1}(t) - a_j(t) < 0$, при $t \gg 0$.
Таким образом, на матричном уровне, имеем:

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{при } t \longrightarrow -\infty, \\ L &\longrightarrow \text{diag}(\lambda_n, \dots, \lambda_1), \quad \text{при } t \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Замечание 3. *Полный сдвиг фаз равен сумме попарных сдвигов так, как будто частицы взаимодействуют только попарно.*

Лекция 4

Пусть A — симметричная $n \times n$ матрица. Для её диагонализации и поиска собственных значений может использоваться так называемый *QR-алгоритм*, полученный независимо Франсисом и Кубановской примерно в 1960 году. Итак, рассмотрим факторизацию $A = QR$, где Q — ортогональная, а R — верхнетреугольная (такая факторизация суть алгоритм Грамма-Шмидта применённый к столбцам матрицы A). Переставим сомножители:

$$A \longrightarrow A_1 = RQ = Q^{-1}AQ,$$

это, очевидно, изоспектральное преобразование, оно сохраняет спектр A . Применим ту же процедуру к A_1 :

$$A_1 = Q_1 R_1 \longrightarrow R_1 Q_1 = A_2 = Q_2 R_2 \longrightarrow \dots$$

Теорема 5 (Francis, Кубановская). Если A имеет различные собственные числа, такие что $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, то $A_k \rightarrow \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ экспоненциально быстро ($\sim e^{-\beta k}$, где $\beta = \min(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$).

Теорема 6 (Symes, 1980). Пусть

$$L(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ b_1(t) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-1}(t) & a_n(t) \end{pmatrix}$$

отвечает некоторому решению цепочки Тоды. Тогда $A_k = e^{L(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ получаются из $A_0 = e^{L(0)}$ применением QR -алгоритма (то есть Тода есть интерполяция QR -алгоритма).

Для доказательства потребуется следующая важная лемма.

Лемма 7 (Тода и факторизация). Пусть $e^{tL(0)} = Q(t)R(t)$, тогда

$$L(t) = Q^T(t)L(0)Q(t).$$

Доказательство. Продифференцируем равенство $e^{tL(0)} = Q(t)R(t)$:

$$\dot{Q}R + Q\dot{R} = L(0)e^{tL(0)} = L(0)QR,$$

умножим на R^{-1} справа и на $Q^T = Q^{-1}$ — слева:

$$Q^T\dot{Q} + \dot{R}R^{-1} = Q^TL(0)Q =: \tilde{L}(t).$$

Заметим, что первый член в сумме слева есть кососимметрическая матрица, а второй — верхнетреугольная, такое разложение, очевидно, единственно. Продифференцируем:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}} &= \dot{Q}^TL(0)Q + Q^TL(0)\dot{Q} = \dot{Q}^TQQ^TL(0)Q + Q^TL(0)QQ^T\dot{Q} = \\ &= -Q^T\dot{Q}\tilde{L} + \tilde{L}Q^T\dot{Q} = [\tilde{L}, Q^T\dot{Q}] = [\tilde{L}, \pi_s(\tilde{L})], \end{aligned}$$

здесь π_s — проекция на кососимметрические матрицы.

Сравним с Тодой: $\dot{L} = [B, L] = [L, -B] = [L, \pi_s(L)]$, а начальные данные совпадают: $\tilde{L}(0) = L(0)$. Таким образом $L(0) \equiv \tilde{L}(0)$, откуда и следует нужное утверждение. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть $A = e^{L(0)} = e^{tL(0)}|_{t=1} = Q(1)R(1)$. По лемме $L(1) = Q^{-1}(1)L(0)Q(1)$, тогда

$$\begin{aligned} e^{L(1)} &= e^{Q^{-1}(1)L(0)Q(1)} = Q^{-1}(1)e^{L(0)}Q(1) = Q^{-1}(1)Q(1)R(1)Q(1) = \\ &= R(1)Q(1). \end{aligned}$$

Таким образом получили шаг QR-алгоритма. $\square$

Линейная алгебра на этом заканчивается, однако, для демонстрации многоликости цепочки Тоды, продемонстрируем её связь с топологическими задачами.

Итак, рассмотрим изоспектральное многообразие трёхдиагональных матриц (Tomei, 1984):

$$M_n = \left\{ L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} : \text{Spec } L = \{\lambda_1 < \dots < \lambda_n\} \right\},$$

где $a_i, b_j \in \mathbb{R}$. При доказательстве следующей теоремы цепочка Тоды была использована в качестве градиентного потока в теории Морса.

Теорема 7 (Tomei). M_n — гладкое ориентируемое компактное асферическое многообразие с Эйлеровой характеристикой

$$\chi(M_n) = (-1)^{n+1} B_{n+1} \frac{2^{n+1}(2^{n+1} - 1)}{n + 1},$$

где B_n — числа Бернулли, которые определяются из равенства

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum \frac{B_k}{k!} t^k.$$

Выпишем несколько чисел Бернулли, для демонстрации неожиданности этого утверждения. Итак, $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}$, а все нечётные, кроме B_1 , равны нулю.

Рассмотрим, в качестве примера, $n = 3$, тогда

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем Эйлерову характеристику:

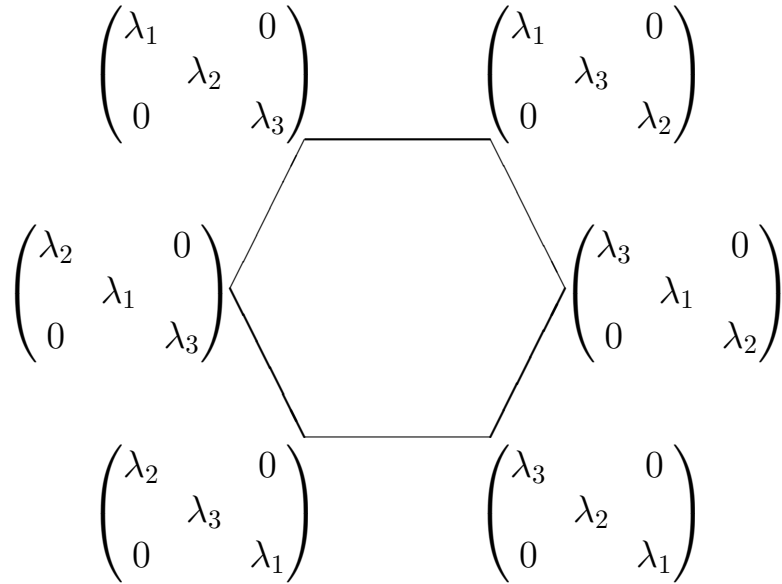
$$\chi(M_3) = \left(-\frac{1}{30}\right) 2^{n+1} (2^{n+1} - 1) \frac{1}{4} = -2.$$

Откуда ясно, что M_3 — сфера с двумя ручками.

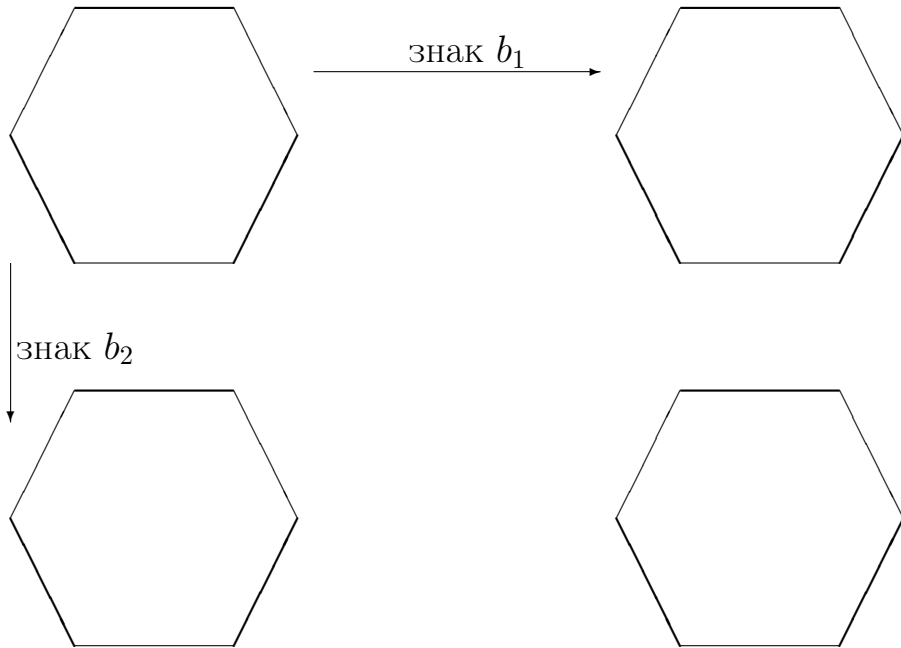
Вспомним теперь про вектор ξ . Этот вектор жил на открытом треугольнике на сфере ($|\xi| = 1, \xi_i > 0$). Теперь же мы отказываемся от условия $b_j > 0$, и наше изоспектральное многообразие будет склеиваться из четырёх кусков (разные знаки b_1 и b_2), и, что интереснее, при $b_i \geq 0$, эти куски не треугольники, а шестиугольники. Посмотрим на вершину треугольника $\xi = (1, 0, 0)$, обратная задача решается здесь не однозначно, а именно, получим матрицы:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

которые и дают нам отрезок в пространстве наших трёхдиагональных матриц. Объясним это, сославшись на задачу Шура-Хорна: какие диагональные элементы могут быть у матрицы с заданным спектром $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ответом служит выпуклая оболочка векторов $s(\lambda)$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $s \in S_n$ (такие выпуклые оболочки называются пермutoэдрами). В нашем случае, для $n = 3$, имеем 6 перестановок и, соответственно, следующую ситуацию:



где жирным обозначены стороны получившиеся из вершин. Таким образом, M_n состоит из 2^{n-1} (знаки b_j) пермutoэдров, склеенных определённым образом, а каким именно, разберём при $n = 3$.



Здесь, как и раньше, жирные стороны есть бывшие вершины. Склеивать будем соответствующие жирные стороны в горизонтальном направлении и тонкие в вертикальном. В итоге, как и ранее, получим сферу с двумя ручками.

Замечание 4 (Bloch, Brocket, Flaschka, Ratiu). *Цепочка Тоды, после ограничения на M_n , является градиентным потоком для функции $F = \text{tr } LN$, где $N = \text{diag}(n, n-1, \dots, 1)$, для некоторой естественной метрики (нормальная метрика, Атья, 1983).*

Это утверждение объясняется тем, что цепочка Тоды эквивалентна матричному уравнению $\dot{L} = [L, [L, N]]$, и соответственно, $B = [L, N]$.

Цепочка Тоды также оказалась полезной в решении проблемы Стинрода о реализации циклов многообразиями. Пусть X — многообразие, а $\sigma \in H_k(X, \mathbb{Z})$ — цикл, необходимо найти многообразие Y^k

и отображение $f : Y^k \rightarrow X$, что $f^*([Y]) = \sigma$. Томом было показано, что, с точностью до кратности $\sigma \rightarrow t\sigma$, это всегда возможно. О том, какое именно Y можно взять, говорит следующая теорема.

Теорема 8 (Гайфуллин). *В качестве Y можно взять M_n или некоторое его накрытие.*

Введение в теорию фробениусовых многообразий

Б. А. Дубровин

Лекция 1

В этих лекциях речь пойдет о фробениусовых многообразиях, которые появились при попытках понять конструкции, возникающие в топологической теории поля. Но они оказались также полезны в теории интегрируемых систем и теории групп, порожденных отражениями. Начнем мы с алгебраического введения.

Определение 1. *Алгеброй* над $\mathbb{C}$ называется векторное пространство со структурой коммутативного, ассоциативного умножения с единицей, причем обе эти структуры согласованы в следующем смысле: $(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha x \cdot z + \beta y \cdot z$.

Все наши алгебры будут конечномерными, поэтому для задания умножения достаточно в некотором фиксированном базисе $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ записать таблицу умножения базисных векторов: $e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$.

Числа c_{ij}^k называются структурными константами алгебры. В дальнейшем мы будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам, применяемое в дифференциальной геометрии.

Но не всякий набор чисел c_{ij}^k будет задавать структуру алгебры, условия коммутативности и ассоциативности накладывают некоторые ограничения, а именно:

- 1) $c_{ij}^k = c_{ji}^k$ (коммутативность);

2) $c_{ij}^s c_{sk}^l = c_{is}^l c_{jk}^s$ (ассоциативность).

Легко видеть, что правило дистрибутивности из определения алгебры обеспечивает и обратное утверждение: если c_{ij}^k удовлетворяют условиям выше, то соответствующее векторное пространство с умножением, заданным на базисных векторах формулой $e_i \cdot e_j = c_{ij}^k e_k$ будет являться алгеброй (возможно без единицы).

Определение 2. Фробениусовой алгеброй называется пара $(A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где A — алгебра, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — симметричная $\mathbb{C}$ -билинейная невырожденная инвариантная форма, то есть $\langle a \cdot b, c \rangle = \langle a, b \cdot c \rangle$ для любых $a, b, c \in A$.

Замечание 1. Пусть $\omega \in A^*$: $\omega(a) = \langle e, a \rangle$. Тогда $\omega(ab) = \langle a, b \rangle$. Последнее равенство можно использовать для определения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, если билинейная форма $\omega(a, b)$ невырождена.

Пример 1. $A = \mathbb{C}[G] = \{z^g e_g | g \in G, z^g \in \mathbb{C}\}$ — групповая алгебра конечной абелевой группы. Функционал ω задается формулой $\omega(z^g e_g) = z^e$.

Уравнение ассоциативности WDVV. Будем искать n -мерное семейство n -мерных фробениусовых алгебр $(A_{\bar{v}}, \langle \cdot, \cdot \rangle, e)$ (отметим, что форма и единица постоянны). Будем рассматривать A как $\text{Span}(e_1, \dots, e_n)$ со структурой умножения $e_i e_j = c_{ij}^k(\bar{v}) e_k$ и билинейной формой $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$, где η_{ij} — постоянная симметричная невырожденная матрица. В силу структуры фробениусовой алгебры у нас возникает симметричный тензор $\langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle = c_{ij}^s(\bar{v}) \eta_{sk}$. Так как тензор симметричен, то мы налагаем следующее естественное условие: существует функция $F(\bar{v})$, такая что

$$\langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle = \frac{\partial^3 F}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k},$$

для любых $i, j, k = 1, \dots, n$.

Попробуем выразить структурные константы через производные F . Для этого воспользуемся поднятием индексов, а именно, обозначим через η^{ij} обратную к η_{ij} матрицу. Тогда мы имеем:

$$c_{ij}^k(\bar{v}) = \eta^{ks} \frac{\partial^3 F}{\partial v^s \partial v^i \partial v^j}.$$

Какие же условия должны быть наложены на F , чтобы получились структурные константы? Коммутативность мы получаем всегда, а вот условие ассоциативности записывается нетривиально:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^i \partial v^j \partial v^s} \eta^{st} \frac{\partial^3 F}{\partial v^t \partial v^k \partial v^l} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^l \partial v^j \partial v^s} \eta^{st} \frac{\partial^3 F}{\partial v^t \partial v^k \partial v^i},$$

где выражение в левой части отличается перестановкой индексов i и l . Это и есть WDVV уравнение ассоциативности. Далее мы будем обсуждать частные решения уравнения WDVV. И мы наложим дополнительное условие на F , так называемое условие квазиоднородности:

$$F(\lambda^{d_1} v^1, \lambda^{d_2} v^2, \dots, \lambda^{d_n} v^n) = \lambda^{d_F} F(v^1, \dots, v^n),$$

где $d_1, \dots, d_n, d_F$ — некоторые заданные числа.

Замечание 2. Единица e постоянна и более того, мы будем далее предполагать, что $e_1 = e$, то есть $c_{1i}^k = \delta_i^k$. Поэтому $\frac{\partial^3 F}{\partial v^1 \partial v^i \partial v^j} = \eta_{ij}$, а следовательно, зависимость F от v_1 полиномиальна и не выше третьей степени.

Пример 2. Пусть $n = 1$, тогда $F(v) = \frac{1}{6} v^3$. Этот пример показывает, что для любой алгебры можно взять $F(\bar{v}) = \sum_{i \leq j \leq k} b_{ijk} \langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle v^i v^j v^k$,

где $b_{ijk} = 1$, если все индексы разные, $\frac{1}{2}$, если ровно два индекса совпадают и $\frac{1}{6}$ если все три индекса одинаковые. Такие тривиальные решения мы в дальнейшем не рассматриваем.

Некоторые нетривиальные примеры решений уравнения WDVV. Пусть $n = 2$, тогда базис имеет вид $e_1 = e, e_2$. Существенным здесь, как ни странно, является случай $\eta_{11} = 0$. Тогда $\eta_{12} \neq 0$ и базис можно модифицировать $e_2 \mapsto e_2 - \lambda e_1$ так, чтобы $\eta_{22} = 0$ и, более того, можно растянуть e_2 и получить $\eta_{12} = 1$. Тогда

$$\frac{\partial^3 F}{(\partial v^1)^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 F}{(\partial v^1)^2 \partial v^2} = 1; \quad \frac{\partial^3 F}{\partial v^1 (\partial v^2)^2} = 0.$$

Теперь нетрудно понять, что $F(v^1, v^2) = \frac{1}{2}(v^1)^2 v^2 + f(v^2)$. Найдем ограничения на f . Для этого нужно подсчитать единственные нетривиальные структурные константы c_{22}^i . Для этого заметим, что $c_{22}^1 = \langle e_2^2, e_2 \rangle = \frac{\partial^3 F}{(\partial v^2)^3}$. Аналогично, $c_{22}^2 = \frac{\partial^3 F}{\partial v^1 (\partial v^2)^2} = 0$. Таким образом, $e_2^2 = f'''(v^2)e_1$, и легко видеть, что эта алгебра всегда будет ассоциативной.

Условие квазиоднородности дает

$$\frac{1}{2}\lambda^{2d_1+d_2}(v^1)^2 v^2 + f(\lambda^{d_2} v^2) = \lambda^{d_F} \left(\frac{1}{2}(v^1)^2 v^2 + f(v^2) \right).$$

Отсюда $f(v^2) = (v^2)^\alpha$, то есть $\lambda^{2d_1+d_2} = \lambda^{\alpha d_2} = \lambda^{d_F}$. Так как d_i определяются с точностью до общего множителя, то нормируем $d_1 = 1$, тогда $d_2 = \frac{2}{\alpha-1}$, $d_F = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$.

Замечание 3. Если n — любое и $\eta_{11} = 0$, то можно выбрать базис $e_1 = e, e_2, \dots, e_n$, такой, что $\eta_{ij} = \delta_{i,n-i}$, то есть матрица η антидиагональна. Предположим также, что $d_1 \neq 0$, нормируем $d_1 = 1$. Тогда

$$F(v^1, \dots, v^n) = \frac{1}{2}(v^1)^2 v^n + \frac{1}{2}v^1 \sum_{k=2}^{n-1} v^k v^{n-k+1} + f(v^2, \dots, v^n).$$

Введем обозначения $d_F = 3-d$, $q_i = 1-d_i$, $q_1 = 0$, тогда $q_i + q_{n-i+1} = d$. Это простое следствие вышеуказанной формулы, доказательства которых предоставляются читателю.

Рассмотрим теперь случай $n = 3$ с тем же условием $\eta_{11} = 0$. Тогда имеются соотношения $q_1 + q_3 = d, q_2 + q_2 = d$, откуда получаем, что однородность для F имеет вид

$$F(\lambda v^1, \lambda^{1-\frac{d}{2}} v^2, \lambda^{1-d} v^3) = \lambda^{3-d} F(v^1, v^2, v^3).$$

Кроме того, из замечания выше получаем, что

$$F(v^1, v^2, v^3) = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + f(v^2, v^3).$$

Мы хотим написать таблицу умножения. Теми же методами, что и в двумерном случае, используя антидиагональность матрицы η , получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} e_2^2 &= f_{xxy} e_1 + f_{xxx} e_2 + e_3, \\ e_2 e_3 &= f_{xyy} e_1 + f_{xxy} e_2, \\ e_3^2 &= f_{yyy} e_1 + f_{xyy} e_2. \end{aligned}$$

Такая алгебра уже, вообще говоря, не будет ассоциативной. Условие ассоциативности имеет вид $e_2^2 \cdot e_3 = e_2 \cdot (e_2 \cdot e_3)$. Уравнение на f получается следующим:

$$f_{xxy}^2 = f_{yyy} + f_{xxx} f_{xyy}.$$

Кроме того, не забываем про условие квазиоднородности, которое должно выполняться также и для функции f :

$$f(\lambda^{1-\frac{d}{2}} x, \lambda^{1-d} y) = \lambda^{3-d} f(x, y).$$

Эту задачу можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению Пенлеве-VI.

Пример 3. Попробуем искать полиномиальные решения (нетривиальные), $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$. Допустим $0 < d < 1$, тогда все показатели квазиоднородности положительны. При умножении x и y на λ в соответствующих степенях моном $x^i y^j$ умножается на $\lambda^{i+j-d(\frac{i}{2}+j)}$, а условие квазиоднородности говорит нам, что тот же самый моном умножится на λ^{3-d} . Таким образом, $i + j - d(\frac{i}{2} + j) = 3 - d$, кроме того, из этого соотношения легко видеть, что лишь конечное число пар (i, j) удовлетворяют этому соотношению.

Получаем следующий список полиномиальных решений для $n = 3$ и $0 < d < 1$:

- 1) $F[v^1, v^2, v^3] = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + \frac{1}{4} (v^2 v^3)^2 + \frac{1}{60} (v^3)^5$;
- 2) $F[v^1, v^2, v^3] = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + \frac{1}{6} (v^2)^3 v^3 + \frac{1}{6} (v^2)^2 (v^3)^3 + \frac{1}{210} (v^3)^7$;
- 3) $F[v^1, v^2, v^3] = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + \frac{1}{6} (v^2)^3 (v^3)^2 + \frac{1}{20} (v^2)^2 (v^3)^5 + \frac{1}{3960} (v^3)^{11}$.

Важное замечание: степени последних членов минус 1 есть числа Кокстера групп симметрий платоновых тел: 4, 6, 10.

Пример 4. (Концевич-Манин)

Обозначим через N_k число рациональных кривых степени k на $\mathbb{CP}^2$, проходящих через $3k - 1$ точку общего положения. Например, $N_1 = 1$, $N_2 = 1$, $N_3 = 12$. Тогда функция

$$F(v^1, v^2, v^3) = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{(3k-1)!} (v^3)^{3k-1} e^{kv^2}$$

удовлетворяет уравнению WDVV. Это позволяет рекуррентно считать числа N_k . Неизвестно, выражается ли F через известные трансцендентные функции, неизвестен даже радиус сходимости ряда в правой части.

В этом примере, казалось бы, нет никакой квазиоднородности. Чтобы она появилась, мы немного обобщим понятие квазиоднородности. Вспомним, что условие квазиоднородности записывалось следующим образом:

$$F(\lambda^{d_1}v^1, \lambda^{d_2}v^2, \dots, \lambda^{d_n}v^n) = \lambda^{d_F}F(v^1, \dots, v^n) + \text{квадратичные члены}.$$

Теперь положим $\lambda = e^t$ и продифференцируем предыдущее равенство по t . Мы получим

$$\sum_{i=1}^n d_i v^i \frac{\partial F}{\partial v^i} = d_F F + \text{квадратичные полиномы}.$$

Известная теорема Эйлера утверждает, что это условие является не только необходимым, но и достаточным условием квазиоднородности. Введем линейное эйлерово векторное поле $E = \sum_{i=1}^n d_i v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, тогда это условие переписывается в виде $E \cdot F = d_F F + \dots$. Естественное обобщение заключается в том, что мы теперь разрешаем полю E иметь постоянные коэффициенты. Тогда функция из нашего примера становится квазиоднородной для эйлерова векторного поля $E = v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + 3 \frac{\partial}{\partial v^2} - v^3 \frac{\partial}{\partial v^3}$.

Пример 5. Пусть $E = v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial}{\partial v^2}$. Рассмотрим решения следующего вида:

$$F = \frac{(v^1)^2 v^3 + v^1 (v^2)^2}{2} + f(v^2, v^3).$$

Так как первое слагаемое имеет степень однородности 2, то $d_F = 2$, а значит, $d = 1$. Потребуем, чтобы f было полиномиально по v^2 , тогда его степень с необходимостью будет равняться четырем $f = -\frac{(v^2)^4}{16} \gamma(v^3)$. Из уравнения ассоциативности получим для γ так называемое уравнение Шазы:

$$\gamma''' = 6\gamma\gamma'' - 9(\gamma')^2.$$

Одно из решений этого уравнения — $\gamma = \gamma(\tau) = \sum_{k \geq 0} \gamma_k q^k = 8\pi i E_2(\tau)$, где $\text{Im } \tau > 0$ и $q = e^{2\pi i \tau}$. Здесь E_2 есть второй ряд Эйзенштейна:

$$E_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}.$$

При $k \geq 2$ этот ряд сходится абсолютно и определяет модулярную форму, а при $k = 1$ ряд сходится условно, поэтому необходимо фиксировать порядок суммирования. В нашем случае, мы полагаем

$$E_2(\tau) = \frac{1}{24} - \sum_{n \geq 1} \frac{nq^n}{1 - q^n} = \frac{1}{24} - \sum_{n \geq 1} \sigma(n)q^n,$$

где $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

При заменах переменных вида $\tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ наше решение преобразуется по закону $\tilde{\gamma} = (c\tau + d)^2 \gamma + 2c(c\tau + d)$. Общее решение уравнения Шазы получается из γ такой заменой переменных с той лишь разницей, что мы разрешаем матрице замены лежать в $\text{SL}_2(\mathbb{C})$. Среди всех этих решений γ замечательно тем, что раскладывается в ряд Фурье только по положительным членам.

Лекция 2

Теперь мы наконец готовы дать определение фробениусова многообразия

Определение 3. *Фробениусовым многообразием* называется гладкое многообразие M снабженное структурой фробениусовой алгебры $(A_v; \langle \cdot, \cdot \rangle_v; e_v)$ на касательном пространстве $T_v M$ к каждой точке, удовлетворяющее следующим аксиомам (FM1)–(FM3).

Замечание 4. Отметим, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ не является положительно определенной, тем не менее, мы будем называть ее метрикой и применять к ней конструкции римановой геометрии.

(FM1) Кривизна метрики есть тождественный нуль, то есть существуют локальные плоские координаты $v^1, \dots, v^n$ такие, что компоненты матрицы Грамма η_{ij} есть константы. Более того, если ∇ — связность Леви-Чивита, то $\nabla e_v = 0$, где e_v — поле из единиц алгебр.

Замечание 5. В дальнейшем мы, как и ранее, считаем, что $v^1 = e_v$.

(FM2) Рассмотрим $C \in T^{0,3}M$: $C(X, Y, Z) = \langle X \cdot Y, Z \rangle$, где $\cdot$ означает умножение в алгебре. Вторая аксиома состоит в том, что выражение

$$(\nabla_W C)(X, Y, Z)$$

должно быть симметричным по X, Y, Z, W .

Посмотрим, что же означает эта аксиома. Предположим, что в плоских координатах мы имеем $C\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}, \frac{\partial}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial^3 F}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k}$. Положим $w = \frac{\partial}{\partial v^l}$ и получим:

$$(\nabla_w C)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}, \frac{\partial}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial^4 F}{\partial v^i \partial v^j \partial v^k \partial v^l}.$$

Таким образом, если все структурные константы фробениусовых алгебр являются частными производными некоторой функции F , то аксиома (FM2) выполнена. Нетрудно сообразить, что верно и обратное (правда, только локально):

$$(\nabla_w C)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}, \frac{\partial}{\partial v^k}\right) = \frac{\partial c_{ijk}}{\partial v^l}.$$

В частности при фиксированных i, j имеем $\frac{\partial c_{ijk}}{\partial v^l} = \frac{\partial c_{ijl}}{\partial v^k}$, и теперь лемма Пуанкаре обеспечивает нам существование набора функций

$a_{ij}(v)$, такого что $c_{ijk} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial v^k}$. Затем, пользуясь симметрией по j, k , применяем лемму Пуанкаре еще раз, в итоге получаем локальное обратное утверждение.

(FM3) Существует эйлерово векторное поле E , такое, что $\nabla \nabla E = 0$ (это соответствует линейности в локальных координатах). Более того, для структурных констант c_{ij}^k имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_E \dot{c}_{..} &= \dot{c}_{..}, \\ \mathcal{L}_E \langle \cdot, \cdot \rangle &= (2 - d) \langle \cdot, \cdot \rangle,\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}$ означает производную Ли.

Деформация плоской связности. Рассмотрим семейство связностей, индексированных параметром z :

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + z X \cdot Y.$$

Лемма 1. *Связность $\tilde{\nabla}$ имеет нулевую кривизну для любого z .*

Доказательство. Для 1-формы с координатами ξ_i ∇ мы имеем:

$$\tilde{\nabla}_i \xi_j = \frac{\partial \xi_j}{\partial v^i} - z c_{ij}^k \xi_k.$$

Равенство кривизны нулю равносильно существованию базиса горизонтальных сечений, то есть сечений с нулевой ковариантной производной. Рассмотрим систему уравнений $\tilde{\nabla}_i \xi_j = 0$. Это переопределенная система линейных уравнений в частных производных. Она имеет n линейно независимых решений тогда и только тогда, когда выполнены условия совместности. Мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v^i} \xi_k &= z c_{ik}^s \xi_s \\ \frac{\partial}{\partial v^j} \xi_k &= z c_{jk}^t \xi_t.\end{aligned}$$

Таким образом, условие совместности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial v^i}(zc_{jk}^t\xi_t) = \frac{\partial}{\partial v^j}(zc_{ik}^s\xi_s).$$

То есть

$$z\left(\frac{\partial c_{ik}^s}{\partial v^j} - \frac{\partial c_{jk}^s}{\partial v^i}\right) + z^2(c_{ik}^s c_{sj}^t - c_{ij}^s c_{si}^t)\xi_t = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу (FM2), а второе слагаемое — уравнение ассоциативности. $\square$

Продолжим связность $\tilde{\nabla}$ на $M \times \mathbb{C}^*$, где второй сомножитель соответствует параметру z , следующим образом:

$$\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dz}} Y = \frac{\partial Y}{\partial t} + E \cdot Y - \frac{\mu}{z} Y,$$

где μ по определению есть оператор $\frac{2-d}{2} \cdot 1 - \nabla E$.

Упражнение 1. Проверить, что так продолженная связность имеет нулевую кривизну.

Деформация плоской метрики. Сейчас мы определим некоторую билинейную форму на кокасательном расслоении T^*M . Для начала отметим, что с помощью метрики мы можем опускать и поднимать индексы у структурных констант, следовательно, мы имеем структуру алгебры на T^*M . Пусть ω_1, ω_2 — 1-формы на M . Положим:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_H = \iota_E(\omega_1 \cdot \omega_2).$$

Предложение 1. При условии аналитичности фробениусова многообразия M , $\det \langle \cdot, \cdot \rangle_H \neq 0$ на открытом всюду плотном множестве M . Более того, на этом множестве индуцированная метрика на TM имеет нулевую кривизну.

Доказательство. $g^{ij}(v) = \langle dv^i, dv^j \rangle = E^k c_k^{ij}$, где $c_k^{ij} = \eta^{is} c_{sk}^j$.

Рассмотрим зависимость этого выражения от точки $v = (v_1, \dots, v_n)$ на многообразии. Для этого обозначим $v = (v^1, \tilde{v})$, тогда $E = v^1 \frac{\partial}{\partial v^1} + E(\tilde{v})$ и $\langle dv^i, dv^j \rangle = v^1 c_1^{ij} + g^{ij}(\tilde{v})$. Далее, $c_1^{ij} = \eta^{is} c_{s1}^j = \eta^{is} \delta_s^j = \eta^{ij}$.

Казалось бы, формула для c_k^{ij} в сопряженном базисе должна быть такой: $c_{st}^l \eta_{lk} \eta^{si} \eta^{tj}$. Действительно, если обозначить за f изоморфизм между пространством и сопряженным к нему, индуцированный метрикой, то $f(e_i) = \eta_{ij} e^j$. Тогда условие того, что f — изоморфизм алгебр записывается как $\eta_{ij} e^j \cdot \eta_{kl} e^l = c_{ij}^k \eta_{ks} e^s$ или $\eta_{ij} \eta_{kl} c_s^{jl} = c_{ij}^k \eta_{ks}$, что равносильно изначальному равенству. В то же время, в базисе $f(e_i)$ структурные константы просто совпадают.

Отсюда $g^{ij}(v) = v^1 \eta^{ij} + g^{ij}(\tilde{v})$. Тогда $\det(g^{ij}(v)) = (v^1)^n \det(\eta^{ij}) + P(v)$, где $P(v)$ — полином степени не выше $n - 1$ по v^1 . Тогда этот определитель не может тождественно зануляться, так как это полином от v^1 с ненулевым коэффициентом при старшей степени.

Попробуем угадать формулу для связности Леви-Чивита. Предположим, что однородная часть эйлерова векторного поля имеет вид $\sum d_i v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$, положим $q_i = 1 - d_i$. Напомним формулу для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial v^j} + \frac{\partial g_{sj}}{\partial v^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial v^s} \right).$$

Но нам она не очень удобна, поэтому напомним формулу для символов Кристоффеля с поднятыми индексами $\Gamma_k^{ij} = -g^{is} \Gamma_{sk}^j$:

$$\Gamma_k^{ij} = \left(\frac{d+1}{2} - q_j \right) c_k^{ij}.$$

Докажем, что эти символы Кристоффеля действительно задают связность Леви-Чивита. Для этого надо проверить 2 условия.

1) Симметричность $g^{is}\Gamma_s^{jk} = g^{js}\Gamma_s^{ik}$.

2) Согласованность с метрикой: $0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial v^k} - \Gamma_k^{ij} - \Gamma_k^{ji}$.

Мы знаем, что $E^k \frac{\partial F}{\partial v^k} = (3 - d)F + \frac{1}{2}A_{ij}v^i v^j + \dots$, где мы пропустили линейные члены в правой части равенства. Отсюда после двукратного дифференцирования мы получаем:

$$g^{ij} = E^k c_k^{ij} = (d + 1 - q_i - q_j)\eta^{is}\eta^{jt} \frac{\partial^2 F}{\partial v^s \partial v^t} + A_{ij}.$$

После дифференцирования:

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial v^k} = (d + 1 - q_i - q_j)\eta^{is}\eta^{jt} \frac{\partial^3 F}{\partial v^k \partial v^s \partial v^t} = (d + 1 - q_i - q_j)c_k^{ij} = \Gamma_k^{ij} + \Gamma_k^{ji},$$

что и доказывает условие 2. А условие 1 сводится к уравнению ассоциативности с помощью формулы $g^{ij} = E^k c_k^{ij}$.

Перейдем к подсчету тензора кривизны. Сейчас мы докажем более общее утверждение, а именно, покажем, что все метрики в пучке $g^{ij}(v) - \lambda \eta^{ij}$ являются плоскими. Аналогично предыдущим рассуждениям, легко показать, что символы Кристоффеля для этих метрик будут равны $\Gamma_k^{ij}(v)$. Для подсчета кривизны воспользуемся следующей нестандартной формулой для тензора Римана с поднятыми индексами:

$$R_l^{ijk} = g^{is} \left(\frac{\partial \Gamma_s^{jk}}{\partial v^l} - \frac{\partial \Gamma_l^{jk}}{\partial v^s} \right) + \Gamma_s^{ij} \Gamma_l^{sk} - \Gamma_s^{ik} \Gamma_l^{sj}.$$

Проверка равенства этого выражения нулю в нашем частном случае, а также восстановление деталей последней части доказательства предоставляется читателю. $\square$

Лекция 3

В этой лекции мы займемся построением полиномиальных решений уравнения ассоциативности в размерности больше трех. Напомним, что на прошлой лекции мы сопоставили каждому фробениусову многообразию пучок плоских метрик. Основная идея заключается в том, чтобы обратить это соответствие и по пучку плоских метрик построить полиномиальные решения. Для начала нам надо описать на каких пространствах определены эти плоские метрики.

Конечные группы Кокстера.

Определение 4. Конечная подгруппа $W \subset O(n)$ называется *группой Кокстера*, если W порождена n отражениями относительно гиперплоскостей.

Пример 6. Группы диэдра $I_2(k)$ в $O(2)$.

Имеется полная классификация неприводимых конечных групп Кокстера: A_n для $n \geq 1$, $B_n = C_n$ для $n \geq 2$, D_n для $n \geq 4$, $I_2(k)$, E_6 , E_7 , E_8 , $G_2 = I_2(6)$, H_3 , H_4 .

Замечание 6. Отметим, что большинство этих групп являются группами Вейля простых алгебр Ли, поэтому они обозначаются теми же буквами. Исключениями являются H_3 , H_4 и $I_2(k)$ при $k = 5$ и $k \geq 7$. Здесь H_3 — это группа симметрий правильного икосаэдра, а H_4 — группа симметрий четырехмерного аналога икосаэдра, который строится, исходя из диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \longleftarrow & \hat{H}_{3+} \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ SO(3) & \longleftarrow & H_{3+} \end{array}$$

Здесь значок $+$ в индексе обозначает симметрии, сохраняющие ориентацию. Как известно, $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$, поэтому эта конструкция дает набор точек в $\mathbb{S}^3$, группа симметрии которого и есть H_4 .

Опишем остальные группы. A_n — это группа S_{n+1} , действующая перестановками координат на n -мерном подпространстве $\{\xi_0 + \dots + \xi_n = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ со стандартной метрикой, ограниченной на подпространстве. Эта группа порождена отражениями, так как транспозиции порождаются симметрией относительно плоскости с нормальным вектором $e_i - e_j$.

Для того, чтобы получить группу B_n , мы должны в $\mathbb{R}^n$ взять группу движений, порожденную перестановками и заменами знаков координат ($\xi_i \mapsto \pm \xi_i$). Отличие D_n от B_n только в том, что мы разрешаем менять знаки лишь у четного числа координат.

Мы хотим построить структуру фробениусова многообразия на $M = (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})/W$. Функции на M — это W -инвариантные функции на $\mathbb{C}^n$. Мы воспользуемся алгебраическим подходом и опишем кольцо регулярных функций на M .

W-инвариантные полиномы от n переменных. Начнем с примеров.

Пример 7. A_n . До перехода к подпространству, инвариантные полиномы — это просто симметрические полиномы от $n + 1$ переменных. По известной теореме из алгебры любой такой полином f выражается как многочлен от элементарных симметрических многочленов σ_i . После ограничения на подпространство мы получаем $\sigma_1 \equiv 0$, поэтому любая функция на M — это полином от n переменных $\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}$. То есть M — это аффинное пространство с координатами $\sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}$.

Пример 8. Для B_n будет аналогичный ответ, но симметрические полиномы будут не от самих координат, а от их квадратов. Для D_n

ответ немножко сложнее, полином $\xi_1 \dots \xi_n$ будет инвариантным и к нему следует добавить симметрические полиномы от квадратов координат, кроме σ_n , так как $\sigma_n(\xi_1^2, \dots, \xi_n^2) = (\xi_1 \dots \xi_n)^2$.

В общем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1. (*Chevalley*). Для конечной группы Кокстера W кольцо инвариантных полиномов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^W \cong \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$, где $y_1 = y_1(\bar{x}), \dots, y_n = y_n(\bar{x})$ — некоторые базисные инвариантные полиномы.

Наименьшая степень инвариантного полинома — это 2, так как W — это подгруппа $O(n)$, то есть скалярное произведение есть инвариантный полином. Более того, такой инвариантный полином единственен, так как неприводимая группа допускает ровно одно инвариантное скалярное произведение (с точностью до умножения на скаляр).

Замечание 7. Очевидно, что базисные полиномы определены неоднозначно; тем не менее, мы можем их выбрать однородными и тогда их степени $\deg y_i = d_i$ однозначно определены. Стоит отметить, что сами однородные базисные полиномы не определены однозначно, так как уже в случае A_n мы могли взять вместо элементарных симметрических, например, полиномы Ньютона.

Определение 5. Пусть группа порождена n отражениями $R_1, \dots, R_n$. Тогда преобразование Кокстера — это класс сопряженности преобразования $C = R_1 \dots R_n$, где порядок определяется некоторым специальным образом.

Степени инвариантных полиномов некоторым образом вычисляются через собственные значения C . Например для A_n нужно взять отражения относительно плоскостей $\xi_0 = \xi_1, \xi_1 = \xi_2, \dots, \xi_n = \xi_{n+1}$. Тогда $C(\xi_0, \dots, \xi_n) = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_0)$ и собственные числа суть корни

$n + 1$ -ой степени из единицы без самой единицы (так как мы ограничиваем на инвариантное подпространство).

В общем случае, для степеней однородных базисных полиномов выполняется неравенство $h = d_1 > d_2 \geq \dots > d_n = 2$.

Определение 6. h называется *числом Кокстера*.

Число Кокстера является также порядком преобразования Кокстера, то есть $C^h = I$.

Пример 9. $h(A_n) = n + 1$, $h(B_n) = 2n$, $h(D_n) = 2n - 2$, $h(H_3) = 10$, $h(H_4) = 30$.

Более того, для d_i имеется следующее соотношение $d_i + d_{n-i+2} = h + 2$.

Заметим, что для y_1 возможны только следующие замены координат, сохраняющие однородность: $y_1 \mapsto \tilde{y}_1 = cy_1 + f_1(y_1, \dots, y_n)$. Кроме того, y_1 не может участвовать в заменах остальных координат, то есть $\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial y_1}$. Таким образом, в касательном пространстве к M имеется фиксированное направление — это направление и будет нам задавать единичное векторное поле.

Метрика на T^*M . Идея состоит в том, чтобы спроектировать метрику на пространство орбит из $\mathbb{C}^n$. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — инвариантные полиномы. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle df(x), dg(x) \rangle = \sum_{a=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_a} \frac{\partial g}{\partial x_a},$$

которое тоже является инвариантным полиномом от $(y_1, \dots, y_n)$. И на это равенство уже можно смотреть как на определение метрики на факторе. Эта метрика будет той самой метрикой, которая у нас появилась в конце второй лекции.

Пример 10. Для A_n возьмем полиномы Ньютона s_i в качестве базисных. Тогда $\langle ds_i, ds_j \rangle = ij \sum \xi_a^{i+j-2} = ij s_{i+j-2}$. Получается, что матрица Грамма данной метрики является матрицей Штурма, которая связана с критерием существования вещественного корня у полинома с вещественными коэффициентами.

Вне подмножества вырожденных орбит проекция $\mathbb{C}^n \rightarrow M$ есть локальный диффеоморфизм, то есть вне этих точек $\det(g^{ij}(y)) \neq 0$.

Наконец, мы имеем возможность определить эйлерово векторное поле $E = \frac{1}{h} \sum x^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{h} \sum d_i y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Главная теорема.

Теорема 2. 1) Для любой неприводимой конечной группы Кокстера W существует единственный W -инвариантный полином $F(x)$ степени $2h+2$, удовлетворяющий уравнению ассоциативности, как функция на M .

2) (C. Hertling) Так получаются все полиномиальные неприводимые решения уравнения ассоциативности, удовлетворяющие условиям полупростоты (то есть алгебра в общей точке должна быть полупростой) и положительности степеней квазиоднородности d_i .

Нам осталось ввести еще одну метрику и закон умножения. Положим $\eta^{ij}(y) = \frac{\partial}{\partial y^1} g^{ij}(y)$ (K. Saito–Yano–Sekiguchi, 1980). Эта метрика часто называется метрикой Сайто. Из формулы для метрики и соображений степени g видно, что $g^{ij}(y)$ зависит от y^1 не более чем линейно. Более того, из тех же соображений степени, легко получить, что выше побочной диагонали у матрицы η^{ij} нули, а на самой диагонали константы (тут надо еще вспомнить формулу $d_i + d_{n+1-i} = h + 2$). Тот факт, что ни одна из этих констант не равна нулю, верен, но мы здесь его доказывать не будем.

Лемма 2. Метрики $g^{ij}(y)$ и $\eta^{ij}(y)$ образуют плоский пучок на M .

Доказательство. Символы Кристоффеля для $g^{ij}(y)$ находятся стандартным образом, используя закон их преобразования от координат x в $\mathbb{R}^n$ к координатам y . Формула получается следующая:

$$\Gamma_k^{ij}(y)dy^k = \sum_{a=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^a} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^a \partial x^b} dx^b.$$

Из этой формулы получается, что Γ_k^{ij} — полиномы и их степень равна $d_i + d_j - d_k - 2$, то есть они опять же зависят от y^1 не более чем линейно. Применим сдвиг координат $y^1 \mapsto y^1 - \lambda$ к паре $(g^{ij}(y), \Gamma_k^{ij})$. Получим пару $(g^{ij}, \Gamma_k^{ij}) - \lambda(\eta^{ij}, \gamma_k^{ij})$. Так как исходная метрика была плоская, то и метрика с замененными координатами плоская, следовательно, мы имеем пучок плоских метрик. $\square$

Соответствующее решение уравнения ассоциативности получается, если выразить F из формулы в конце второй лекции, которая выражает коэффициенты метрики g^{ij} через вторые производные функции F .

Пример 11. Посмотрим как эта конструкция работает для серии A_n . Возьмем в качестве координат элементарные симметрические многочлены и рассмотрим многочлен $\lambda(p) = (p - \xi_0)(p - \xi_1) \dots (p - \xi_n) = p^{n+1} + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$, где a_i — наши координаты. Ограничим метрику в $\mathbb{R}^{n+1}$ на инвариантное подпространство, тогда матрица Грамма в базисе $\xi_1, \dots, \xi_n$ будет иметь вид $h_{ij} = \delta_{ij} + 1$, а обратная матрица $h^{ij} = \delta^{ij} - \frac{1}{n+1}$. Теперь посмотрим, как в этих координатах выглядит метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle da_i, da_j \rangle = \sum_{a=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \xi_a} \frac{\partial a_j}{\partial \xi_a} - \frac{1}{n+1} \sum_{a=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \xi_a} \sum_{a=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \xi_b}.$$

Введем обозначение $d\lambda(p) = p^{n-1}da_1 + \dots + da_n$. Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что:

$$\langle d\lambda(p), d\lambda(p) \rangle = \frac{\lambda(p)\lambda'(q) - \lambda(q)\lambda'(p)}{p - q} - \frac{1}{n+1}\lambda'(p)\lambda'(q).$$

Это метрика g^{ij} , теперь надо посчитать метрику Саито. Единица в наших обозначениях — это $e = \frac{\partial}{\partial a_n}$. Откуда метрика Саито выражается следующим образом

$$(d\lambda(p), d\lambda(q)) = \frac{\lambda'(q) - \lambda'(p)}{p - q}.$$

Остается только восстановить структуру фробениусова многообразия, то есть обратить метрику Саито и ввести умножение. Можно считать, что M есть пространство полиномов вида $\lambda(p) = p^{n+1} + a_1p^{n-1} + \dots + a_n$. Пусть $\partial', \partial'' \in T_{\lambda(p)}M$, тогда $\partial'\lambda(p), \partial''\lambda(p)$ — это полиномы степени не выше $n - 1$. Тогда

$$(\partial', \partial'')_{\lambda(p)} = \operatorname{res}_{p=\infty} \frac{\partial'\lambda(p)\partial''\lambda(p)}{\frac{d\lambda(p)}{dp}} dp.$$

Структура алгебры задается изоморфизмом $T_{\lambda(p)} \cong \mathbb{C}[p]/(\frac{d\lambda(p)}{dp})$.

В этой науке имеется еще много открытых вопросов, например, проблема отыскания алгебраических решений уравнения ассоциативности. Было бы также интересно понять, можно ли какой-либо конструкцией, сходной с рассмотренной выше, получить решение Концевича-Манина.

Аналитическая теория разностных уравнений

И. М. Кричевер

Лекция 1

Рассмотрим следующее матричное дифференциальное уравнение.

$$\Phi_z(z) = A(z) \cdot \Phi(z), \text{ где } A(z) = \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{z - z_i}, u_i \in \mathbf{GL}_n. \quad (1)$$

Аналитическая теория уравнений данного вида была в центре математики в первой половине XX века. С этой наукой связаны такие выдающиеся имена, как Шлезингер, Гарнье, Племель, Сохоцкий, Риччи и Гильберт. Интерес к данному уравнению связан с 21-ой проблемой Гильберта.

Уравнение (1) — это обыкновенное дифференциальное уравнение, имеющее единственное решение при начальных условиях $(z_0, \Phi(z_0))$, где $z_0 \neq z_i$ при $i = 1 \dots n$. Это уравнение можно интегрировать вдоль любого пути $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, не проходящего через полюса z_i . При этом $\Phi(z)$ зависит от выбора пути γ , соединяющего z_0 с z . В частности, для замкнутого пути γ такого, что $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$, решение $\Phi(\gamma(1))$, полученное в результате продолжения, может отличаться от начального решения $\Phi(z_0) = \Phi(\gamma(0))$.

Тем самым, можно считать, что $\Phi(z)$ является многозначной функцией от z . Новое решение получается из начального домножением на некоторую постоянную матрицу M_γ , которая называется *матрицей монодромии* (монодромия — это представление $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_i\}) \rightarrow \mathbf{GL}_n$):

$$\Phi(z_0) \xrightarrow{\gamma} \Phi(z_0) \cdot M_\gamma. \quad (2)$$

Положим $z_0 = \infty$. Рассмотрим замкнутые пути $\gamma_i(t)$, такие что $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = z_0$ и каждый путь обходит ровно один полюс z_i . Тогда этим путям соответствуют базисные матрицы монодромии $M_i = M_{\gamma_i}$.

Тем самым мы имеем соответствие:

$$(u_i, z_i) \rightarrow M_i. \quad (3)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$\sum_{i=1}^N u_i = 0, \quad (4)$$

т.е. в окрестности $z_0 = \infty$ выполнено $A(z) = O(z^{-2})$. Это соответствует тому, что вычет $A(z)$ в точке $z_0 = \infty$ равен 0. Условие (4) также эквивалентно тому, что $M_N \cdot M_{N-1} \cdot \dots \cdot M_1 = 1$.

21-ая проблема Гильберта. *Является ли соответствие (3) взаимно-однозначным?*

В дальнейшем мы утвердительно ответим на этот вопрос в случае, когда все матрицы M_i близки к единичным по матричной норме.

В 1908 году Племель ошибочно доказал, что ответ утвердительный. В 1970-х Ю.С.Ильяшенко обнаружил ошибку в доказательстве Племеня. В 1989 году А.А.Болибрух построил контрпример. Однако, в случае *общего положения* ответ, действительно, положительный. Например, если хотя бы одна из матриц M_i диагонализуема, то матрицы монодромии M_i однозначно определяют u_i .

При попытке решения данной проблемы Шлезингер построил теорию *изомонодромных деформаций* (1910-е годы). Она заключается в следующем. Допустим, что возможно по заданному набору матриц монодромии и полюсов (M_i, z_i) восстановить u_i . Тогда возникает следующий естественный вопрос.

Как будет меняться набор u_i в зависимости от набора полюсов z_i при фиксированном наборе матриц монодромии?

Возможно, что при подходящем расположении полюсов обратная задача упростится.

В данном случае решение $\Phi(z)$ уравнения (1) зависит от z_i .

Предложение 1. $(\partial_{z_i})\Phi \cdot \Phi^{-1}$ — однозначная функция от z .

Доказательство. Функция $(\partial_{z_i})\Phi \cdot \Phi^{-1}$ инвариантна относительно умножения матрицы $\Phi(z)$ справа на произвольную постоянную матрицу $M_\gamma \in \mathbf{GL}_n$. $\square$

Лемма 1. $(\partial_{z_i})\Phi = -\frac{u_i}{z-z_i} \cdot \Phi$.

Рассмотрим два оператора $\partial_{z_i} + \frac{u_i}{z-z_i}$ и $\partial_z - \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{z-z_i}$. Из уравнения (1) мы имеем, что $(\partial_z - \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{z-z_i})\Phi = 0$. Утверждение леммы эквивалентно тому, что $(\partial_{z_i} + \frac{u_i}{z-z_i})\Phi = 0$. Знаем, что коммутатор $[\partial_{z_i} + \frac{u_i}{z-z_i}, \partial_z - \sum_{i=1}^N \frac{u_i}{z-z_i}] = 0$.

Из уравнений

$$\left[\partial_{z_i}, \sum_{j=1}^N \frac{u_j}{z-z_j} \right] = \sum_{j=1}^N \frac{\partial_{z_i} u_j}{z-z_j} + \frac{u_i}{(z-z_i)^2},$$

$$\left[\partial_z, \frac{u_i}{z-z_i} \right] = -\frac{u_i}{(z-z_i)^2},$$

$$\left[\frac{u_i}{z-z_i}, \sum_{j=1}^N \frac{u_j}{z-z_j} \right] = \sum_{j=1}^N \frac{[u_i, u_j]}{(z-z_i) \cdot (z-z_j)}.$$

получаем следующие *изомонодромные уравнения Шлезингера*:

$$\begin{cases} \partial_{z_i} u_j = \frac{[u_j, u_i]}{z_j - z_i} \text{ при } j \neq i \\ \partial_{z_i} u_i = - \sum_{j \neq i} \frac{[u_j, u_i]}{z_j - z_i}. \end{cases} \quad (5)$$

Замечание 1. Изомонодромные уравнения связаны с уравнениями Пенлеве, которые имеют очень большое число приложений.

Рассмотрим теперь обобщение уравнения (1) на случай иррегулярных особенностей.

$$\Phi_z(z) = A(z) \cdot \Phi(z), \text{ где } A(z) = \sum_{i=1}^N \sum_{s=1}^{h_i} \frac{u_{i,s}}{(z - z_i)^s}, u_i \in \mathbf{GL}_n. \quad (6)$$

В общем случае восстановить $u_{i,s}$ по заданному набору матриц монодромии и полюсов нельзя, поскольку число неизвестных $u_{i,s}$ равно $\sum_{i=1}^N h_i$, что больше N , если хотя бы одно из h_i больше 1.

Лемма 2. Пусть $\tilde{A}(z) = \sum_{s=-h}^{+\infty} u_s \cdot z^{s-1}$, причём старший коэффициент u_{-h} диагонализуем, т.е. существует $\phi: u_{-h} = \phi \cdot K \cdot \phi^{-1}$, где $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Кроме того, пусть выполнены следующие условия

$$\begin{cases} k_i - k_j \neq 0, \text{ если } h > 1, \\ k_i - k_j \notin \mathbb{Z}, \text{ если } h = 1. \end{cases}$$

Тогда существует единственное формальное решение $\tilde{\Phi}$ уравнения (1), причём

$$\tilde{\Phi} = \phi \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \cdot z^{-s} \right) \cdot \exp \left(\sum_{s=-h}^{+\infty} K_s \cdot \int z^{s-1} dz \right),$$

где K_s — диагональные, $K_{-h} = K$, ξ_s — набор матриц, $\xi_s^{i,i} = 0$, $\int z^{s-1} dz$ — первообразная.

Замечание 2. Под формальным решением мы предполагаем формальный ряд, почленное дифференцирование которого, удовлетворяет уравнению (1).

Идея доказательства. Продифференцируем $\tilde{\Phi}$ по z .

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_z = & \phi \cdot \left(\sum_{s=1}^{+\infty} (-s) \cdot \xi_s \cdot z^{-s-1} \right) \cdot \exp(\dots) + \phi \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \cdot z^{-s} \right) \cdot \\ & \cdot \left(\sum_{s=-h}^{+\infty} K_s \cdot z^{s-1} \cdot \exp(\dots) \right). \end{aligned}$$

Нужно доказать, что это выражение равно

$$\left(\sum_{s=-h}^{+\infty} u_s \cdot z^{s-1} \right) \cdot \phi \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \cdot z^{-s} \right) \cdot \exp(\dots).$$

Таким образом, нужно показать, что

$$\begin{aligned} \phi \cdot \left(\sum_{s=1}^{+\infty} (-s) \cdot \xi_s \cdot z^{-s-1} \right) + \phi \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \cdot z^{-s} \right) \cdot \left(\sum_{s=-h}^{+\infty} K_s \cdot z^{s-1} \right) = \\ = \left(\sum_{s=-h}^{+\infty} u_s \cdot z^{s-1} \right) \cdot \phi \cdot \left(1 + \sum_{s=1}^{+\infty} \xi_s \cdot z^{-s} \right). \end{aligned}$$

Коэффициенты при старшей степени z^{-h-1} в этих выражениях равны $\phi \cdot K_{-h}$ и $u_{-h} \cdot \phi$. Их равенство следует из условия. Коэффициенты при остальных степенях определяются рекуррентным соотношением. Для $h > 0$ они равны

$$K_s + [K, \xi_{s+h}] = R(\xi_1, \dots, \xi_{s+h-1}, K_{-h+1}, \dots, K_{s-1}),$$

где R — известная функция, задающая рекуррентное соотношение и $s = -h, \dots, +\infty$. Далее необходимо провести соответствующие выкладки. (Из этого соотношения находятся недиагональные элементы матрицы $\xi_{s+h}^{i,j}$, используя то, что K — диагональная. Её диагональные элементы равны 0 по условию.)

Сформулируем без доказательства следующий факт.

Теорема 1 (Sibuya, 1960-e). *Пусть $\tilde{A}$ — лорановский ряд аналитической функции в проколотой окрестности U точки 0. Пусть V — это сектор, в котором для $\forall i, j$ существует только один луч такой, что*

$$\operatorname{Re}(K_i - K_j) \cdot z^{-h} = 0.$$

Тогда существует решение ψ в V уравнения $\psi_z = \tilde{A} \cdot \psi$ такое, что $\psi \sim \tilde{\Phi}$. Т.е. $(1 - \psi \cdot (\tilde{\Phi}_N)^{-1}) = O(z^{-N})$.

Для $\forall h$ существует набор секторов $V_1, V_2, \dots, V_{2h+1}$, такой что в каждом секторе выполнены условия теоремы и $V_\nu \cap V_{\nu+1} \neq \emptyset$. Пусть ψ_ν — решение, соответствующее сектору V_ν . Поскольку ψ_ν и $\psi_{\nu+1}$ — решения одного уравнения, то в $V_\nu \cap V_{\nu+1}$ выполнено $\psi_{\nu+1} = \psi_\nu \cdot S_\nu$, где S_ν — некоторая постоянная матрица.

Определение 1. Матрицы S_ν называются *матрицами Стокса*.

Локальная матрица монодромии μ при этом равна $S_{2h+1} \cdot \dots \cdot S_1$. Отметим, что $S_\nu^{i,j} > 0$, если $\operatorname{Re}(K_i - K_j) \cdot z^{-h} \geq 0$ в $V_\nu \cap V_{\nu+1}$.

Рассмотрим случай регулярных особенностей, когда $h = 0$. Пусть теперь у нас имеется несколько регулярных полюсов z_i . В этом случае имеем ровно один сектор с разрезом для каждого полюса. В окрестности каждого полюса имеем $\tilde{\Phi} = \phi_i \cdot (z - z_i)^{K_0^i}$. Лорановский ряд в окрестности каждой точки равен $\tilde{A} = \frac{u_i}{z - z_i} + \dots$, причём старший коэффициент диагонализуем: $u_i = \phi_i \cdot K_0^i \cdot \phi_i^{-1}$.

Через μ_i мы будем обозначать локальные матрицы монодромии, соответствующие обходу вокруг z_i . Тогда $\mu_i = e^{2\pi \cdot \sqrt{-1} \cdot K_0^i}$.

Для того, чтобы найти базисные матрицы монодромии M_i (соответствующие пути из $z_0 = \infty$) необходимо задать матрицы связи G_i , с помощью которых выразим M_i : $M_i = G^{-1} \cdot \mu_i \cdot G$.

Определение 2. Полным набором данных монодромии называется набор (G_i, K_s^i, S_ν) , где $s = -h, \dots, 0$.

Полный набор данных монодромии однозначно определяет набор $\{u_i\}$.

Для случая иррегулярных особенностей справедлива следующая лемма.

Лемма 3. При $h > 0$ имеем: $(\partial_{z_i})\Phi \cdot \Phi^{-1} = \sum_{s=1}^{h_i} \frac{v_{i,s}}{(z-z_i)^s}$.

В заключение приведём пример изомонодромных уравнений, которым соответствует уравнение Пенлеве.

Пример 1. Пусть $\tilde{A} = \alpha \cdot z^2 + \beta \cdot z + \gamma + \delta \cdot z^{-1}$. Тогда изомонодромные уравнения эквивалентны уравнению Пенлеве-II:

$$u_{xx} - x \cdot u - 2u^3 = v$$

.

Лекция 2

В этой лекции мы будем рассматривать разностный аналог уравнения (1) лекции 1.

$$\Psi(z+1) = A(z) \cdot \Psi(z), \text{ где } A(z) = A_0 + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{z - z_i}, A_i \in \mathbf{GL}_n. \quad (7)$$

Замечание 3. Если в уравнении (1) лекции 1 заменить $\Phi(z)$ и $\Phi_z(z)$ на $\Psi(z)$ и $\Psi(z+1) - \Psi(z)$, то получится уравнение (1) с $A_0 = 1$.

Заметим, что для произвольной постоянной матрицы $g \in \mathbf{GL}_n$ и $\tilde{A} = g \cdot A \cdot g^{-1}$ новое решение $\tilde{\Psi} = g \cdot \Psi$. Поэтому можно считать, что A_0 — диагональная (мы предполагаем, что старший член A_0 диагонализуем). Пусть $A_0 = \text{diag}(p_i)$. Будем предполагать также, что $p_i \neq p_j$ и $p_i - p_j \notin \mathbb{Z}$. Будем предполагать, что $\text{tr}(\sum_{i=0}^N A_i) = 0$.

Теория данных уравнений восходит к Birkhoff (1911-13-е года). Уравнения данного типа называется

regular, если $A_0 = 1$;

singular regular, если A_0 диагонализуема;

mild singular, если A_0 невырождена.

Лемма 4. Формальное решение уравнения (1) в окрестности $z_0 = \infty$ имеет вид $Y = (1 + \sum_1^\infty \chi_s \cdot z^{-s}) \cdot A_0^z \cdot z^K$, где $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$.

Доказательство. Правая часть уравнения (1) в этом случае равна (разложение в окрестности $z_0 = \infty$)

$$(A_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots) \cdot \left(1 + \sum_1^\infty \chi_s \cdot z^{-s}\right) \cdot A_0^z \cdot z^K.$$

Это выражение нужно сравнить с левой частью

$$\left(1 + \sum_1^\infty \chi_s \cdot (z+1)^{-s}\right) \cdot A_0 \cdot \left(\frac{z+1}{z}\right)^k \cdot A_0^z \cdot z^k.$$

После сокращения на одинаковые правые сомножители, мы должны сравнить два выражения:

$$(A_0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots) \cdot \left(1 + \sum_1^\infty \chi_s \cdot z^{-s}\right) \text{ и}$$

$$\left(1 + \sum_1^{\infty} \chi_s \cdot (z+1)^{-s}\right) \cdot A_0 \cdot \left(\frac{z+1}{z}\right)^k.$$

Коэффициент при z^0 для этих выражений равен A_0 . Посмотрим, какие условия нужно наложить на K и χ_s , чтобы совпали коэффициенты при остальных степенях. Для z^{-1} имеем

$$A_0 \cdot \chi_1 + a_1 = \chi_1 \cdot A_0 + A_0 \cdot K,$$

или

$$[A_0, \chi_1] = A_0 \cdot K - a_1.$$

Данное условие определяет K и χ_1 . Тогда K равняется диагональной части матрицы $A_0^{-1} \cdot a_1$. Далее χ_s определяются рекуррентно. $\square$

Теорема 2 (Birkhoff). *Уравнение*

$$\Psi(z+1) = A(z) \cdot \Psi(z)$$

имеет два решения Ψ_r, Ψ_l , первое из которых голоморфно в области $\operatorname{Re}(z) \gg 1$, а второе — в области $\operatorname{Re}(z) \ll 1$, такие что $\Psi_r \sim Y$ и $\Psi_l \sim Y$.

Введём матрицу $S(z) = \Psi_l \cdot \Psi_r^{-1}$. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений $S(z)$ — постоянная матрица. В случае разностных уравнений мы имеем

$$S(z+1) = S(z).$$

Теорема 3 (Birkhoff). *$S(z)$ — рациональная функция от выражения $e^{2\pi iz}$.*

Число параметров этой функции равно числу параметров в коэффициентах A . В общем положении (если $\operatorname{Im}(\frac{p_i}{p_j}) \neq 0$) соответствие

$$(A_0, A_i, z_i) \rightarrow S(z)$$

является взаимно-однозначным.

Для разностных уравнений возникает естественный вопрос о изо-
модромных деформациях. Ответ даётся следующей теоремой.

Теорема 4 (Birkhoff). *$\tilde{A}$ определяет те же данные монодромии $S(z)$, если существует рациональная матрица $R(z)$, т.ч. $\tilde{A}(z) = R(z+1) \cdot A(z) \cdot R^{-1}(z)$.*

Явные формулы для формальных решений разностного уравнения выглядят следующим образом:

$$\psi_l = \prod_{m=0}^{+\infty} A^{-1}(z+m) = A^{-1}(z) \cdot A^{-1}(z+1) \cdot \dots,$$

$$\psi_r = \prod_{m=0}^{+\infty} A(z-m) = A(z-1) \cdot A(z-2) \cdot \dots$$

В общем случае эти произведения расходятся. Данные произведения сходятся, если $A_0 = 1$ и вычет в бесконечности $a_1 = 0$.

К сожалению, теория, созданная Биркгофом, не даёт ответа на вопрос о том, как связать матрицы $S(z)$, возникающие в разностных уравнениях, с матрицами монодромии в непрерывном случае. В пределе они не сходятся к матрицам монодромии обычных дифференциальных уравнений.

Существует альтернативный подход. Будем считать, что $\text{Im}(p_i) = 0$.

Задача Римана-Гильберта. *Найти голоморфную функцию $\Phi_x(z)$ в полосе $\Pi_x = \{z | x < \text{Re}(z) < x+1\}$, непрерывную в $\bar{\Pi}_x$, такую что*

$$\Phi_x(\xi+1) = A(\xi) \cdot \Phi_x(\xi) \text{ при } \text{Re}(\xi) = x. \quad (8)$$

$$|\Phi(z)| \leq |z|^n \text{ при } |\text{Im}(z)| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Замечание 4. Условие (9) нужно для того, чтобы убрать свободу умножения на $e^{2\pi iz}$. Функция Φ_x определяет мероморфное решение $\psi_x(z)$ исходной задачи.

Рассмотрим конформное отображение $\bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, определённое формулой

$$w(z) = \frac{e^{2\pi iz} - 1}{e^{2\pi iz} + 1},$$

при котором полоса Π_x отображается во внешность отрезка $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Теперь нам нужно найти $\tilde{\Phi}(z)$, голоморфную в $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, которая непрерывно продолжается на разрез:

$$\tilde{\Phi}^+(w) = \tilde{A}(w) \cdot \tilde{\Phi}^-(w).$$

Данная постановка является стандартной. Сформулируем теперь более общую задачу.

Задача Римана–Гильберта для замкнутого контура. Пусть дан контур L , на котором задано семейство матриц $M(t)$, $t \in L$. Найти голоморфные функции Φ^+ и Φ^- в областях D^+ и D^- , разделяемых контуром L , такие что их граничные значения связаны соотношением

$$\Phi^+ = \Phi^- \cdot M. \quad (10)$$

Из соотношения (4) получаем, что

$$\oint \ln \det \Phi^+ = \oint \ln \det \Phi^- + \oint \ln \det M. \quad (11)$$

Определение 3. Величина $\frac{1}{2\pi i} \oint \ln \det M = \text{index } M$ называется *препятствием*.

Из уравнения (5) получаем, что если $\text{index } M \neq 0$, то задача Римана–Гильберта не имеет решения. В действительности в предположении близости M к 1 (в этом случае $\text{index } M = 0$) эта задача

имеет единственное с точностью до умножения на постоянную матрицу решение (обычно выбирают нормировку $\Phi(\infty) = 1$, которая однозначно определяет решение).

Рассмотрим сначала абелев случай $n=1$. В этом случае Φ и M — скалярные функции. Мы имеем, что

$$\text{Ln } \Phi^+ = \text{Ln } \Phi^- + \text{Ln } M.$$

Решение записывается интегралом Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{m(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Тогда функция $\Phi(z)$ — голоморфная вне контура L . Функция Φ продолжается по непрерывности на контур и

$$\Phi^\pm = \pm \frac{m(z)}{2} + \frac{1}{2\pi i} v.p. \oint \frac{m(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Тогда имеем

$$\Phi^+ - \Phi^- = m(z).$$

В общем случае ищем $\Phi(z)$ в виде

$$\Phi(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} v.p. \oint \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Будем обозначать $\frac{1}{2\pi i} v.p. \oint \frac{g(\xi) d\xi}{\xi - z}$ через I_g .

Уравнение $\Phi^+ = \Phi^- \cdot M$ эквивалентно следующему

$$1 + \frac{g}{2} + I_g = (1 - \frac{g}{2} + I_g) \cdot M,$$

откуда

$$\frac{g}{2} \cdot (M + 1) = (M - 1) \cdot I_g + (M - 1). \quad (12)$$

Предположим, что $||M - 1|| \leq \varepsilon$. Будем решать уравнение (6) методом приближений. Определим последовательность g_k .

$$g_{k+1} \cdot \frac{(M+1)}{2} = \frac{M-1}{2\pi i} v.p. \oint \frac{g_k(\xi)}{\xi - z} d\xi + (M-1).$$

Ясно, что $\frac{(M+1)}{2}$ — обратимая матрица. Поэтому, g_{k+1} определяется из g_k . Заметим, что

$$(g_{k+1} - g_k) \cdot \frac{M+1}{2} = \frac{M-1}{2\pi i} v.p. \oint \frac{(g_k - g_{k-1})}{\xi - z} d\xi,$$

откуда

$$|g_{k+1} - g_k| \leq C \cdot \varepsilon \cdot |g_k - g_{k-1}|.$$

Тогда ряд

$$g = \sum (g_{k+1} - g_k)$$

сходится к искомой функции. Тем самым, мы решили задачу Римана–Гильберта.

Вернёмся к задаче Римана–Гильберта о поиске Φ_x .

Предложение 2. 1) Для $x \gg 1$ ($x \ll 1$) решение Φ_x всегда существует, причём

$$\Phi_x(z) \sim Y \cdot g_x^\pm, \text{ где } g_x^\pm \text{ — постоянные матрицы;}$$

2) для почти всех x решение Φ_x существует для матриц общего положения.

Пусть теперь имеются две непересекающиеся полосы Π_x и $\Pi_{x'}$ и полюс z_i между ними. Пусть ψ_x и $\psi_{x'}$ — соответствующие решения. Назовём матрицу $M_i = \psi_x^{-1} \cdot \psi_{x'}$ матрицей локальной монодромии.

Предложение 3. Матрицы локальной монодромии имеют следующий вид

$$M_k = \left(1 - \frac{m_k}{e^{2\pi i(z-z_k)}} \right).$$

Кроме того,

$$S(z) = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots$$

Пусть $\mu_k = 1 + m_k$. Тогда если заменить в определении разностного уравнения $\Psi(z+1)$ на $\Psi(z+h)$ и устремить h к 0, то μ_k будут стремиться к матрицам монодромии M_k .

Мы описали теорию регулярных особенностей, а построение аналитической теории иррегулярных особенностей представляет самостоятельный научный интерес.

Интегрируемая контурная динамика на комплексной ПЛОСКОСТИ

М. Б. Минеев-Вайнштейн

Лекция 1.

Имеется следующая задача:

Задача. Представим себе черный остров в белом океане. Океан — это $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$, остров — односвязная конечная область $D_+ \in \mathbb{R}^n$. (Тогда, более точно, океан — это дополнение к D_+ в $\mathbb{R}^n$, т.е. $D_- = \mathbb{R}^n \setminus D_+$)

Пусть $V_n(\xi)$ — нормальная скорость границы этого острова $\Gamma = \partial D_+$ в точке $\xi \in \Gamma$, и $G(r, a)$ — функция Грина оператора Лапласа для области D_- с единичным источником в точке $a \in D_-$, т.е.

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(r, a) &= \delta(r - a), \text{ при } r, a \in D_-, \\ G(\xi, a) &= 0, \text{ при } \xi \in \Gamma.\end{aligned}$$

Тогда закон движения острова записывается в следующем виде:

$$V_n(\xi) = \partial_n G(\xi, a), \quad \xi \in \Gamma, \quad (1)$$

где $\partial_n G(\xi, a)$ — нормальная производная функции Грина. Известно начальное условие — положение острова D_+ в момент времени $t = 0$. Задача состоит в том, чтобы найти положение острова для любого $t > 0$. Это — задача Коши: найти решение динамической системы по начальным данным при произвольном (положительном) времени.

Отметим что эта задача нелинейна. Это видно хотя бы из того, что дифференцируя равенство $G(\xi, a) = 0$ по времени на границе Γ , мы получаем нелинейное уравнение в частных производных, а именно,

$$\frac{dG}{dt} \stackrel{(a)}{=} \frac{\partial G}{\partial t} + (V, \nabla G) \stackrel{(b)}{=} \frac{\partial G}{\partial t} + |\nabla G|^2 = 0. \quad (2)$$

Здесь равенство (a) очевидно, а равенство (b) следует из закона движения (1). Существует много (не меньше 7) фундаментальных нелинейных процессов в совершенно различных областях физики, которые (после некоторой идеализации) сводятся к движению области D_+ в $\mathbb{R}^n$ и описываются уравнением (1). Упомянем три из них:

1. Затвердевание жидкости при температуре ниже точки плавления. Например, ванна с водой охладилась ниже нуля градусов Цельсия, и в ней образовался небольшой кусочек льда. Он будет нашим островом D_+ . И его рост будет описываться уравнением (1), а D_- — это будет вода, окружающая остров. Функция Грина G — это температура воды.
2. Движение жидкости с малой вязкостью (например воды) внутри жидкости с большой вязкостью (например масла или нефти) описывается этим же законом (1). Здесь область D_+ — это не вязкая жидкость, D_- — вязкая, а функция Грина $G(r, a)$ — это давление вязкой жидкости с источником в точке a .
3. Рост бактерий в питательном растворе. Тут D_+ — это колония бактерий, D_- — область, занятая раствором, и функция Грина G — концентрация питательного вещества в этом растворе.

Кроме того, уравнение (1) есть непрерывный детерминированный предел следующей задачи на решетке. Рассмотрим достаточно большую, но конечную двумерную квадратную решетку. Отметим чер-

ным один из квадратов этой решетки. На границе этой решетки случайным образом породим еще одну черную клетку. Позволим ей с 25-процентной вероятностью прыгать на север, юг, запад и восток. Если клетка после некоторого количества таких прыжков становится одним из ближайших (четырех) соседей первой клетки, то она приклеивается, после чего рождается новая клетка на границе и движется по плоскости по тем же правилам что и предыдущая. Когда эта клетка становится соседней с парой заштрихованных клеток, мы приклеиваем ее также и порождаем четвертую клетку таким же случайным образом и так далее. Если же клетка попадает на границу области, то мы убиваем ее и порождаем новую черную клетку на границе и процесс повторяется. После нескольких тысяч таких итераций мы получим сложное черное дерево, напоминающее фрактал. Более того — это и есть фрактал, причем едва ли не самый фундаментальный и распространенный в природе. Этот геометрический объект обладает интересным свойством: его хаусдорфова размерность — универсальное число, не зависящее от конкретного конечного положения заштрихованных квадратиков. Мы можем повторять этот процесс

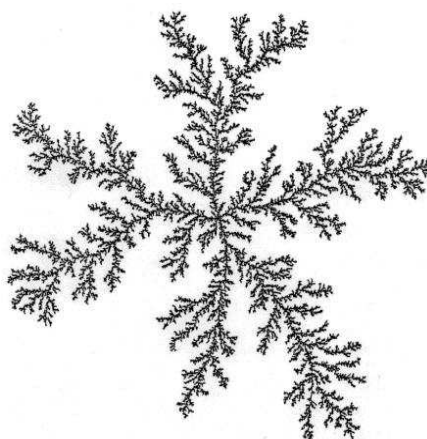


Рис. 1: Черное дерево.

роста фрактального дерева вновь и вновь и получать всякий раз разные деревья, но с одной и той же фрактальной (хаусдорфовой) размерностью.

Определение 1. Пусть B — подмножество евклидова пространства. Для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $N_\varepsilon(B)$ мощность минимального покрытия множества B кубиками с ребром ε . Тогда хаусдорфова размерность $D_H(B)$ множества B определяется следующей формулой:

$$D_H(B) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(B)}{\ln \varepsilon}.$$

Отметим очевидные факты, что хаусдорфова размерность квадрата и круга равна двойке, шара — тройке. Однако хаусдорфова размерность фрактальных множеств не является целым числом (откуда и этимология слова фрактал). Так вот, в результате только что описанного численного эксперимента было получено, что хаусдорфова размерность этих черных фрактальных деревьев равна $1.71 \pm .01$. Весьма примечательно то, что это число, равное $1.71 \pm .01$, которое называется фрактальной размерностью DLA (Diffusion-limited aggregation), является универсальным, то есть не зависит ни от конечного положения черных клеток, ни от типа решетки (тот же результат, т.е. $1.71 \pm .01$, получается и на треугольной, и на шестиугольной решетках, и даже без решетки, когда диффундируют маленькие кружочки и приклеиваются при касании периметра кластера), ни от случайности, заложенной в их поведение. Поэтому хотелось бы подсчитать это число, но никому пока это еще не удалось, хотя число работ по этой теме давно исчисляется тысячами.

Покажем, что непрерывный предел задачи, описывающей эволюцию черных деревьев, совпадает с уравнением (1) в двумерном случае, где теперь $G(x, y, t)$ — вероятность того, что черная клетка окажется в точке с координатами (x, y) в момент времени t . Действительно, условие на вероятность записывается в виде разностного

уравнения:

$$G(x, y, t + 1) = \frac{1}{4}(G(x + \delta, y, t) + G(x - \delta, y, t) + G(x, y + \delta, t) + G(x, y - \delta, t)),$$

где δ — шаг сетки. Вычитая из правой и левой части этого уравнения $G(x, y, t)$, получаем

$$G(x, y, t+1) - G(x, y, t) = \frac{1}{4}((G(x+\delta, y, t) - 2G(x, y, t) + G(x-\delta, y, t)) + (G(x, y + \delta, t) - 2G(x, y, t) + G(x, y - \delta, t))),$$

которое, как легко видеть, является разностной схемой для уравнения диффузии, $G_t = \nabla^2 G$. Будем предполагать, что по сравнению с блужданиями черных квадратов, граница черного дерева движется очень медленно (квазистационарные решения). Тогда уравнение диффузии превращается в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 G(r, a) = 0.$$

Не забудем про граничное условие: вероятность того, что черная клетка попадет на границу черного дерева равна нулю

$$G(\xi, a) = 0 \text{ при } \xi \text{ на границе.}$$

Есть еще одна причина, почему задача об эволюции острова интересна с точки зрения физики. Дело в том, что граница развивается неустойчиво. Если в качестве начальной области взять круг или шар, то он довольно скоро превращается в довольно сложное дерево, напоминающее фрактал. Действительно, как легко видеть из уравнения (1), скорость границы тем больше, чем больше плотность эквипотенциальных линий, если G рассматривается как потенциал.

Из электростатики известно, что электрическое поле, то есть градиент электрического потенциала, наиболее сильное вблизи острых выпуклых фрагментов границы (на этом принципе построены громоотводы). Поэтому, более выпуклые участки поверхности растут быстрее, чем более плоские, и, тем более, вогнутые фрагменты границы, вот почему граница неустойчива. Задача приводит к богатым геометрическим формам, которые можно наблюдать после того как короткое потепление зимой сменяется быстрым похолоданием. Тогда на окне образуются сталактиты, сталагмиты и папоротники. Это все из-за этого.

Имеется интересный и сильный факт. Наша задача (1) имеет бесконечное число законов сохранения, нелинейная неустойчивая задача имеет бесконечное число законов сохранения (что совершенно удивительно, учитывая нелинейность и неустойчивость движения границы). Поговорим об этом подробно. Пусть h — произвольная гармоническая функция. Интеграл от этой функции по области D_- обозначим через $C[h]$. Я берусь доказать в три строчки

Утверждение 1. *Если область D_- эволюционирует согласно закону (1), то*

$$\frac{dC[h]}{dt} = h(a),$$

где a — особая точка функции Грина.

Доказательство. Утверждение теоремы получается из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \frac{dC[h]}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \cdot \left(\int_{D_-(t+dt)} h dV - \int_{D_-(t)} h dV \right) \stackrel{(a)}{=} \oint_{\partial D_-} h V_n dS \stackrel{(b)}{=} \\ &= \oint_{\partial D_-} h \partial_n G dS \stackrel{(c)}{=} \oint_{\partial D_-} (h \partial_n G - G \partial_n h) dS = \oint_{\partial D_-} (h \nabla G - G \nabla h)_n dS \stackrel{(d)}{=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{D_-} (h \nabla^2 G - G \nabla^2 h) dV \stackrel{(e)}{=} \int_{D_-} (h \nabla^2 G) dV = \int_{D_-} (h(x) \delta(x - a)) dV = \\
&= h(a),
\end{aligned}$$

где равенство (b) следует из уравнения (1), равенство (c) вытекает из того, что функция Грина обнуляется на границе области, равенство (d) — это формула Гаусса-Остроградского, а равенство (e) следует из гармоничности функции h . $\square$

Следствие 1. Если $h(a) = 0$, (например если $a = \infty$, а $h \neq \text{const}$) то $C[h]$ — первый интеграл уравнения (1).

Следствие 2. Объем V области D_+ эволюционирует по следующему закону:

$$V(t) = t + V_0,$$

где V_0 — объем области D_+ в начальный момент времени.

С этого момента будем рассматривать только двумерную задачу. Пусть D_+ — односвязная область в $\mathbb{C}$ с координатой z . Рассмотрим конформное отображение $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, переводящее внешность единичного круга на область D_- , причем $\infty \mapsto \infty$. Обозначим координату на области определения F через w . Тогда отображение F имеет вид

$$F(w) = rw + \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{-k}.$$

Договоримся, что $F'(\infty) = r > 0$. Наша цель — переписать уравнение (1) в терминах отображения $F = F(w, t)$. Изначальная задача звучит так: дана граница в начальный момент времени, дан закон изменения границы — уравнение (1) — надо найти границу в произвольный момент времени t . Но в уравнение (1) граница входит

неявно, только через граничные условия на функцию Грина. Было бы хорошо переписать задачу в терминах отображения $F(w, t)$, тогда граница будет входить явно, поскольку уравнение границы имеет вид

$$z(\varphi, t) = F(e^{i\varphi}, t),$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$. Пусть $l = (l_1, l_2)$ и $n = (n_1, n_2)$ — единичные векторы соответственно касательной и внешней нормали к кривой $\Gamma = \partial D_-$. Мы будем рассматривать векторы V, n, l как комплексные числа. Тогда

$$V_n = n_1 V_1 + n_2 V_2 = V_1 l_2 - V_2 l_1 = \operatorname{Im}(\bar{V}l) = \operatorname{Im}(\bar{z}_t z_l) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, l)}, \quad (3)$$

где l — натуральный параметр на кривой Γ . Пусть G^* — функция, гармонически сопряженная к функции Грина G . Нетрудно показать, что $G^* = \varphi(F^{-1}(z))$, где φ — полярный угол на плоскости w . Положим $W = G + iG^*$. В самом деле, так как $G = \log |w|$ на плоскости с координатой w , то функция $\arg w = \varphi$ является гармонически сопряженной (по отношению к G) функцией. Функция W называется комплексной функцией Грина. В силу уравнения (1) и формулы Коши-Римана для голоморфной функции W получаем

$$V_n = \partial_n G = \partial_l G^* = \partial_l \varphi = \frac{\partial(t, \varphi)}{\partial(t, l)}.$$

Отсюда, используя (3), получаем

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, \varphi)} = 1,$$

или, что то же самое

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_t z_\varphi) = 1,$$

где $z = z(t, \varphi) = F(t, e^{i\varphi})$ — уравнение границы. Итак, мы переписали исходную задачу в терминах границы движущейся области:

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(\bar{z}_t z_\varphi) = 1 \\ z(0, \varphi) = z_0(\varphi) \end{cases} \quad (4)$$

Будем искать решение задачи (4) при некоторых начальных данных. Пусть сначала $F(w) = r_0 w$, для некоторого $r_0 > 0$. Будем искать подходящее конформное отображение в виде $F(t, w) = r(t)w$. Уравнения из (4) перепишутся в виде

$$\begin{cases} rr_t = 1 \\ z(0, \varphi) = r_0 e^{i\varphi} \end{cases}$$

Отсюда находим решение

$$z(t, \varphi) = \sqrt{2t + r_0^2} \cdot e^{i\varphi}.$$

Возьмем начальные условия потруднее, а именно

$$z_0(\varphi) = r_0 e^{i\varphi} + a_0 e^{i(1-n)\varphi},$$

где $r_0, a_0 > 0, n \in \mathbb{N}$. Т.е. мы хотим, чтобы вдоль окружности уложилось ровно n волн амплитуды a_0 . Будем искать решение в виде

$$z(t, \varphi) = r(t)e^{i\varphi} + a(t)e^{i(1-n)\varphi}.$$

Подставив это выражение в (4), получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений на функции $r(t)$, $a(t)$, которые легко поддаются интегрированию в квадратурах. В результате интегрирования этой системы получаем

$$\begin{cases} r^2 - (n-1)a^2 = t + r_0^2 - (n-1)a_0^2, \\ \frac{a}{a_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы видно, что при $n > 2$ степень отклонения кривой Γ от окружности S_r растет быстрее радиуса последней. Поэтому при таких n критические точки соответствующего конформного отображения, которые в силу симметрии лежат на лучах, отстоящих друг от друга на угол $\frac{2\pi}{n}$, движутся из центра окружности по этим лучам и за конечное время они одновременно (также в силу симметрии) достигают единичной окружности. В этот момент кривая Γ теряет аналитичность, т.к. на единичной окружности появляются критические точки. Возникают каспы. Если ввести декартовы координаты x, y в окрестности критических точек, то кривая Γ локально задается уравнением $y^2 = x^3$, т.е. особенности имеют вид полукубической параболы. Это значит, что хотя наша нелинейная за-

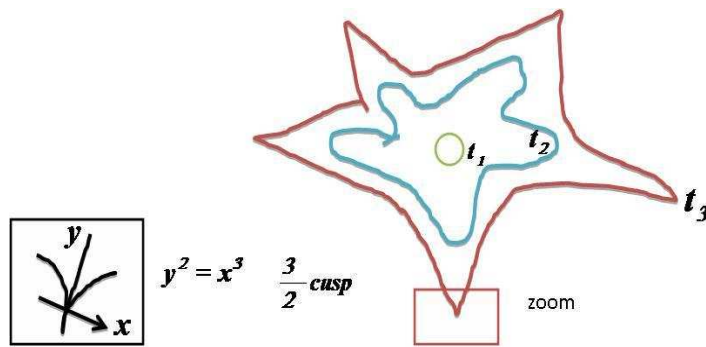


Рис. 2: Образование каспов.

дача (1) может точно решаться в простейших случаях, несмотря на нелинейность, что хорошо для математики, но для физики это плохо, что за конечное время образуются каспы. Это означает, что из-за неустойчивости задачи мы за довольно короткое время вынуждены прекратить исследования, поскольку достигнут предел применимости математической модели, поскольку в качестве решений рассматриваются только аналитические кривые. Можно формально продол-

жить решение на большие времена, тогда возникают нефизические самопересечения нашей кривой Γ .

Если рассмотреть более общий тригонометрический многочлен

$$z(t, \varphi) = r(t)e^{i\varphi} + \sum_{n=1}^N a_n(t)e^{i(1-n)\varphi},$$

с критическими точками внутри единичной окружности, то удивительно, что этот многочлен является точным решением задачи (4). И условие на то, что многочлен такого вида является решением задачи (4), записывается в виде системы, состоящей из $N + 1$ обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Эти уравнения точно решаются (в квадратурах). Тем самым тригонометрические многочлены являются решениями. Эти решения за конечное время также дают каспы. Наша же цель состоит в том, чтобы найти асимптотику решений на больших временах; значит, эти полиномиальные решения нам не подходят.

В чем состоит геометрическая и физическая интерпретация законов сохранения? Пусть $a = \infty$, тогда $C_n = \int_{D_-} z^{-n} dV$ являются законами сохранения для $n > 0$. Покажем, что C_n — это коэффициенты мультипольного разложения фиктивного ньютоновского потенциала, который создается материей, занимающей область D_- с плотностью 1. Действительно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{n-1} C_n = \int_{D_-} \frac{dV}{z - \zeta} = \nabla_{\zeta} \left(\int_{D_-} \ln |z - \zeta| dV \right).$$

Все моменты не зависят от времени, кроме нулевого. Нулевой момент — время. Представление в виде моментов — хорошее представление, оно должным образом линеаризует задачу. И наша следующая цель состоит в том, чтобы переписать задачу в этом виде. А для этого

нам надо ввести важное понятие функции Шварца гладкой плоской кривой без самопересечений.

Определение 2. Пусть аналитическая замкнутая простая кривая Γ задается с помощью уравнения:

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Перепишав это уравнение в комплексных координатах $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, получим формулу:

$$\Phi\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = F_C(z, \bar{z}) = 0,$$

которую можно локально решить:

$$\bar{z} = S_C(z),$$

для некоторой функции S_C . Эта функция и называется *функцией Шварца* кривой C .

Для вещественной прямой и единичной окружности с центром в начале координат функция Шварца, как легко видеть, имеет вид z и $1/z$ соответственно. Заметим также, что ни один многочлен не может быть функцией Шварца, кроме линейного. Это легко следует из того факта, что функция Шварца инволютивна:

$$z = \bar{S}(\bar{z}) = \bar{S}(S(z)).$$

Функция Шварца тривиально связана с конформным отображением:

$$S(z) = \bar{f}(1/f^{-1}(z)),$$

где f отображает единичный круг на плоскости на область, ограниченную кривой C . Отметим, что конформных отображений, которые переводят окрестность единичной окружности в окрестность

кривой, как хорошо известно, бесконечно много, а функция Шварца (для данной кривой) одна. Тем самым она является более инвариантным объектом, чем конформные отображения по отношению к кривой. Выясним связь функции Шварца с нашей задачей. Рассмотрим ньютоновский потенциал, созданный областью D с плотностью 1:

$$U(\xi) = \int_D \ln |z - \xi| dV,$$

а точнее его градиент (со знаком минус)

$$F(\xi) = -\nabla U = \int_D \frac{dV}{z - \xi} = \frac{1}{2i} \int_D \frac{dz \bar{d}z}{z - \xi}.$$

Применяя теорему Стокса, можно продолжить цепочку предыдущих равенств и получить

$$\frac{1}{2i} \int_D \frac{dz \bar{d}z}{z - \xi} = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \frac{\bar{z}(z) dz}{z - \xi} = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \frac{S(z) dz}{z - \xi} + \pi \bar{\xi} I_D(\xi),$$

где S — это функция Шварца границы области D , а I_D — характеристическая функция области D :

$$I_D(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \in D, \\ 0 & \text{при } \xi \notin D. \end{cases}$$

Разложим S в формальный ряд Лорана:

$$S = \sum_{-\infty}^{\infty} S_k z^k = S_- + S_+,$$

где $S_+ = \sum_0^{\infty} S_k z^k$, $S_- = \sum_{-\infty}^{-1} S_k z^k$. Тогда по интегральной теореме

Коши получаем

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \frac{S(z)dz}{z - \xi} = \pm \pi S_{\pm}(\xi).$$

(Знак выбирается в зависимости от того, где лежит точка ξ : снаружи или внутри области D). Если разложить функцию $\frac{1}{z-\xi}$ в ряд по неотрицательным степеням ξ , то интеграл

$$\int_D \frac{dV}{z - \xi}.$$

представляется в виде суммы степеней ξ с коэффициентами в виде моментов C_n . Значит S_k получают физическую интерпретацию: πS_k при $k \geq 0$ — это мультипольные коэффициенты внешней задачи потенциала, а при $k < 0$ — внутренней задачи. Эта задача переопределена: если $\bar{z} = S(z)$ — уравнение кривой C , то каждое из уравнений

$$x - \operatorname{Re} S(x, y) = 0, \quad y + \operatorname{Im} S(x, y) = 0$$

задает одну и ту же кривую Γ . Это также видно из инволютивности функции Шварца.

Напомним, что прямая задача потенциала состоит в следующем: дана область, заполненная веществом с известной плотностью, надо найти потенциал. Обратная задача потенциала — дан потенциал, например совокупность его моментов, надо найти такую односвязную гладкую область, заполненную веществом с плотностью 1, которая дает данный потенциал вдали от этой области. Как мы только что видели, наша задача — это обратная задача потенциала. Покажем, что эта задача нелинейна.

Пусть область звездная. Тогда граница записывается в виде $r = r(\varphi)$, ее-то и надо найти. Даны C_n . Напишем уравнения, выража-

ющие C_n через $r(\varphi)$:

$$C_n = \int_D z^{-n} dx dy = \int_D r^{1-n} e^{-in\varphi} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{r(\varphi)^{-n}}{n} e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Так как цель — найти $r(\varphi)$ по моментам C_n , а в последнюю формулу входят степени $r(\varphi)$, то мы получили, что задача нелинейна. Подведем итоги: в первоначальной постановке задачи (1) мы нашли первые интегралы (моменты C_n). Переписав задачу в виде

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_t z_\varphi) = 1, \quad (5)$$

для движущейся границы $z(t, \varphi)$, мы обнаружили точные конечно-мерные решения, зависящие от времени. А теперь представим нашу задачу в виде уравнения на функцию Шварца. Из $\bar{z} = S(t, z)$ следует, что

$$\bar{z}_t = S_t + S_z z_t.$$

Разделив правую и левую часть этого равенства на $\sqrt{S_z}$. В результате получим

$$\frac{\bar{z}_t}{\sqrt{S_z}} = \frac{S_t}{\sqrt{S_z}} + \sqrt{S_z} z_t.$$

Перепишем это в виде

$$\frac{1}{2i} \frac{S_t}{\sqrt{S_z}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\bar{z}_t}{\sqrt{S_z}} - \sqrt{S_z} z_t \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}_t}{\sqrt{S_z}} \right). \quad (6)$$

последнее из этих равенств следует из того, что $S_z = d\bar{z}/dz$ на кривой и поэтому

$$\bar{S}_z = \frac{1}{S_z}.$$

Кроме того

$$z_l = \frac{dz}{dl} = \frac{dz}{\sqrt{dz d\bar{z}}} = \frac{1}{\sqrt{S_z}}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}_t}{\sqrt{S_z}}\right) = \operatorname{Im}(\bar{z}_t z_l) = V_n.$$

Из этого равенства и равенства (6) следует, что

$$\frac{S_t}{2i\sqrt{S_z}} = V_n.$$

Откуда получаем, что

$$\frac{S_t}{2i\sqrt{S_z}} = \partial_n G = \partial_l \varphi = \frac{1}{i} \partial_l (W - G) = \frac{1}{i} \partial_l W,$$

где последнее равенство верно, поскольку G постоянна вдоль границы. Поэтому

$$\frac{S_t}{2\sqrt{S_z}} = \partial_l W = W_z \frac{dz}{dl} = \frac{W_z}{\sqrt{S_z}},$$

где второе равенство выполнено в силу аналитичности комплексной функции Грина W . В результате получаем

$$S_t = 2W_z. \quad (7)$$

Из этого представления сразу получаем важное следствие: Справа в выражении (7) стоит функция, у которой нет особенностей в области D_- . А слева производная по времени от функции Шварца, у которой с необходимостью есть особенности в D_- . Следовательно эти особенности не зависят от времени. Кроме того функция W_z раскладывается в ряд Лорана только по отрицательным степеням z . Следовательно,

$$\frac{dS_+}{dt} = 0,$$

а поскольку

$$S_+(z) = \sum_0^{\infty} \frac{C_{k+1}}{\pi} z^k,$$

то мы получили таким образом еще одно доказательство того, что $\dot{C}_k = 0$.

Лекция 2.

Вспомним, что было на первой лекции. Деформация капли на комплексной плоскости задавалась уравнением

$$V_n(\xi) = \partial_n G(\xi, a). \quad (8)$$

Из этого уравнения мы получили, что у задачи есть бесконечное число законов сохранения.

Затем мы переписали задачу в терминах конформного отображения, $w = e^{G+i\varphi} \xrightarrow{F} z$, и получили уравнение:

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_t z_\varphi) = 1 \quad (9)$$

для движущейся кривой $z(t, \varphi)$. Этот подход дал нам такие интересные свойства, как конечномерные полиномиальные решения задачи. Есть и другие конечномерные решения уравнения (8), например, рациональные функции $z(w)$, логарифмические и т.д., но их рассмотрение не укладывается в формат наших лекций.

Потом мы ввели функцию Шварца и написали в самом конце первой лекции еще одно представление для исходной задачи

$$S_t = 2W_z. \quad (10)$$

Формулу (10) можно получить сразу из формулы (9) и без всяких усилий. Уравнение (9) гласит, что

$$\bar{z}_t z_\varphi - z_t \bar{z}_\varphi = 2i.$$

Теперь разделим обе части этого равенства на z_φ и получим

$$\bar{z}_t - \frac{z_t \bar{z}_\varphi}{z_\varphi} = \frac{2i}{z_\varphi}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=const} = -\frac{z_t}{z_\varphi}.$$

Кроме того

$$\frac{2i}{z_\varphi} = 2i\varphi_z = 2(G_z + i\varphi_z) = 2W_z,$$

где второе равенство выполнено в силу того, что функция Грина постоянна на границе области. Используя это и предыдущее соотношение, можно переписать (11) в виде

$$\bar{z}_t + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \bar{z}_\varphi = 2W_z.$$

В свою очередь, левая часть равенства есть ни что иное, как $\bar{z}_t(z, t) = S_t$. Тем самым мы получаем уравнение (10). Из уравнения (10) следует, что существует такая функция Ω , что выполнено

$$\Omega_t = \tilde{W}, \Omega_z = S,$$

где $\tilde{W} = 2W$. Иными словами

$$d\Omega = Sdz + \tilde{W}dt. \quad (12)$$

Теперь посмотрим на последнюю формулу с точки зрения классической механики. Представим себе одну частицу с комплексной координатой z , которая движется во времени t , с импульсом, зависящем от z как $S(z)$ и с энергией (гамильтонианом) $-\tilde{W}$. Значит, Ω — это

дифференциал производящей функции(действия). Такая гамильтонова запись уравнения (10) не случайна, так как формула (9) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_t = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ y_t = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}.$$

На первый взгляд может показаться, что эта система совпадает с одномерной гамильтоновской частицей, у которой x и y — это канонически сопряженные координата и импульс, а φ — гамильтониан. Но все не так просто. Конечно, наша задача с бесконечным числом степеней свободы не могла так просто расщепиться на список задач для одной частицы. Дело в том, что φ не задана нам как функция от переменных x и y ; φ — это функционал, φ зависит от всей кривой, φ , как вы помните, является полярным углом на вспомогательной комплексной плоскости, введенной для построения конформного отображения, переводящего внешность круга, на область D_- . То есть с точностью до мнимого постоянного φ — это логарифм обратного конформного отображения.

Итак, запись нашей задачи в гамильтоновой форме (12) выглядит просто, но ситуация далеко не проста. И вот, что мы сейчас будем делать: посмотрим на формулу (12) с точки зрения геометрии. Давайте вернемся к движущейся области. Произвольное шевеление области предусматривает, вообще говоря, очень маленькие, но произвольные шевеления всех аналитических моментов C_k , которые я буду обозначать t_k :

$$t_k = \int_{D_-} z^{-k} dV.$$

Наша задача описывает очень специальный способ вариации области: замораживаются все аналитические моменты, кроме нулевого,

а нулевой, то есть площадь, меняется линейно со временем. Вот почему в формуле (12) присутствует только одно «временное» слагаемое. Теперь я хочу проварьировать все моменты t_k , а не только t_0 , как раньше. Это будет соответствовать произвольному, а вовсе не специальному, шевелению области. Для произвольной деформации получаем формулу

$$d\Omega = Sdz + Wdt_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (H_k dt_k - \bar{H}_k d\bar{t}_k), \quad (13)$$

где последняя сумма добавлена, чтобы обе части равенства были чисто мнимыми на границе. Формула (13) описывает эту деформацию в терминах моментов t_k . Будем называть H_k гамильтонианами. Из формулы (13) следует, что

$$H_k = \frac{\partial \Omega}{\partial t_k}.$$

В соответствии с этим t_k будем называть канонически k -ым сопряженным временем к гамильтониану H_k или k -ым потоком. Из формулы (13) также следует, что

$$\frac{\partial H_k}{\partial t_n} - \frac{\partial H_n}{\partial t_k} = 0.$$

Если переписать эту формулу в терминах переменной w — координаты на вспомогательной комплексной плоскости, то предыдущая формула принимает вид

$$\frac{\partial H_k}{\partial t_n} - \frac{\partial H_n}{\partial t_k} = \{H_k, H_n\} = 0, \quad (14)$$

где $\{, \}$ соответствует скобке Пуассона из формулы (9), т.е.

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial B}{\partial \varphi} - \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial \varphi}.$$

Можно подсчитать, чему равен отдельный гамильтониан H_n в терминах конформного отображения. Вот ответ:

$$H_n = [z(w)^n]_{>0} + \frac{1}{2} [z(w)^n]_0. \quad (15)$$

Если помните, то на прошлой лекции мы писали, что

$$z(w) = rw + \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{-k}.$$

Если возвести $z(w)$ в n -ую степень, то получается многочлен n -ой степени от w плюс ряд из отрицательных степеней w . Если взять этот многочлен и коэффициент при его свободном члене разделить пополам, то получим H_n .

После того, как мы с соавторами, Вигманом и Забродиним, написали основные формулы задачи лапласовского роста (которые вы уже знаете из этой лекции), мы обратили внимание на сходство этих формул с формулами, описывающими интегрируемую иерархию двумеризованной Тоды: квазиклассический (бездисперсионный) предел интегрируемой иерархии цепочки Тоды оказался эквивалентным нашей задаче. В частности, формула (9), которая после перенормировки представляется в виде

$$\{\bar{z}, z\} = 1,$$

и получается как квазиклассический предел выражения

$$[\bar{z}, z] = \hbar > 0,$$

где $[A, B] = AB - BA$ означает коммутатор операторов A и B .

На этом я закончу описание связи между нашей задачей и интегрируемыми иерархиями. В этих терминах наши законы сохранения, они же моменты в разложении потенциала области, оказались

коммутирующими потоками для двумеризованной бездисперсионной цепочки Тоды. А это замечательная иерархия, поскольку многие известные интегрируемые иерархии получаются в качестве различных редукций и пределов из двумеризованной цепочки Тоды. Поэтому, описанный выше результат интересен хотя бы еще и по этой причине. Теперь обсудим связь задачи лапласовского роста с уравнением Кортевега-де-Фриза (КдФ). Но сначала я хотел бы получить уравнение Кортевега-де-Фриза в терминах функции Шварца. Точнее, не совсем уравнение Кортевега-де-Фриза, а эквивалентное ему уравнение, которое называется *уравнением Харри Дима* (Harry Dym):

$$h_t = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right)_{zzz}. \quad (16)$$

(По-моему, это единственное уравнение, которое называется не только фамилией, но еще и именем математика, который его впервые написал.) Это уравнение интегрируется точно по тем же причинам, по которым точно интегрируется уравнение КдФ, и, более того, даже эквивалентно уравнению Кортевега-де-Фриза после нетривиальной замены переменных.

Теперь рассмотрим контур, движущийся согласно закону:

$$V_n = \frac{\partial k}{\partial l}, \quad (17)$$

где V_n — нормальная скорость контура, l — натуральный параметр на контуре, k — кривизна контура. Тогда можно легко показать, что кривизна как функция от длины дуги l и времени t удовлетворяет следующему нелинейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{3}{2}k^2 \frac{\partial k}{\partial l} + \frac{\partial^3 k}{\partial^3 l} = 0, \quad (18)$$

уравнению, которое называется *модифицированным уравнением Кортевега-де-Фриза*. Оно точно интегрируется методом обратной задачи

рассеяния (по тем же причинам, по которым интегрируется КдФ). Если мы теперь введем новую функцию u :

$$u = i \frac{\partial k}{\partial l} + \frac{k^2}{2}, \quad (19)$$

то полученное уравнение на u будет уравнением Кортевега-де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial l} + \frac{\partial^3 u}{\partial^3 l} = 0. \quad (20)$$

Запись (19), если бы не было мнимой единицы, называлась бы трансформацией Миуры, который в 1967 году нашел эту формулу, которая связывает уравнения (18) и (20). Теперь получим этот закон движения контура в терминах функции Шварца. Я утверждаю, что функция Шварца будет удовлетворять уравнению Харри Дима (16). Но перед этим сделаю небольшое замечание. Дело в том, что правильная задача по физике, которая описывает движение контура, — не та, которую мы решали на прошлой лекции, а та, в которую надо включить поверхностное натяжение, которое регуляризует, которое сглаживает динамику, и не позволяет кривизне расходиться за конечное время, которое предотвращает каспы. Тогда правильная задача описывается уравнением

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\xi, a) = \delta(\xi - a), & \text{при } \xi \in D_-, \\ G(\xi, a) = \sigma k, & \text{при } \xi \in \partial D_-, \end{cases}$$

где σ — поверхностное натяжение, а k — кривизна контура. Поправка σk ломает, к сожалению, те прекрасные свойства, которые мы описывали, включая законы сохранения, но зато это правильная физическая запись, которая регуляризует динамику границы. То, что я буду вам сейчас показывать, имеет отношение к этой более полной регуляризированной записи. Функция Шварца, как вы помните, описывается уравнением

$$\bar{z} = S(z).$$

Давайте разовьем дифференциальную геометрию в терминах функции Шварца. У нас уже есть одна формула:

$$z_l = \frac{1}{\sqrt{S_z}}. \quad (21)$$

Надо получить еще парочку. Давайте выразим кривизну через функцию Шварца. Кривизна k , по определению, есть

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial l},$$

где θ — касательный угол к кривой. А касательный угол есть, по определению

$$\theta = \frac{1}{i} \ln z_l.$$

В силу этого равенства и формулы (21) получаем, что

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial l} = \left(\frac{1}{i} \ln z_l \right)_l = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_z,$$

и кроме того

$$e^{i\theta} = z_l = \frac{1}{\sqrt{S_z}}.$$

Теперь вспомним выражение для нормальной скорости контура через функцию Шварца, полученное на прошлой лекции:

$$V_n = \frac{S_t}{2i\sqrt{S_z}}.$$

Подставив в закон движения границы (17) выражение для нормальной скорости и только что полученное выражение для кривизны через функцию Шварца, мы приходим к формуле

$$\frac{S_t}{2i\sqrt{S_z}} = \frac{z_l}{i} \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_{zz} = \frac{1}{i\sqrt{S_z}} \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_{zz},$$

которую после сокращений можно переписать в виде

$$S_t = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_{zz}.$$

Дифференцируя эту формулу по z и полагая $u = S_z$, получаем, что функция u удовлетворяет уравнению Харри Дима (16).

Самые интересные случаи функции Шварца, с помощью которых можно действительно подсчитать интересные ответы в представленных задачах, — это те случаи, когда одна из «половинок» функции Шварца (S_+ или S_-) является рациональной функцией или суммой логарифмов. В этом случае действительно есть шанс получить точные конечномерные решения нашей интегрируемой задачи. Функция Шварца раскладывается в сумму двух половинок формального разложения в ряд Лорана

$$S(z) = S_+(z) + S_-(z).$$

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть f — конформное отображение из внешности единичного диска во внешность контура. Тогда все особые точки этого отображения находятся во взаимнооднозначном соответствии с особыми точками той части функции Шварца, которая аналитична внутри контура (и следовательно имеет особые точки или разрезы только снаружи контура).*

Описанное в этой теореме взаимнооднозначное соответствие между особыми точками позволяет точно решить задачу лапласовского роста. К данному моменту мы уже справились с двумя этапами нашей работы. Во-первых, мы нашли правильное представление, в котором задача линеаризуется: представление в терминах моментов. Во-вторых мы проследили динамику в этом представлении: меняется только нулевой момент, остальные моменты постоянны. Остался

третий этап, который в данной задаче совпадает с обратной задачей потенциала: вернуться в начальные данные (уже при $t > 0$). Нам мало проку от того, что мы знаем как меняются моменты, мы хотим найти явную формулу того, как граница движется. Ответить на этот вопрос нам помогает теорема 1. Начнем с очевидного соотношения: если f — наше конформное отображение, то на единичной окружности, лежащей в комплексной плоскости с координатой w , выполнено

$$\begin{cases} z = f(w) \\ \bar{z} = \bar{f}\left(\frac{1}{w}\right) = S(z) \end{cases}.$$

Предположим, что внутри единичного круга функция $f(w)$ имеет вид

$$f(w) = \frac{A}{(w-a)^p} + \sum_{k=1-p}^{\infty} a_k (w-a)^k,$$

где $p \geq 1$, $A \in \mathbb{C} \setminus 0$, $a_k \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\bar{f}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\bar{A}}{\left(\frac{1}{w} - \bar{a}\right)^p} + \{\text{более регулярные члены}\}.$$

Проделав некоторые преобразования с этой формулой, получаем

$$\bar{f}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\bar{A}\bar{a}^{-2p}}{\left(\frac{1}{\bar{a}} - w\right)^p} + \{\text{более регулярные члены}\}. \quad (22)$$

Точка $\frac{1}{\bar{a}}$ лежит вне единичного круга, т.е. в области, где отображение f конформно. Поэтому для w близких к $\frac{1}{\bar{a}}$ получаем

$$z = f(w) = f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) + f'\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)\left(w - \frac{1}{\bar{a}}\right) + \{\text{старшие степени } w - \frac{1}{\bar{a}}\}.$$

Используя это равенство, выразим $w - \frac{1}{\bar{a}}$ через $z - f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$

$$w - \frac{1}{\bar{a}} = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)} \left(z - f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) \right) + \{ \text{старшие степени } z - f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) \}.$$

Подставляя полученное выражение в (22) и вспоминая, что $\bar{f}\left(\frac{1}{w}\right) = S(z)$, получаем выражение для функции Шварца

$$S(z) = \frac{\bar{A}\bar{a}^{-2p} \left(f'\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) \right)^p}{\left(z - f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) \right)^p} + \{ \text{более регулярные члены} \}.$$

Наша цель достигнута. Мы увидели, что есть соответствие между полюсом a кратности p конформного отображения f внутри круга и полюсом той же кратности функции Шварца, расположенным в точке $f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right)$:

$$a \longrightarrow f\left(\frac{1}{\bar{a}}\right).$$

Кроме того, мы получили формулу для пересчета вычетов функции Шварца через вычеты конформного отображения в соответствующих точках (под вычетами здесь понимается коэффициенты при старших особенностях):

$$A \longrightarrow \bar{A}\bar{a}^{-2p} \left(f'\left(\frac{1}{\bar{a}}\right) \right)^p.$$

Но на прошлой лекции мы показали, что особенности функции Шварца, которые находятся снаружи от контура, и вычеты в этих особенностях являются интегралами движения. Таким образом, зная полюса и вычеты функции Шварца, мы, обращая стрелки в вышеприведенных формулах, находим явный вид особенностей конформного отображения f . Правда, обратить стрелки не так просто, поскольку полюса a и вычеты A выражаются через полюса и вычеты функции Шварца неявно. Но в любом случае мы получили замкнутую формулу для нахождения параметров конформного отображения.

У математиков, не зависимо от этого исследования, возник интересный объект, называемой квадратурной областью.

Определение 3. Область D на комплексной плоскости называется *квадратурной*, если существуют числа $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, комплексные числа $c_{k,l}$, где $1 \leq k \leq N$, $0 \leq l \leq M$, и точки $z_n \in D$, где $1 \leq n \leq N$ такие, что для любой функции f , голоморфной в области D выполнено равенство

$$\int_D f(z) dV = \sum_{l=0}^M \sum_{k=1}^N c_{k,l} f^{(l)}(z_k).$$

Точки z_n называются *квадратурными точками* области D .

Оказывается, что наша задача лапласовского роста, если и решается точно, то есть получаются конечномерные ответы, то такие области являются квадратурными. Вспомним про формулу

$$S_t = 2W_z.$$

Из нее следовало, что

$$\frac{dS_+}{dt} = 0.$$

Поэтому, если в начальный момент функция Шварца была некоторой рациональной функцией:

$$S_+ = \sum_{k=1}^N \frac{B_k}{(z - b_k)^{p_k}}, \quad (23)$$

то B_k и b_k не зависят от времени. Как мы показали ранее, по B_k и b_k мы можем восстановить вид соответствующего конформного отображения f :

$$f(w) = rw + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{(w - a_i)^{p_i}},$$

и мы умеем вычислить A_i и a_i , зная B_k и b_k . Покажем, что в случае таких функций Шварца наша область является квадратурной. Действительно, проинтегрируем произвольную гармоническую в D функцию h по этой области. Получаем

$$\int_D h(z) dV = \frac{1}{2i} \int_D h(z) dz d\bar{z} = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \bar{z} h(z) dz = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} (S_+ + S_-) h(z) dz.$$

В этом вычислении мы воспользовались формулой Стокса, при переходе от интеграла по области к интегралу по границе, и тем, что на границе области функция Шварца совпадает с $\bar{z}$. Функция $S_-(z)h(z)$ голоморфна в области D , поэтому, в силу теоремы Коши,

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} S_-(z) h(z) dz = 0.$$

Зная явный вид функции $S_+(z)$, воспользуемся интегральной формулой Коши для производных голоморфной функции, чтобы вычислить интеграл

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} S_+(z) h(z) dz.$$

Получаем

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} S_+(z) h(z) dz = \sum_{k=1}^N \frac{\pi B_k h^{(p_k-1)}(b_k)}{(p_k-1)!}.$$

Окончательно получаем, что для любой голоморфной функции в области D выполнено

$$\int_D h(z) dV = \sum_{k=1}^N \frac{\pi B_k h^{(p_k-1)}(b_k)}{(p_k-1)!},$$

то есть область D является квадратурной. Этим завершается мой рассказ про то, что точно интегрируемый лапласовский рост является представителем квадратурных областей.

Если включить поверхностное натяжение в задачу лапласовского роста, то есть рассматривать задачу

$$\begin{cases} \nabla^2 G(\xi, a) = \delta(\xi - a), & \text{при } \xi \in D_-, \\ G(\xi, a) = \sigma k, & \text{при } \xi \in \partial D_-, \end{cases}$$

то в терминах функции Шварца эта задача переписывается в виде

$$S_t = 2W_z + \sigma u$$

для некоторой функции u . Если бы в правой части не было первого слагаемого, то получилось бы уравнение Харри Дима в мнимом времени:

$$S_t = 2i\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_{zz},$$

что нетрудно вывести. Тем самым наша задача записывается в виде

$$S_t = 2W_z + 2i\sigma \left(\frac{1}{\sqrt{S_z}} \right)_{zz}. \quad (24)$$

Интересно получается. Если бы не было поверхностного натяжения, то эта задача интегрировалась по тем же удивительным причинам, по которым интегрируется лапласовский рост. Если бы отсутствовало слагаемое $2W_z$, интегрировалось в силу того, что интегрируется уравнение Кортвега-де-Фриза. Тем не менее нет ни малейших причин верить, что задача (24) интегрируется. А если да, то это такое чудо, в которое нелегко поверить. Но рассмотрим следующий пример. Напишем знаменитое уравнение Римана–Хопфа

$$u_t = uu_x.$$

Оно точно решается неявным способом. Также точно решается и линейаризованное уравнение Кортвега-де-Фриза

$$u_t = u_{xxx}.$$

Оно интегрируется хотя бы потому, что является линейным уравнением в частных производных с постоянными коэффициентами. Волшебным образом точно решается и «сумма» этих уравнений,

$$u_t = uu_x + u_{xxx},$$

когда справа стоит сумма правых частей предыдущих уравнений. Но оно решается по настолько другим и серьезным причинам, что знание об интегрируемости уравнений Римана-Хопфа и линейаризованного уравнения Кортвега-де-Фриза нам нисколько не помогает.

Теперь я сообщу вам о более общей формулировке задачи о подвижной границе, которая как выяснилось тоже интегрируется. Мы говорили про следующий закон:

$$\begin{cases} V_n(\xi) = \partial_n G(\xi, a) \text{ при } \xi \in D_-, \\ \nabla^2 G(\xi, a) = \delta(\xi - a), \text{ при } \xi \in D_-, \\ G(\xi, a) = 0, \text{ при } \xi \in \partial D_-. \end{cases}$$

Заменяем оператор Лапласа на более общий двумерный линейный эллиптический оператор, то есть будем решать задачу

$$\begin{cases} V_n(\xi) = \lambda \partial_n G(\xi, a) \text{ при } \xi \in D_-, \\ \nabla \lambda \nabla G(\xi, a) = \delta(\xi - a), \text{ при } \xi \in D_-, \\ G(\xi, a) = 0, \text{ при } \xi \in \partial D_-, \end{cases}$$

где функция $\lambda(x, y) > 0$ при $(x, y) \in D$. По очевидным причинам я назвал эту задачу задачей эллиптического роста. Оказывается, эта

задача также имеет бесконечно много законов сохранения. Оказывается, эта задача тоже описывается уравнением

$$\operatorname{Im}(\bar{z}_t z_\varphi) = 1, \quad (25)$$

где φ в этой задаче — функция тока:

$$\lambda \cdot \operatorname{grad} G(x, y) = \operatorname{rot} \varphi(x, y).$$

Я утверждаю, что есть следующий бесконечный набор законов сохранения — это производные по времени от интегралов C_k от нуль-векторов ψ_k нашего эллиптического оператора, то есть от функций, удовлетворяющих уравнению

$$\nabla \lambda \nabla \psi_k = 0.$$

Действительно

$$\begin{aligned} \frac{dC_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_D \psi_k dV = \oint_{\partial D} \lambda \psi_k \partial_n G dl = \oint_{\partial D} (\lambda \psi_k \nabla G - \lambda G \nabla \psi_k)_n dl = \\ &= \int_D \nabla (\lambda \psi_k \nabla G - \lambda G \nabla \psi_k) dV = \int_D \psi_k \nabla \lambda \nabla G dV = \int_D \psi_k \delta(\xi - a) dV = \\ &= \psi_k(a). \end{aligned}$$

Рассуждения, используемые при переходе от одного равенства к другому в этом вычислении, почти полностью повторяют те, которые применялись для доказательства утверждения 1. Легко видеть, что этот результат можно получить и для областей в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$. В приведенном выше доказательстве нигде не использовалось, что пространство, в котором мы работаем, двумерно. Итак, мы получили бесконечное число законов сохранения и для расширенной задачи, задачи эллиптического роста. Более того, если мы будем

заниматься не эллиптической, а параболической задачей, которая описывает затвердевание льда, и которая описывается уравнением

$$\begin{cases} V_n(\xi) = \partial_n T(\xi), \text{ при } \xi \in D, \\ \alpha \partial_t T(\xi) = \nabla^2 T(\xi), \text{ при } \xi \in D, \\ T(\xi) = 0, \text{ при } \xi \in \partial D, \end{cases}$$

то эта задача также имеет также бесконечное число законов сохранения. Вот эти законы сохранения:

$$C_k = \int_D \frac{1 - \alpha T}{z^k} dV.$$

Это доказывается совсем просто:

$$\begin{aligned} \frac{dC_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_D \frac{1 - \alpha T}{z^k} dV = \oint_{\partial D} \frac{1 - \alpha T}{z^k} \partial_n T dl - \int_D \frac{\alpha \partial_t T}{z^k} dV = \\ &= \oint_{\partial D} \frac{1}{z^k} \partial_n T dl - \int_D \frac{\alpha \partial_t T}{z^k} dV = \oint_{\partial D} \frac{1}{z^k} \partial_n T - T \partial_n \left(\frac{1}{z^k} \right) dl - \\ &- \int_D \frac{\alpha \partial_t T}{z^k} dV = \oint_{\partial D} \left(\frac{1}{z^k} \nabla T - T \nabla \left(\frac{1}{z^k} \right) \right)_n dl - \int_D \frac{\alpha \partial_t T}{z^k} dV = \\ &= \int_D \nabla \left(\frac{1}{z^k} \nabla T - T \nabla \left(\frac{1}{z^k} \right) \right) dV - \int_D \frac{\alpha \partial_t T}{z^k} dV = \\ &= \int_D \frac{1}{z^k} (\nabla^2 T - \alpha \partial_t T) dV = 0. \end{aligned}$$

Рассуждения, используемые при выводе этих формул, почти полностью повторяют рассуждения, изложенные при доказательстве утверждения 1.

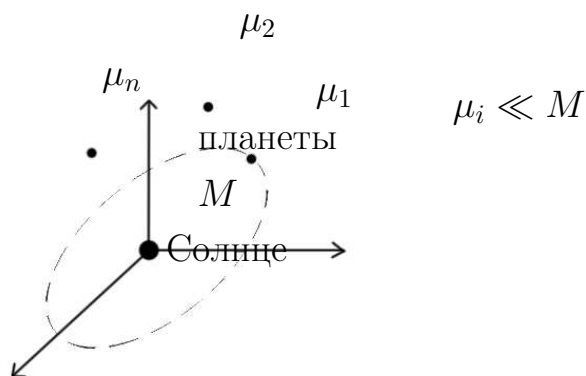
Усреднение возмущений в динамических системах

А. И. Нейштадт

Лекция 1.

Теория возмущений возникла и долгое время развивалась в связи с потребностями небесной механики. При этом центральную роль играли и продолжают играть методы, основанные на усреднении возмущений. Начнем с примера, являющегося основным в этой тематике.

Пример 1 (Планетная задача $N + 1$ тел). В этой задаче рассматривается движение $N + 1$ материальных точек под действием их взаимного притяжения по закону Ньютона. Предполагается что масса M одной из этих точек (Солнца) много больше масс μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, остальных точек (планет).



Если бы не было взаимного притяжения планет и их влияния на движение Солнца, то планеты двигались бы по кеплеровым эллипсам вокруг Солнца. Истинные движения планет можно представить как композицию движений по кеплеровым эллипсам и изменений самих эллипсов. Изменения эллипсов происходят гораздо медленнее, чем движения по эллипсам. Эти изменения называют *вековой эволюцией*. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику планет, является примером *системы с быстрыми и медленными переменными*. Быстрые переменные — это фазы планет на орбитах. Медленные переменные задают форму кеплеровых эллипсов и их расположение в пространстве. Для ответа на многие вопросы важна именно вековая эволюция. Хочется иметь для её приближенного описания замкнутую систему дифференциальных уравнений, не содержащую быстрых фаз. Для построения такой системы Лагранж, Лаплас и Гаусс использовали процедуры, эквивалентные следующему *принципу усреднения* : для описания вековой эволюции надо усреднить скорости изменения медленных переменных по быстрым фазам. В подходе Гаусса этот принцип формулируется так: надо заменить задачу о движении планет задачей об эволюции притягивающихся эллиптических колец, по которым массы планет размазаны с плотностью, обратно пропорциональной скорости кеплерова движения.

Задача в рассмотренном выше примере является частным случаем общей важной задачи об эволюции в системах, отличающихся малым возмущением от систем с интегрируемой динамикой. В фазовом пространстве невозмущённой интегрируемой системы есть область, расслоенная на торы, обматываемые фазовыми траекториями. В этой области можно ввести координаты $I \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$ такие, что уравнения невозмущённого движения примут вид

$$\begin{cases} \dot{I} = 0, & I \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \dot{\varphi} = \omega(I), & \varphi \in \mathbb{T}^m. \end{cases}$$

Вектор I составлен из значений первых интегралов невозмущённой задачи. Соотношение $I = \text{const}$ задает тор в фазовом пространстве. Вектор φ задает угловые координаты на этом торе (фазы), изменяющиеся во времени с постоянной для данного тора скоростью (*частотой*) $\omega(I)$. В примере выше вектор I составлен из величин больших полуосей, эксцентриситетов, наклонов, долгот узлов и перигелиев орбит планет, а вектор φ составлен из *средних аномалий* планет. Вектор $\omega(I)$ составлен из *средних движений* планет. (В этой задаче ω зависит только от значений больших полуосей.)

При добавлении малого, порядка ε , возмущения уравнения для изменения переменных I, φ примут вид

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), & I \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), & \varphi \in \mathbb{T}^m. \end{cases}$$

Функции f и g имеют по φ период 2π . В этой системе переменные I называют *медленными переменными*, а переменные φ — *быстрыми переменными* или *быстрыми фазами*. Саму систему называют возмущенной системой с быстро вращающимися фазами.

В приложениях часто основной интерес представляет поведение медленных переменных. *Принцип усреднения* состоит в том, что для приближенного описания изменения медленных переменных на временах порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ система возмущённых уравнений заменяется на

усреднённую систему

$$\dot{J} = \varepsilon F(J),$$

где $F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(J, \varphi, 0) d\varphi_1 \dots d\varphi_m,$

или, что то же, $F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \oint_{\mathbb{T}^m} f(J, \varphi, 0) d\varphi_1 \dots d\varphi_m.$

Здесь φ_i — компоненты вектора фаз φ .

Предполагается, что решения усредненной системы приближаются решения исходной системы.

Принцип усреднения — “это не теорема, не аксиома и не определение, а физическое предложение, т.е. расплывчато сформулированное и, строго говоря, неверное утверждение. Такие утверждения часто бывают плодотворными источниками математических теорем”. (В. И. Арнольд “Математические методы классической механики”, §52А.) В этих лекциях будут сформулированы некоторые из таких теорем.

Принцип усреднения доставляет замкнутую систему уравнений для описания медленного движения, которая гораздо проще исходной системы. Например, шаг численного интегрирования для усредненной системы можно брать в $1/\varepsilon$ раз меньшим, чем для исходной возмущенной.

Введем медленное время $\tau = \varepsilon t$. Усредненная система перепишется в виде

$$\frac{dJ}{d\tau} = F(J).$$

Медленные переменные изменяются со скоростью порядка ε , и существенное их изменение возможно только на временах $t \sim 1/\varepsilon$, то

есть $\tau \sim 1$. Это минимальный порядок длины интервала времени, на котором обычно пользуются усреднением. Численное интегрирование уравнений возмущенного движения на таком интервале времени тем труднее, чем меньше ε . Для метода усреднения эта трудность отсутствует: если в качестве независимой переменной используется медленное время τ , то ни усреднённая система, ни интервал времени не зависят от ε . Более того, как мы увидим, чем меньше ε , тем точнее метод усреднения описывает эволюцию медленных переменных на таких временах.

Использование метода усреднения приводит к некоторым фундаментальным выводам о динамике возмущенных систем.

Пример 2 (Гамильтоновы возмущения невырожденной интегрируемой гамильтоновой системы). Пусть и невозмущённая система, и возмущение гамильтоновы. Гамильтониан задачи имеет вид

$$H = H_0(I) + \underbrace{\varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)}_{\text{возмущение}}, \quad I \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in \mathbb{T}^n.$$

Здесь I, φ — канонически сопряженные переменные, $I = (I_1, \dots, I_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Возмущённое движение описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{I}_s = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_s}, \\ \dot{\varphi}_s = \frac{\partial H_0}{\partial I_s} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Исследование таких уравнение Пуанкаре называл “основной задачей динамики”.

Чтобы выписать усредненную систему, надо усреднить правые части уравнений возмущенного движения по компонентам φ_s вектора фаз. Функция H_1 периодична по каждой из этих компонент.

Поэтому среднее от её производной по φ_s равно 0. Получаем, что усредненная система имеет вид

$$\dot{J}_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, использование принципа усреднения приводит к выводу, что малые гамильтоновы возмущения, наложенные на интегрируемую гамильтонову систему, в которой число быстрых переменных равно числу степеней свободы, не приводят к эволюции значений первых интегралов невозмущённой системы. В случае, когда невозмущённая система удовлетворяет некоторым условиям невырожденности, обоснование этому фундаментальному выводу дают теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (теория КАМ) и теорема Нехорошева. Одно из основных утверждений теории КАМ — следующая теорема.

Теорема 1 (Теорема Колмогорова). *Если невозмущённая интегрируемая гамильтонова система невырождена или изоэнергетически невырождена, то при достаточно малом гамильтоновом возмущении большинство инвариантных торов невозмущённой системы не исчезнет, а лишь немного деформируется, так что в фазовом пространстве возмущённой системы также имеются инвариантные торы, заполненные всюду плотно фазовыми кривыми, обматывающими их условно-периодически с числом частот равным числу степеней свободы. Эти торы образуют большинство в том смысле, что мера дополнения к их объединению мала вместе с возмущением.*

Невозмущённая система называется *невырожденной*, если её частоты функционально независимы:

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I} = \det \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0.$$

Условие изоэнергетической невырожденности состоит в том, что одна из частот ненулевая, и отношения к ней других частот функционально независимы на каждом уровне энергии. Эти условия невырожденности не являются необходимыми для справедливости вывода теории КАМ о сохранении инвариантных торов, и их можно значительно ослабить. В аналитическом случае достаточно потребовать, чтобы образ отображения частот $I \mapsto \omega(I)$ не лежал ни в какой плоскости.

Как отметил В. И. Арнольд, случаи двух и большего числа степеней свободы совершенно различны. Если число степеней свободы равно двум, то размерность фазового пространства равна 4, а размерность многообразия уровня энергии равна 3. Инвариантные торы, доставляемые теоремой Колмогорова, имеют размерность 2. Эти торы при условии изоэнергетической невырожденности разделяют уровень энергии, и фазовые траектории, не лежащие на торах, оказываются зажатыми в щелях между торами. Если число степеней свободы n больше двух, то инвариантные торы (размерности n) не разделяют многообразие уровня энергии (размерности $2n - 1$), а расположены в нём подобно точкам на плоскости или линиям в пространстве. Поэтому инвариантные торы не препятствуют далёкому уходу фазовой кривой от начального невозмущённого тора. Это явление получило название диффузии Арнольда. Теория КАМ доказывает метрическую устойчивость, то есть устойчивость для большинства начальных данных. Есть гипотеза о топологической неустойчивости: при достаточно общих условиях в сколь угодно малой окрестности любой точки проходит фазовая траектория, вдоль которой медленные переменные уходят от начального значения на величину порядка 1. Для аналитических систем общего положения средняя скорость диффузии оценивается сверху следующей теоремой.

Теорема 2 (Теорема Нехорошева). *Если невозмущённый гамиль-*

тониан $H_0(I)$ не имеет стационарных точек, а его ограничение на любую плоскость любой размерности имеет только комплексно-изолированные стационарные точки, то в возмущённой гамильтоновой системе при достаточно малой величине возмущения выполнено $|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b$ при $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{a\varepsilon}\right)$, где $a, b > 0$ — константы, зависящие от характеристик гамильтониана.

Пример 3 (Устойчивость Солнечной системы). Уравнения движения в планетной задаче $N + 1$ тел (см. Пример 1) — это гамильтонова система, отличающаяся от интегрируемой малым возмущением. Однако для этой задачи условия невырожденности из КАМ-теории (см. Пример 2) не выполнены. У системы $3N$ степеней свободы и только N быстрых фаз (мы рассматриваем всё в системе координат с началом в центре масс системы). Случай, когда число быстрых фаз меньше числа степеней свободы называют случаем *собственного вырождения*. Усреднение по быстрым фазам приводит к выводу, что канонически сопряженные им переменные не должны эволюционировать под влиянием возмущений. Быстрые фазы — это средние аномалии планет l_s , а сопряженные им переменные — величины $L_s \sim \sqrt{a_s}$, где $a_s, s = 1, 2, \dots, n$, — большие полуоси кеплеровых орбит планет. Так что в приближении метода усреднения большие полуоси орбит планет постоянны.

Оказывается, усредненная по быстрым фазам система имеет устойчивое положение равновесия, соответствующее движениям всех планет в одной плоскости в одну сторону по круговым орбитам. Так что в приближении метода усреднения, если начальные эксцентриситеты и наклонения орбит малы, то они и останутся малыми во все время движения.¹ Этот вывод, вместе с утверждением о приближённом постоянстве больших полуосей, называется теоремой Лагранжа-

¹Наклонения вычисляются по отношению к *неизменной плоскости* системы. Так называют плоскость ортогональную вектору момента количества движения системы. Этот вектор является первым интегралом рассматриваемой задачи.

Лапласа об устойчивости Солнечной системы. Строгое обоснование этому выводу дает теория КАМ. Основной шаг в этом обосновании был сделан В. И. Арнольдом в 1963 г.

Основные трудности в обосновании метода усреднения связаны с наличием резонансов между частотами невозмущённого движения. Движение по инвариантному тору невозмущённой системы является многомерным вращением с вектором частот $\omega(I)$. Тор, на котором частоты рационально независимы, называется *нерезонансным*. Траектория невозмущённой системы обматывает его всюду плотно. Тор с рационально зависимыми частотами называется *резонансным*. Он расслоен на инвариантные торы меньшей размерности. Невозмущённая система называется *невырожденной*, если её частоты функционально независимы:

$$\det \frac{\partial \omega}{\partial I} \neq 0.$$

В невырожденной системе нерезонансные торы образуют всюду плотное множество полной меры. Резонансные торы также образуют всюду плотное множество, но оно имеет меру нуль.

Принцип усреднения предписывает усреднять правые части уравнений возмущённого движения по всему инвариантному тору невозмущённой системы. Этот рецепт основан на интуитивном предположении, что эффект возмущения усредняется из-за того, что возмущённая траектория на не слишком длинном интервале времени близка к невозмущённой, и она достаточно плотно обматывает тор. Однако в случае резонансного тора нет никакой причины усреднять по всему тору: ведь через некоторые области на торе заданная фазовая траектория невозмущённой системы не проходит. Так что если фазовая точка долгое время проводит вблизи резонансного тора, принцип усреднения, вообще говоря, хорошо работать не может.

Для Примеров 2 и 3 выше в приближении метода усреднения эволюция частот отсутствует. Так что, в этом приближении, если

в начальный момент частоты были нерезонансными, они останутся такими во все время движения. В общем случае негамильтоновых возмущений частоты меняются уже в приближении метода усреднения. Система в ходе своей эволюции проходит через резонансы.

Общие быстро-медленные системы (по Д. В. Аносову).

Принцип усреднения имеется и для быстро-медленных систем существенно более общего вида, чем описанные выше системы с быстро вращающимися фазами. В общем случае невозмущённая система такова:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0, & I &\in \mathbb{R}^m, \\ \dot{\varphi} &= \omega(I, \varphi), & \varphi &\in M^n, \end{aligned}$$

где M^n — компактное гладкое n -мерное многообразие.

Предполагается, что у невозмущённой системы есть гладкая инвариантная мера $\nu_I(\varphi)$, и невозмущённое движение на M^n эргодично при почти всех значениях медленных переменных.

Возмущённая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \omega(I, \varphi) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon). \end{cases}$$

В усреднённой системе

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = \frac{1}{\nu_J(M)} \int_M f(J, \varphi, 0) d\nu_I(\varphi).$$

Оказывается, решения усредненной системы приближённо описывают эволюцию медленных переменных в точной системе на временах порядка $1/\varepsilon$ для большинства начальных условий (Д. В. Аносов, 1960).

Усреднение в одночастотных системах. Одночастотной системой называется система, в которой быстрая фаза одномерна: $\varphi \in \mathbb{S}^1$. Возмущённая система выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon) \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon) \end{cases},$$

где $\omega(I) > \text{const} > 0$ — скалярная функция. Усреднённая система

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \varepsilon F(J), \\ \text{где } F(J) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(J, \varphi, 0) d\varphi. \end{aligned}$$

Основную роль во всех вопросах, связанных с принципом усреднения, играют замены переменных $(I, \varphi) \rightarrow (J, \psi)$, позволяющие с заданной точностью исключить из уравнений возмущённого движения быстрые фазы и таким образом отделить медленное движение от быстрого. В первом приближении эти замены приводят исходную систему уравнений к усреднённой. Идея использовать такие замены переменных восходит к работам А. Линдштедта, А. Пуанкаре, Н. Н. Боголюбова. Правая часть системы для новых переменных должна иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega(J) + \varepsilon G_0(J) + \dots \end{aligned}$$

Замена переменных ищется в виде формального ряда

$$(*) \begin{cases} I = J + \varepsilon u_1(J, \psi) + \varepsilon^2 u_2(J, \psi) + \dots \\ \varphi = \psi + \varepsilon v_1(J, \psi) + \varepsilon^2 v_2(J, \psi) + \dots \end{cases}.$$

При подстановке формул замены переменных в возмущённую систему получится

$$\begin{aligned} \dot{J} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \dot{\psi} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial J} \dot{J} + \dots &= \varepsilon f(J + \varepsilon u_1 + \dots, \psi + \varepsilon v_1 + \dots, \varepsilon), \\ \dot{\psi} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \psi} \dot{\psi} + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial J} \dot{J} + \dots &= \omega(J + \varepsilon u_1 + \dots) + \\ &+ \varepsilon g(J + \varepsilon u_1 + \dots, \psi + \varepsilon v_1 + \dots, \varepsilon). \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при ε даёт

$$\begin{aligned} F_0(J) + \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \omega(J) &= f(J, \psi, 0), \\ G_0(J) + \frac{\partial v_1}{\partial \psi} \omega(J) &= \frac{\partial \omega}{\partial J} u_1 + g(J, \psi, 0). \end{aligned}$$

Хотим, чтобы u_1 была 2π -периодической функцией от ψ . Интегрируя правую и левую части первого из предыдущих соотношений по ψ от 0 до 2π , получаем

$$F_0(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(J, \psi, 0) d\psi = F(J) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(J, \psi, 0) \rangle^\psi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \psi} &= \frac{1}{\omega} (f(J, \psi, 0) - F(J)) \Rightarrow \\ u_1 &= \frac{1}{\omega} \int_0^\psi (f(J, \vartheta, 0) - F_0(J)) d\vartheta + \text{const}(J). \end{aligned}$$

Таким образом, построены функции F_0, u_1 . Аналогично можно найти $G_0(J), v_1(J, \psi)$ и далее искать один за другим члены ряда. Однако, построенные в результате ряды (*) будут расходиться. Выход

из положения состоит в том, чтобы не строить бесконечные ряды, а оборвать их на каком-то месте и поставить вопрос о том, насколько полученная система приближает точную.

Теорема 3 (Фату). Пусть в системе

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), & I \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), & \varphi \in \mathbb{S}^1, \end{cases}$$

частота ω и возмущения f и g — гладкие функции в своей области определения $D \times \mathbb{S}^1 \times [0; \varepsilon_0]$, ограниченные вместе со своими производными первого порядка некоторой постоянной c_1 , и частота ω отделена от нуля некоторой постоянной c_2 . Тогда различие между медленными движениями $I(t)$ в точной системе и $J(t)$ в усреднённой системе остаётся малым в течение времени $\frac{1}{\varepsilon}$, а именно $|I(t) - J(t)| < C_1 \varepsilon$, $C_1 = \text{const} > 0$, если $I(0) = J(0)$ и $0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Схема доказательства (Н. Н. Боголюбов). Сделаем замену переменных $(I, \varphi) \rightarrow (\bar{I}, \varphi)$, такую что $I = \bar{I} + \varepsilon u_1(\bar{I}, \varphi)$. Она приведёт уравнение для медленной переменной к виду $\dot{\bar{I}} = \varepsilon F(\bar{I}) + O(\varepsilon^2)$. Это уравнение отличается от усредненного уравнения членом $O(\varepsilon^2)$. Начальное условие для переменной усредненного уравнения J отличается от начального условия для $\bar{I}$ на величину $O(\varepsilon)$: $\bar{I}(0) = J(0) + O(\varepsilon)$. За время порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ величины $\bar{I}(t)$ и $J(t)$ смогут разойтись не более, чем на величину $O(\varepsilon)$. Получаем

$$\begin{aligned} |\bar{I}(t) - J(t)| &= O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}, \\ |I(t) - \bar{I}(t)| &= O(\varepsilon), \end{aligned}$$

Поэтому

$$|I(t) - J(t)| \leq \underbrace{|I(t) - \bar{I}(t)|}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{|\bar{I}(t) - J(t)|}_{O(\varepsilon)} < C_1 \varepsilon.$$

□

При рассмотрении динамической системы особое внимание уделяется её положениям равновесия. Если у усреднённой системы таковые имеются, то интересен вопрос о поведении точной системы вблизи этих положений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 (Н. Н. Боголюбов). Пусть усреднённая система имеет невырожденное положение равновесия $I_* : F(I_*) = 0, \det \left(\frac{\partial F}{\partial I} \right)_{I_*} \neq 0$. Тогда у точной системы есть периодическое решение $I(t), \varphi(t)$, причём $I(t) = I_* + O(\varepsilon)$. Период этого решения $\frac{2\pi}{\omega(I_*)} + O(\varepsilon)$.

Доказательство. Используем фазу φ как независимую переменную:

$$\frac{dI}{d\varphi} = \frac{\varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon)}{\omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)}.$$

Сделаем замену переменных $I = \bar{I} + \varepsilon u_1(\bar{I}, \varphi)$. Получим

$$\frac{d\bar{I}}{d\varphi} = \frac{\varepsilon F(\bar{I})}{\omega(\bar{I})} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда

$$\bar{I}(2\pi) = \bar{I}(0) + \varepsilon \frac{F(\bar{I}(0))}{\omega(\bar{I}(0))} + O(\varepsilon^2).$$

Мы ищем периодическое решение, так что должно быть

$$\bar{I}(2\pi) = \bar{I}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{I}_0.$$

Отсюда получаем

$$F(\bar{I}_0) + O(\varepsilon) = 0.$$

По теореме о неявной функции существует единственное решение этого уравнения $\bar{I}_0$ такое, что

$$\bar{I}_0 = I_* + O(\varepsilon).$$

В исходных переменных начальными условиями для периодического решения будут

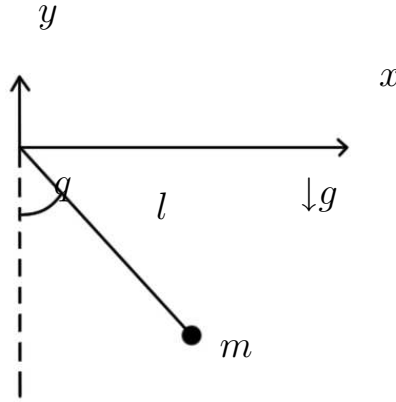
$$I_0 = \bar{I}_0 + \varepsilon u_1(\bar{I}_0, 0), \quad \varphi_0 = 0.$$

□

Лекция 2.

Продолжим рассмотрение задачи об усреднении в одночастотных системах.

Пример 4 (Маятник с вибрирующей точкой подвеса; А. Stephenson, П. Л. Капица, Н. Н. Боголюбов). Напомним, что *математическим маятником* называется механическая система, состоящая из невесомого недеформируемого стержня AB длины l , у которого конец A закреплён, а к концу B прикреплена точка массы m . Считается, что движение происходит в неподвижной вертикальной плоскости в поле сил тяжести, угол отклонения от нижнего положения обозначим через q .



Теперь усложним задачу. Пусть точка подвеса A вертикально колеблется, причём период и амплитуда её колебаний малы (порядка ε). Получим *маятник с вибрирующей точкой подвеса*.

Будем считать, что точка подвеса колеблется в вертикальной плоскости по закону $y = a(t)$. Запишем уравнение движения:

$$\ddot{q} + \frac{g + \ddot{a}(t)}{l} \sin q = 0.$$

Перейдём к гамильтоновой форме. Тогда уравнения движения примут вид:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \end{cases}$$

где $H = \frac{(p - ml\dot{a} \sin q)^2}{2ml^2} - mgl \cos q$ — гамильтониан. Это — неавтономная система с периодической зависимостью от времени.

Рассмотрим частный случай, а именно будем считать, что a за-

висит от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \varepsilon \sin \frac{\Omega t}{\varepsilon}, \\ \dot{a} &= a_0 \Omega \cos \frac{\Omega t}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Обозначим $\varphi = \frac{\Omega t}{\varepsilon}$. Тогда наша система примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq}{d\left(\frac{\Omega t}{\varepsilon}\right)} &= \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{d\left(\frac{\Omega t}{\varepsilon}\right)} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{d\varphi}{d\left(\frac{\Omega t}{\varepsilon}\right)} &= 1. \end{aligned} \right.$$

Видим, что q и p — медленные переменные, меняющиеся со скоростью порядка ε , а φ — быстрая переменная с частотой 1.

Метод усреднения предписывает усреднить уравнения движения по быстрой переменной, но вместо этого можно усреднить гамильтониан H , а потом записать уравнения движения. Усредненный гамильтониан есть

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \langle H \rangle^\varphi &= \frac{p^2}{2ml^2} + \frac{1}{2}a_0^2\Omega^2 \cdot \frac{1}{2}\sin^2 q - mgl \cos q, \\ \mathcal{H} &= \frac{p^2}{2ml^2} + V_{\text{eff}}(q). \end{aligned}$$

Первое слагаемое имеет смысл кинетической энергии. Второе слагаемое зависит только от q и называется *эффективной потенциальной энергией* системы:

$$V_{\text{eff}} = mgl \left(-\cos q + \frac{a_0^2 \Omega^2 \sin^2 q}{4gl} \right).$$

Полученная система описывает движение в этом потенциале. Исследуем положения равновесия этой системы, то есть точки, где $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial q} = 0$. Дифференцирование даст

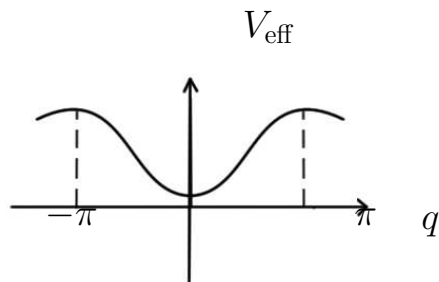
$$mgl \left(\sin q + \frac{a_0^2 \Omega^2}{2gl} \sin q \cos q \right) = 0.$$

Имеем следующие положения равновесия:

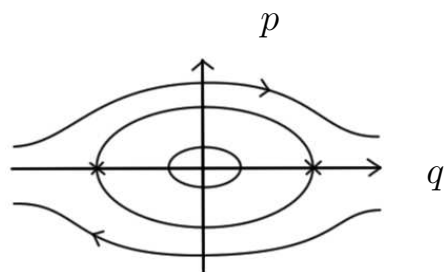
1. $q = 0$ (соответствует нижнему вертикальному положению маятника);
2. $q = \pi$ (соответствует верхнему вертикальному положению маятника);
3. $q = \pi \pm \arccos \frac{2gl}{a_0^2 \Omega^2}$, если $\frac{2gl}{a_0^2 \Omega^2} < 1$.

Необходимо рассмотреть два случая:

1. Если $\frac{2gl}{a_0^2 \Omega^2} > 1$, то положения равновесия, соответствующего $q = \pi \pm \arccos \frac{2gl}{a_0^2 \Omega^2}$, просто нет.

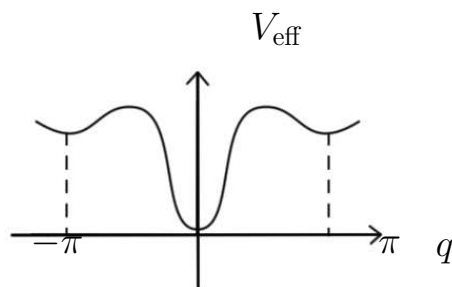


Фазовый портрет:

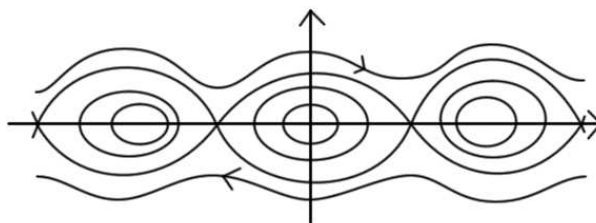


2. Если маятник колеблется с достаточно большой частотой, то $\frac{2gl}{a_0^2\Omega^2} < 1$, и положение в точке $\pm\pi$ становится устойчивым.

Говорят, что при переходе $\frac{2gl}{a_0^2\Omega^2}$ через единицу происходит бифуркация: там, где был максимум, возникает минимум, а рядом появляются два максимума.



Фазовый портрет в данном случае выглядит следующим образом:



Теперь попытаемся выяснить, как связаны движения в усреднённой и точной системах. Согласно теореме Боголюбова, вблизи невырожденного положения равновесия усреднённой системы имеется периодическое движение точной системы. У этой теоремы есть вторая часть, утверждающая, что если собственные числа положения равновесия усреднённой системы не лежат на мнимой оси, то характер устойчивости периодического решения точной системы такой же, как у равновесия усреднённой системы. Однако в рассматриваемой системе собственные числа лежат на мнимой оси, поэтому утверждение об устойчивости из теоремы Боголюбова неприменимо. Тем не менее, по результатам из предыдущей лекции можно гарантировать, что в течение времени $\sim 1/\varepsilon$ маятник не выйдет из малой окрестности верхнего вертикального положения.

Связь решений усреднённой и точной систем удобно обсуждать с помощью картинки, называемой *сечением Пуанкаре*. Мы будем рассматривать маятник, для любой другой периодически зависящей от времени системы построения аналогичны.

В плоскости (q, p) берём какую-нибудь точку и выпускаем из неё траекторию. Фазовая точка как-то движется, но в плоскости ничего не рисуется. Мы ждём в течение времени периода возмущения, далее смотрим, где оказалась точка, и отмечаем её положение. И так далее в течение каждого периода. Получается последовательность точек на плоскости. Если бы система была интегрируемой, то все

построенные точки ложились бы на гладкие кривые. Выясним, куда будут ложиться эти точки в рассматриваемой системе.

Начнём из начала координат O . Тогда точка там и останется, потому что это положение равновесия точной системы. Более того, даже если бы эта точка была положением равновесия усреднённой системы, но не была равновесием точной системы, то всё равно по теореме Боголюбова было бы возможно найти такое начальное положение, которое бы соответствовало периодическому решению точной системы и в которое точка периодически возвращалась. Это положение — *неподвижная точка* отображения последования Пуанкаре.

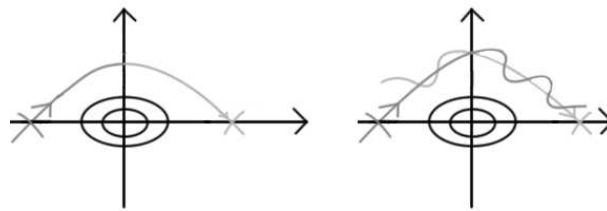
Точка O останется на месте. В окрестности же точки O образы точек при отображении Пуанкаре для большинства начальных условий будут ложиться на гладкие кривые. Эти кривые инвариантны относительно отображения Пуанкаре. Их называют *инвариантными кривыми*. Существование этих кривых гарантирует теория КАМ. Наличие этих кривых обеспечивает устойчивость положения равновесия.

Инвариантные кривые заполняют не всё пространство, и между ними существует ещё множество точек. Поэтому картина в действительности очень сложная, но, к счастью, на устойчивость это не влияет.

Неустойчивым положениям равновесия тоже соответствуют неподвижные точки отображения последования Пуанкаре.

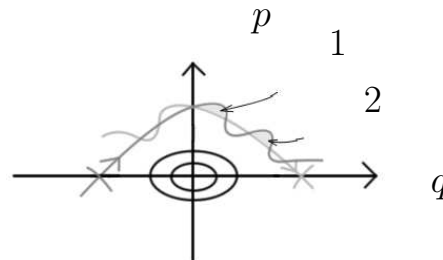
Рассмотрим точку неустойчивого равновесия. Для неё найдётся такая кривая, что если мы начнём на ней и будем двигаться назад по времени, то мы будем приближаться к этой точке равновесия. Такая кривая называется *неустойчивым усом* неустойчивого положения равновесия. Кривая, точки которой приближаются к неустойчивому равновесию при итерациях отображения Пуанкаре вперед по времени, называется *устойчивым усом* этого положения равновесия. Устойчивые и неустойчивые усы называют ещё *сепаратрисами* седловой неподвижной точки.

Выпустим из седловых точек $-\pi$ и π по усу, неустойчивому и устойчивому, соответственно. Раньше, в отсутствие периодического по времени возмущения, эти усы совпадали, так как они были линиями уровня гамильтониана $H = H(p, q)$. Теперь у нас гамильтониан не является первым интегралом задачи, а, значит, нет никакой причины, по которой эти усы должны совпадать. Это явление называется *расщеплением сепаратрис*. Оно было открыто Пуанкаре.

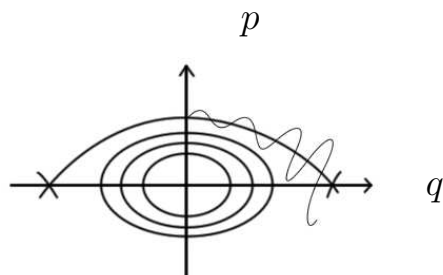


Слева невозмущённая система, справа возмущённая.

Если сепаратрисы пересеклись один раз, то при их продолжении мы опять получим пересечение.



Отображение Пуанкаре — это сдвиг вдоль траектории, поэтому оно должно сохранять площадь на фазовой плоскости. Так что на рисунке выше площадь 1 равна площади 2.) При приближении к седлу скорость падает, а площадь должна сохраняться. Поэтому картинка выглядит так, как на рисунке ниже.



Точки на усе расположены всё ближе и ближе друг к другу, а картинка в направлении поперёк уса вытягивается, и образуется бесконечное количество петель. Динамика процесса оказывается очень сложной.

Выше уже было сказано, что имеются точки, которые не ложатся ни на какие инвариантные кривые. Суммарная мера множества этих точек мала. Для случая, когда система аналитическая, в частности, для нашей задачи, суммарная мера, занятая этими точками, даже экспоненциально мала — $O\left(\exp\left(-\frac{C}{\varepsilon}\right)\right)$. (Площадь «ячейки» 1 тоже $O\left(\exp\left(-\frac{C}{\varepsilon}\right)\right)$.) В теории возмущений строятся ряды по степеням малого параметра, а экспонента меньше любой степени, поэтому такая теория возмущений описанных эффектов не охватывает.

В отличие от оценки сверху, получить оценку снизу величины расщепления сепаратрис оказалось сложно. Эта задача впервые была решена В. Ф. Лазуткиным в 1984 г. для классической модельной задачи — *стандартного отображения Чирикова–Тейлора*. Позже были работы, где вычислено расщепление не только для маятника, но и для ряда аналогичных задач. (В частности, Д. В. Трещёв, В. Г. Гельфрейх, А. Дельшамс.)

Высшие приближения в методе усреднения. Напомним, что рассматривается система

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon),\end{aligned}$$

в которой нужно сделать замену переменных $(I, \varphi) \rightarrow (J, \psi)$ так, чтобы избавиться от зависимости от быстрых фаз в правых частях. Замена ищется в виде

$$\begin{aligned}I &= J + \varepsilon u_1(J, \psi) + \varepsilon^2 u_2(J, \psi) + \dots, \\ \varphi &= \psi + \varepsilon v_1(J, \psi) + \varepsilon^2 v_2(J, \psi) + \dots.\end{aligned}$$

Мы хотим, чтобы уравнения для новых переменных имели следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{J} &= \varepsilon F_0(J) + \varepsilon^2 F_1(J) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega(J) + \varepsilon G_0(J) + \dots.\end{aligned}$$

Можно вычислять члены рядов один за другим, но полученные ряды будут расходиться. Однако мы будем не рассматривать ряды целиком, а обрывать их на каком-то месте:

$$\begin{aligned}I &= J + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^r u_r, \\ \varphi &= \psi + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^r v_r.\end{aligned}$$

Выбор членов порядка k и выше в замене переменных не меняет членов порядка ниже k в уравнениях для новых переменных. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{J} &= \varepsilon F_0(J) + \dots + \varepsilon^r F_r(J) + \varepsilon^{r+1} \alpha_{r+1}(J, \psi, \varepsilon), \\ \dot{\psi} &= \omega(J) + \varepsilon G_0(J) + \dots + \varepsilon^r G_r(J) + \varepsilon^{r+1} \beta_{r+1}(J, \psi, \varepsilon),\end{aligned}$$

то есть зависимость от угла у нас входит только в достаточно высоких степенях по ε .

Для приближения отбросим члены, которые содержат ψ . Тогда для J получим уравнение, не зависящее от фазы. Решив его, найдём $J(t)$, подставим в уравнение для ψ и явно найдём изменение $\psi(t)$.

Схема вычислений такова:

$$\begin{array}{ccc}
 I_0, \varphi_0 & \text{---} & I_{\text{прибл.}}(t), \varphi_{\text{прибл.}}(t) \\
 \downarrow & \text{Здесь решение приближённое,} & \uparrow \\
 J_0, \psi_0 & \text{так как мы оборвали ряды.} & J(t), \psi(t)
 \end{array}$$

Выясним, какая точность у этой процедуры.

Теорема 5.

$$\begin{aligned}
 |I(t) - I_{\text{прибл.}}(t)| &< C(r)\varepsilon^r, \\
 |\varphi(t) - \varphi_{\text{прибл.}}(t)| &< C(r)\varepsilon^{r-1}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Ясно, что при отбрасывании членов порядка ε^{r+1} на временах порядка ε^{-1} накопится погрешность порядка ε^r . Для фазы оценка хуже, так как дополнительный вклад вносит ошибка в вычислении J .

Спрашивается, существует ли какая-то предельная точность, которую можно таким образом достичь?

Оказывается, что в аналитическом случае $C(r) \sim \frac{r!}{\sigma^r}$. Происхождение этой оценки следующее. Правая часть уравнения для u_1 определяется функциями f и ω . В правую часть уравнения для u_k входит производная от u_{k-1} по J . Поэтому, чтобы найти u_k надо, в частности, $k-1$ раз дифференцировать f и ω . Скорость роста производных аналитической функции известна: они растут как $\frac{r!}{\sigma^r}$. Например,

$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(r)} \sim r!$. Величина σ в оценке скорости роста связана с размером области аналитичности: если область больше, то производные растут медленнее.

Отложим на графике зависимость точности приближения от номера приближения.

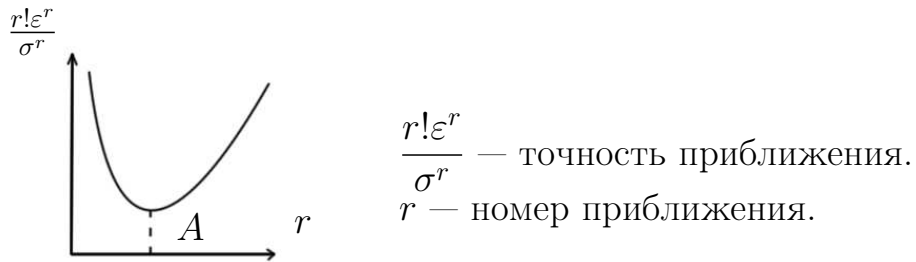


График имеет точку минимума. Нас интересует, где находится этот минимум и какой наилучшей точности можно добиться. Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\frac{r!}{\sigma^r} \varepsilon^r \sim \left(\frac{r\varepsilon}{e\sigma}\right)^r = \exp \left\{ r \left(\ln r + \ln \frac{\varepsilon}{e\sigma} \right) \right\},$$

откуда

$$r_{\text{оптимальное}} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

и наилучшая точность

$$r! \left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^r \gtrsim \exp \left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}\right).$$

В аналитических системах предельная точность экспоненциально мала, и достигнуть её можно.

Мы делали один шаг процедуры — усредняли гамильтониан — а можно делать несколько шагов и получать приближённые гамильтонианы, отбрасывая все меньшие члены. Фазовые портреты таких систем будут деформацией фазового портрета усреднённой системы.

Рассмотренная процедура довольно груба и позволяет только установить экспоненциальную малость точности приближения. Попробуем уточнить процедуру и найти показатель экспоненты. Для этого используется принадлежащий Д. В. Трещёву *метод непрерывного усреднения*. Будем рассматривать простейший случай: быстрая угловая переменная — это просто время (как в задаче о маятнике). Рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \varepsilon \hat{f}(\hat{x}, t), \\ \hat{f}(x, t + 2\pi) &= \hat{f}(x, t).\end{aligned}$$

Крышки над буквами поставлены для того, чтобы отличить исходную систему от преобразованной.

Выше мы строили преобразование, исключаящее быструю фазу из правых частей уравнений, в виде ряда по малому параметру ε . Члены этого ряда определялись последовательно. Вместе с ними определялись члены ряда для правых частей уравнений. Есть и другой способ. Можно строить искомое преобразование в виде композиции преобразований, исключаящих быструю фазу из правых частей уравнений со всё большей точностью. Эти преобразования строятся последовательно. После каждого преобразования возникают новые переменные:

$$\hat{x} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$$

Правые части уравнений для этих переменных тоже получают друг из друга:

$$\hat{f} \rightarrow f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \dots$$

Возникает дискретная динамическая система в пространстве правых частей уравнений. Д. В. Трещёв предложил рассматривать вме-

сто этой дискретной системы непрерывный поток изменений правых частей уравнений. Оказывается, работа с непрерывными потоками даёт неулучшаемые оценки. (“Здесь проявляется следующее общее явление: думать удобнее об отображениях..., а считать легче с потоками”, В. И. Арнольд “Математические методы классической механики”, Добавление 7, п. В.)

Метод непрерывного усреднения (Д. В. Трещёв). В рассматриваемой системе делаются замены переменных, индексированные непрерывным параметром s :

$$\begin{aligned}\hat{x} &\rightarrow x, \\ \hat{x} &= \hat{x}(x, t, s).\end{aligned}$$

Замену переменных будем определять как сдвиг вдоль решений дифференциального уравнения с независимой переменной s . Тогда для новых переменных

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon f(x, t, s), \\ \frac{dx}{ds} &= \varepsilon h(x, t, s)\end{aligned}$$

с не определенной пока функцией h . Также должны быть уравнения совместности, неоднократно уже выписывавшиеся другими лекторами. Опустим выкладки и приведём конечный результат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{\partial h}{\partial t} + \varepsilon \left[\frac{\partial h}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} h \right], \\ f|_{s=0} &= \hat{f} \quad \text{— начальное условие.}\end{aligned}$$

Хотим определить функцию h так, чтобы при движении вдоль траектории зависимость функции f от t убывала, и чтобы h получалась из f действием некоторого оператора: $h = A[f]$. Опустим наводящие соображения и заметим, что

$$f = f_0 + \tilde{f},$$

где $f_0 = \langle f \rangle$ — это среднее значение функции f , а $\tilde{f}$ — это чисто периодическая часть f .

Введём оператор, который называется *интегрирующим оператором* и применяется только к функциям с нулевым средним:

$$\{\tilde{f}\} = \int_0^t \tilde{f} dt_1 - \left\langle \int_0^t \tilde{f} dt_1 \right\rangle.$$

Видно, что $\frac{d}{dt} \{\tilde{f}\} = \tilde{f}$.

Пусть $h = -\{\tilde{f}\}$. Получается уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\{\tilde{f}\} + \varepsilon \left[-\frac{\partial \{\tilde{f}\}}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial x} \{f\} \right].$$

Это уравнение в частных производных. Попробуем его решить.

Построим нулевое приближение:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\tilde{f}, \quad f = f_0 + \tilde{f},$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} = -\tilde{f}. \end{cases}$$

Отсюда $f_0 = \hat{f}_0$, $\tilde{f} = e^{-s}\hat{f}$, то есть чисто периодическая часть убывает экспоненциально с возрастанием s .

Но мы уже знаем, что совсем избавиться от зависимости от времени нельзя. Значит, в процедуре должны быть препятствия к этому. Эти препятствия становятся видны при построении следующего приближения.

$$f_0 = \hat{f}_0 + O(\varepsilon) \quad (\text{в первом приближении}),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial s} = -\tilde{f} + \varepsilon \left[-\frac{\partial \{\tilde{f}\}}{\partial x} f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x} \{\tilde{f}\} \right].$$

Введем новую искомую функцию q :

$$\tilde{f} = e^{-s}q, \quad \text{где } q \text{ — функция с нулевым средним.}$$

Подстановка в уравнение даст

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \varepsilon \left[-\frac{\partial \{q\}}{\partial x} f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x} \{q\} \right].$$

Можно попытаться решить это уравнение методом Фурье, для чего представить функции в виде

$$q = \sum q_k e^{ikt},$$

$$\{q\} = \frac{q_k}{ik} e^{ikt}.$$

Подставим эти выражения в уравнение для q и получим уравнение для коэффициентов Фурье

$$\frac{\partial q_k}{\partial s} = \frac{\varepsilon}{ik} \left[-\frac{\partial q_k}{\partial x} f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x} q_k \right], \quad q_k|_{s=0} = \hat{q}_k = \hat{f}_k.$$

Обозначим $\theta = \frac{\varepsilon}{ik}s$. Надо научиться решать уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial x}f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}p.$$

А это уравнение описывает, как меняется векторное поле p при сдвиге вдоль потока векторного поля f_0 . Его мы решать умеем: если g^θ — поток векторного поля f_0 , то решение имеет вид

$$p(x, \theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x} g^{-\theta}(x) \right)^{-1} \hat{p}(g^{-\theta}(x)),$$

Отсюда получаем

$$f_k = e^{-s} \left(\frac{\partial}{\partial x} g^{\frac{i\varepsilon s}{k}}(x) \right)^{-1} \hat{f}_k \left(g^{\frac{i\varepsilon s}{k}}(x) \right),$$

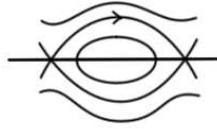
где f_k есть k -й коэффициент Фурье функции f .

Получилось, что надо двигаться вдоль решений усредненной системы в мнимом времени и брать значения коэффициентов Фурье функции f на рассматриваемых решениях. Нет оснований полагать, что мы можем бесконечно продолжать решение в комплексном времени. При большом $s = s_* \sim 1/\varepsilon$ в формуле для f_k может возникнуть особенность. Это может быть особенность решения усредненной системы с заданным начальным значением x , или особенность функции $\hat{f}_k$. Только до членов порядка e^{-s_*} возможно устранение зависимости правой части уравнения от времени.

Пример 5. Пусть усреднённая система — это математический маятник. Гамильтониан имеет вид

$$F_0 = \varepsilon \left[\frac{1}{2}p^2 - \cos^2 q \right].$$

Фазовый портрет:



Движение по сепаратрисе с начальным условием $q = 0$ при $t = 0$ задается формулой

$$\sin \frac{q}{2} = \frac{e^{2\varepsilon t} - 1}{e^{2\varepsilon t} + 1}.$$

Остальные решения выражаются через эллиптические функции. Ближайший к вещественной оси полюс соответствует сепаратрисному решению: $\varepsilon t_* = \pi i/2$. Значит, можно выбрать $s_* = \frac{\pi}{2\varepsilon}$.

Величина расщепления сепаратрис в этой задаче $e^{-\frac{\pi}{2\varepsilon}}$. Это наилучшая точность, с которой можно избавиться от зависимости от времени в окрестности сепаратрисы.

Лекция 3.

Начнём с вопроса об усреднении в системах с переходами через сепаратрису. Чтобы поставить эту задачу, вспомним, откуда возникают одночастотные системы.

Общий вид системы уравнений для применения теории возмущений:

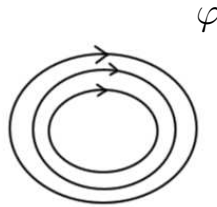
$$\dot{x} = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Одночастотные системы получаются в случае, если у невозмущённой системы число первых интегралов на единицу меньше, чем размерность фазового пространства. Тогда компактный связный совместный уровень интегралов, если они независимы на этом уровне, —

окружность. В некоторой окрестности этой окружности другие совместные уровни интегралов — также окружности. Если векторное поле невозмущённой системы не обращается в нуль в этой окрестности, то в ней можно ввести вместо x новые переменные

$$I = (I_1, I_2, \dots, I_{l-1}), \varphi,$$

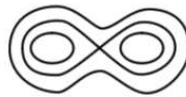
где I — вектор значений интегралов невозмущённой системы, а φ — фаза, равномерно изменяющаяся в невозмущённой системе угловая переменная на кривых совместного уровня интегралов.



Изменение переменных I, φ при наличии возмущения описывается одночастотной системой

$$(**) \begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon). \end{cases}$$

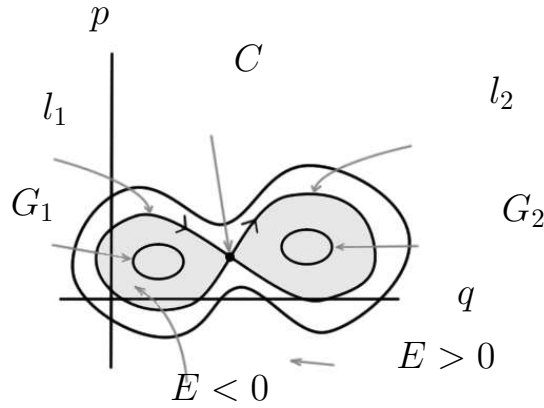
Пусть теперь первые интегралы $I_1, \dots, I_{l-1}$ зависимы. Если, например, $l = 2$ (движение происходит на плоскости), то первый интеграл I всего один. То, что интеграл I_1 “зависим” здесь означает, что в какой-то точке $\text{grad } I_1 = 0$. Тогда расслоение фазовой плоскости на окружности имеет особенность, например, как на рисунке ниже.



Мы будем рассматривать следующий по простоте случай: какие-то $l - 2$ из $l - 1$ первых интегралов независимы. Можно рассмотреть их совместный уровень — двумерную поверхность, на которой и строить линии уровня оставшегося первого интеграла. Пусть $z \in \mathbb{R}^{l-2}$ — вектор значений независимых интегралов. Рассмотрим совместный уровень этих интегралов, и на этом уровне введём переменные p, q . Оставшийся первый интеграл E будет функцией от p, q, z : $E = E(p, q, z)$. Невозмущённая система получится, например, такой:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial E}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial q}, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Будем предполагать, что фазовый портрет функции E на плоскости (p, q) имеет следующий вид:



Есть седловая особая точка C , через неё проходят сепаратрисы l_1 и l_2 . Обозначим через G_1 и G_2 области внутри петель сепаратрис l_1 и l_2 , соответственно. Обозначим через G_3 область снаружи от этих петель. Сепаратрисы определяются условием, что значение гамильтониана E невозмущённой системы на сепаратрисе такое же, как в

седле. Будем нормировать E условием, что в седле и на сепаратрисах $E = 0$. Пусть $E > 0$ в области G_3 , и $E < 0$ в областях G_1 и G_2 . Можно было бы рассматривать и другие фазовые портреты, но для определённости ограничимся портретом, нарисованным выше. Выпишем возмущённую систему:

$$(***) \begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial E}{\partial p} + \varepsilon f_1, \\ \dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial q} + \varepsilon f_2, \\ \dot{z} = \varepsilon f_3, \end{cases}$$

где $f_i = f_i(p, q, z, \varepsilon)$.

В каждой из областей, на которые сепаратрисы делят фазовый портрет, можно ввести в качестве новых переменных E (интеграл невозмущённой системы) и фазу на невозмущённых траекториях, тем самым сведя систему к виду (**). Но на сепаратрисах правая часть системы (**) имеет особенности. Так что этой системой можно пользоваться, только отделившись от сепаратрис. Окрестность сепаратрис надо рассматривать отдельно.

Будем рассматривать эту задачу при следующих условиях:

1. C — невырожденное седло.
2. Введём

$$\Theta_\nu(z) = - \oint_{l_\nu} \left(\frac{\partial E}{\partial q} f_1^0 + \frac{\partial E}{\partial p} f_2^0 + \frac{\partial E}{\partial z} f_3^0 \right) dt, \quad \nu = 1, 2,$$

где $f_\nu^0 = f_\nu|_{\varepsilon=0}$. Также введём $\Theta_3(z) = \Theta_1 + \Theta_2$ и потребуем, чтобы $\Theta_i \neq 0$. Для определённости считаем, что $\Theta_i > 0$ при $i = 1, 2, 3$.

Выражение для Θ_ν надо понимать так. По сепаратрисе происходит движение, и координаты p, q становятся функциями от времени. Тогда и подынтегральное выражение в Θ_ν становится функцией от времени, и можно посчитать интеграл от этой функции. Движение по сепаратрисе требует бесконечного времени, и потому интегралы Θ_ν несобственные. Они сходятся, так как в седле $\frac{\partial E}{\partial q}$ и $\frac{\partial E}{\partial p}$ обращаются в нуль, а из нормировочного условия, что E в седле обращается в 0, следует, что и $\frac{\partial E}{\partial z}$ в седле обращается в нуль.

Величины $-\varepsilon\Theta_i$ дают в первом приближении изменение энергии за один виток обхода сепаратрисы. Условие $\Theta_i > 0$ гарантирует, что при движении вблизи сепаратрис энергия E от оборота к обороту убывает, и фазовая точка будет приближаться к сепаратрисе в области G_3 и удаляться от неё в областях G_1 и G_2 .

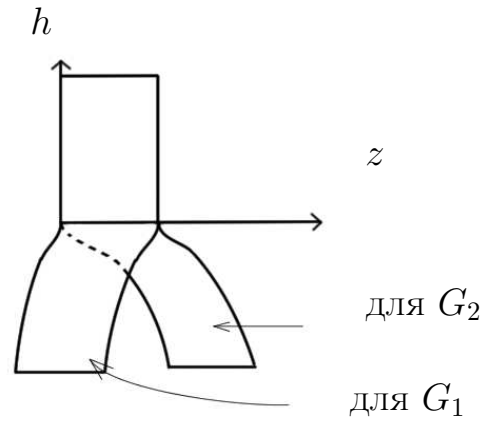
В каждой из областей G_i можно ввести усреднённую систему. В правых частях усреднение по фазе можно заменить усреднением по времени вдоль траектории невозмущённого движения. Получим усреднённую систему в виде

$$\begin{cases} \dot{h} = \frac{\varepsilon}{T} \oint_{E=h} \left(\frac{\partial E}{\partial q} f_1^0 + \frac{\partial E}{\partial p} f_2^0 + \frac{\partial E}{\partial z} f_3^0 \right) dt, \\ \dot{z} = \frac{\varepsilon}{T} \oint_{E=h} f_3^0 dt. \end{cases}$$

Здесь $T = T(h, z)$ — период движения по невозмущённой траектории.

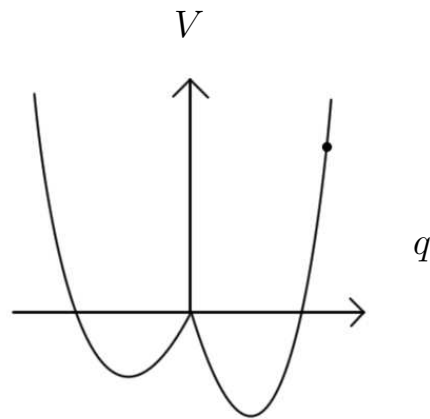
У нас есть три усреднённые системы, каждая со своим фазовым пространством. Теперь склеим эти фазовые пространства по их краям $h = 0$. Получим одну усреднённую систему, для которой фазовое пространство — это не гладкая поверхность, а многообразие с особенностями, склеенное из нескольких кусков. В нашем примере это книга с тремя страницами (см. рисунок), в других системах много-

образе может иметь более сложную структуру.

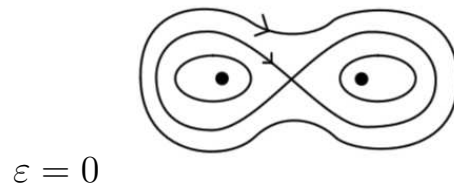


Если в точной системе мы начали движение во внешней области, G_3 , и вышли на сепаратису, то надо понять, в какую область, G_1 или G_2 , двигаться дальше. Проиллюстрируем эту ситуацию на примере.

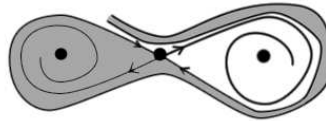
Пример 6 (принадлежит В. И. Арнольду). Рассмотрим движение в одномерной потенциальной яме с двумя минимумами при наличии малого трения. Например, катается шарик или по вертикальной проволоочной кривой в поле тяжести скользит бусинка.



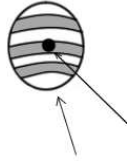
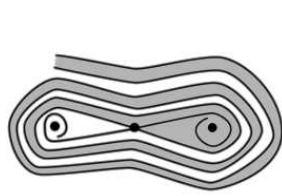
За счёт трения эта бусинка рано или поздно начнет колебаться вблизи одного из двух минимумов. Вообще говоря, трудно сказать, какого именно. Это используется в рулетках в казино, но там не два минимума, а тридцать семь. Вот фазовый портрет невозмущённой (без трения) системы:



Теперь добавим возмущение — малое трение. Вот как выглядит фазовый портрет возмущённой системы :



Центры превращаются в фокусы, а сепаратрисы скручиваются к фокусам или разматываются от седла. Плоскость разделяется сепаратрисами на узкие полосы, и все точки, оказавшиеся в одной полосе, уходят к одному и тому же фокусу. Если заштриховать те полосы, движение из которых заканчивается возле какого-то одного фокуса, то в окрестности $U_\delta(x)$ далёкой точки x раскраска полос будет чередоваться (здесь δ — радиус окрестности). Причём чем меньше коэффициент трения ε , тем уже полосы, и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы не сможем сказать, куда попадём из того или иного места окрестности $U_\delta(x)$. У задачи о том, куда мы попадем за время порядка $\sim 1/\varepsilon$ при заданном начальном условии нет детерминированного предела при $\varepsilon \rightarrow 0$.



точка вдали от сепаратрисы
весь шар U_δ радиуса δ
(показан увеличенным)

Вместе с тем отношение площадей заштрихованной $U_{\delta,\varepsilon}^1(x)$ и незаштрихованной $U_{\delta,\varepsilon}^2(x)$ частей окрестности $U_\delta(x)$ остаётся конечным. Поэтому разумно ввести понятие вероятности падения в ту или иную потенциальную яму, хотя наша система и детерминированная.

Определение 1. $\Pr_\nu(M_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mes } U_{\delta,\varepsilon}^\nu(M_0)}{\text{mes } U_\delta(M_0)}$ — *вероятность падения в яму с номером ν начальной точки M_0 .*

Предел по ε нужен из-за того, что нас интересует ситуация, когда полосы становятся всё уже и уже, а их самих в $U_\delta(M_0)$ всё больше и больше. А предел по δ — из-за того, что мы рассматриваем вероятность падения центральной точки M_0 .

Предыдущее определение как бы размазывает начальные условия. Вместо этого можно размазывать действующие силы, введя дополнительные случайные силы. Тогда попадание в ту или иную яму станет по-настоящему случайным событием. Вероятность этого события можно подсчитать и найти предел этой вероятности, когда величина случайной силы стремится к нулю. Примечательно, что вероятности, введённые двумя описанными способами, совпадают.

Есть третий вариант, предложенный Д. В. Аносовым. Фиксируем начальную точку и смотрим, при каких ε она попадает в левую яму, а при каких — в правую. Вероятность падения при таком подходе определяется формулой

$$\Pr_\nu(M_0) = \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{\text{mes}\{\varepsilon \in (0; \varepsilon_0) : \begin{array}{l} \text{при данном } \varepsilon \text{ точка } M_0 \\ \text{попала в яму с номером } \nu \end{array}\}}{\varepsilon_0}.$$

Этим определением почти не пользовались, но когда по нему подсчитывали, результат оказывался тем же, что и при двух предыдущих определениях.

Мы будем пользоваться данным выше Определением 1 применительно к общей задаче, описываемой уравнениями (* * *). Само понятие “захват в область G_ν ” в общем случае определено не очень чётко. Ему можно давать разные определения. При любом разумном определении справедлив следующий результат.

Теорема 6.

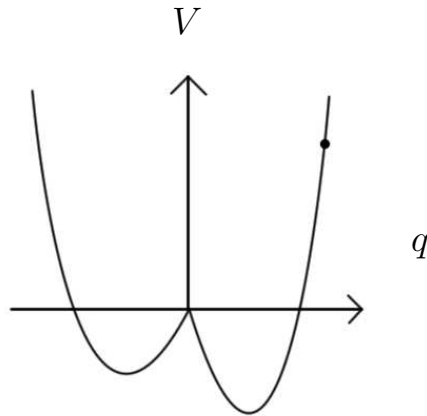
$$\text{Pr}_\nu(M_0) = \frac{\Theta_\nu(z^*)}{\Theta_1(z^*) + \Theta_2(z^*)},$$

где z^* — это та точка, в которую решение усредненной системы приходит при выходе плоскость $h = 0$ (т.е. на сепаратрису).

По формулировке теорема простая и естественная, но доказываться довольно сложно.

Оказывается, можно определить понятие захвата в область G_ν так, что для исходного шара начальных условий U_δ имеет место разбиение $U_\delta = U_{\delta,\varepsilon}^{(1)} \cup U_{\delta,\varepsilon}^{(2)} \cup v$ со следующими свойствами. (а) $\text{mes}(v) = O(\varepsilon^r)$, где r — любое наперед заданное фиксированное положительное число. (б) При начальных условиях из $U_{\delta,\varepsilon}^{(\nu)}$ фазовая точка захватится в область G_ν и поведение E, z вдоль траектории описывается решением усреднённой системы с точностью $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$. (И разбиение, и точность метода усреднения зависят от выбора числа r . С ростом r константа $C(r)$ в оценке точности метода усреднения величиной $C(r)\varepsilon \ln \varepsilon$ увеличивается.)

Пример 7 (движение в той же самой двойной потенциальной яме).



Уравнение движения:

$$\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q} - \varepsilon \dot{q}.$$

Член $-\varepsilon \dot{q}$ — это самый простой вариант действия силы трения. В канонических переменных:

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial V}{\partial q} - \varepsilon p. \end{cases}$$

Гамильтониан $E = \frac{p^2}{2} + V(q)$.

Надо посчитать интеграл по сепаратрисе. Если S_ν — площадь, ограниченная сепаратрисой l_ν , то в координатах $(q, p) = (q, \dot{q})$ получим

$$\Theta_\nu = \int_{l_\nu} p^2 dt = \int_{l_\nu} \dot{q}^2 dt = \oint_{l_\nu} \dot{q} dq = S_\nu.$$

Следовательно, вероятность падения в яму с номером ν равна $\frac{S_\nu}{S_1 + S_2}$ и не зависит от выбора начальной точки в G_3 .

Усреднение в многочастотных системах с постоянными частотами. Возвращаемся к старой задаче

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{cases}$$

где $I \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Теперь мы рассматриваем случай $\omega = \text{const}$. Усреднённая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon F(J), \\ F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \oint_{\mathbb{T}^m} f(J, \varphi, 0) |d\varphi|, \end{cases}$$

где $|d\varphi|$ обозначает элемент объёма тора $\mathbb{T}^m$.

Как мы обсуждали, плохо, когда вектор частот резонансный. Но мы потребуем не просто нерезонансности.

Определение 2. Говорят, что ω — *диофантов с показателем ν и коэффициентом γ* и пишут $\omega \in \mathcal{D}(\nu, \gamma)$, если

$$|(k \cdot \omega)| > \gamma |k|^{-\nu} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}.$$

Точка между k и ω обозначает скалярное произведение, а под $|k|$ понимается любая разумная длина вектора k .

Лемма 1. Пусть $\nu > m - 1$. Тогда

$$\text{mes}\left(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\gamma} \mathcal{D}(\nu, \gamma)\right) = 0,$$

то есть почти любой вектор диофантов с каким-то γ .

Теорема 7. Пусть ω — диофантов, а функция f достаточно гладкая. Тогда

$$|I(t) - J(t)| < C\varepsilon \quad \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Константа C зависит от показателя и коэффициента диофантовости вектора: чем меньше γ , тем хуже оценка.

Схема доказательства. Сделаем замену $(I, \varphi) \rightarrow (\bar{I}, \varphi)$, такую, что $I = \bar{I} + \varepsilon u(\bar{I}, \varphi)$. Хотим подобрать u так, чтобы убрать зависимость от фазы из правых частей уравнений хотя бы в главном приближении. Уравнение для u выглядит так же, как в одночастотном случае,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \omega = f(\bar{I}, \varphi, 0) - F(\bar{I}),$$

только теперь ω — вектор.

Пусть f разложена в ряд Фурье: $f = \sum_k f_k e^{ik \cdot \omega}$. Будем искать u тоже в виде ряда Фурье. Продифференцируем, приравняем коэффициенты и получим

$$(* **) \quad u(\bar{I}, \varphi) = \sum_{k \neq 0} \frac{f_k e^{ik \cdot \omega}}{ik \cdot \omega}.$$

Надо, чтобы этот ряд и ряды для производных u сходились. Оценку снизу знаменателей в формуле для u даёт условие диофантовости ω . Если функция f достаточно гладкая, то f_k достаточно быстро убывают с ростом номера k , и ряды сходятся. В главном приближении мы получим

$$\dot{I} = \varepsilon F(\bar{I}) + O(\varepsilon^2).$$

Дальше всё аналогично одномерному случаю:

$$\dot{J} = \varepsilon F(J),$$

решения $\bar{I}$ и J не могут далеко разойтись, а $\bar{I}$ и I близки, так как отличаются только на замену переменных. $\square$

Усреднение в многочастотных системах с непостоянными частотами. Пусть теперь частота ω зависит от медленных переменных I :

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon). \end{cases}$$

Можно пытаться точно так же делать замены переменных и сводить исходную систему к усреднённой. Нам бы пришлось написать ту же самую формулу для замены переменных, но так как ω зависит от $\bar{I}$, возникают серьёзные трудности. В фазовом пространстве для заданного k имеется *резонансная поверхность*, на которой $k \cdot \omega(\bar{I}) = 0$. На этой поверхности замена переменных не определена, так как знаменатель в формуле (***) для функции u обращается в нуль. Около поверхности замена определена, но u очень велика, а мы бы хотели делать замену, близкую к тождественной. Такая поверхность есть для каждого k , и ситуация выглядит безнадёжной. Но, как ни странно, метод усреднения работает для большинства начальных условий. Чем больше начальных условий выкинуть, тем лучше работает метод. Мы этого доказывать не будем, а вместо этого рассмотрим пример того, что может случиться.

Если у нас всего один резонансный член (то есть в ряде Фурье для f присутствует всего одна комбинация фаз $k \cdot \varphi$), то можно ввести резонансную переменную $\gamma = k \cdot \varphi$. У нас получилась одночастотная система с быстрой фазой γ , но частота может обращаться в нуль.

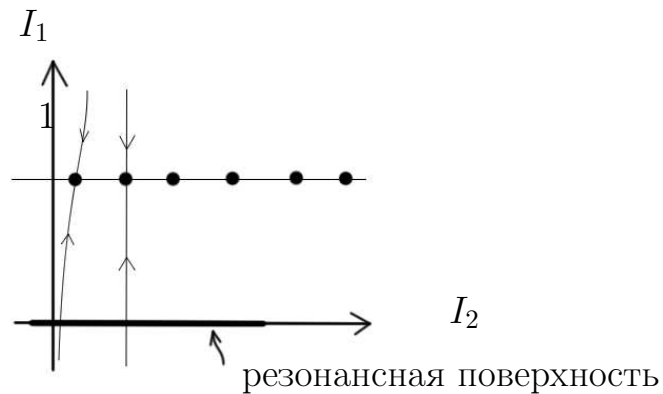
Пример 8.

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \varepsilon(1 - a \sin \gamma - I_1), \\ \dot{I}_2 = \varepsilon \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = I_1. \end{cases}$$

Здесь имеются две медленные переменные и одна быстрая. Частота быстрой переменной обращается в нуль, когда $I_1 = 0$. Усреднённая система получается усреднением по γ :

$$\begin{cases} \dot{J}_1 = \varepsilon(1 - J_1), \\ \dot{J}_2 = 0. \end{cases}$$

Движение в усреднённой системе выглядит следующим образом:



Решения усреднённой системы проходят через резонансную поверхность (усреднённая система про резонансы не знает). Выясним, что будет в точной системе возле резонансной поверхности $I_1 = 0$. Для этого продифференцируем по времени обе части равенства $\dot{\gamma} = I_1$. Получим

$$\ddot{\gamma} = \varepsilon(1 - a \sin \gamma - \dot{\gamma}).$$

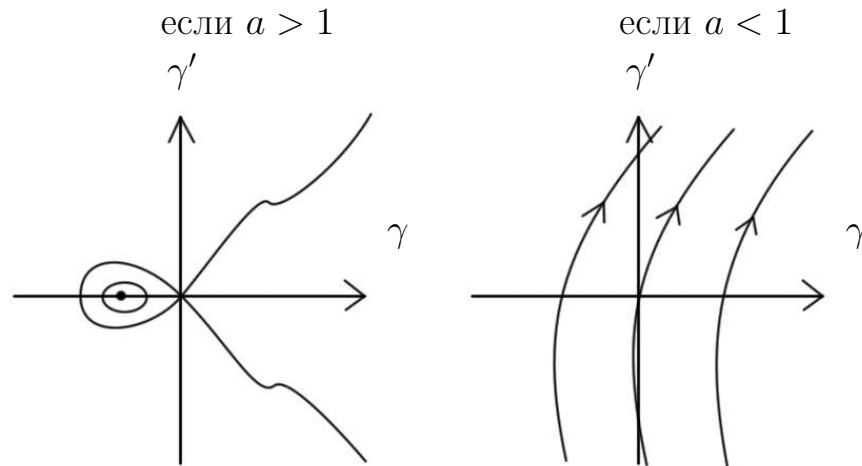
Отметим, что

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\varepsilon} \frac{d\gamma}{d(\sqrt{\varepsilon}t)}, \quad \ddot{\gamma} = \varepsilon \frac{d^2\gamma}{d(\sqrt{\varepsilon}t)^2}.$$

Введём $\theta = \sqrt{\varepsilon}t$. Обозначим $\frac{d}{d\theta}(\quad) = (\quad)'$. Уравнение для γ перепишется в виде

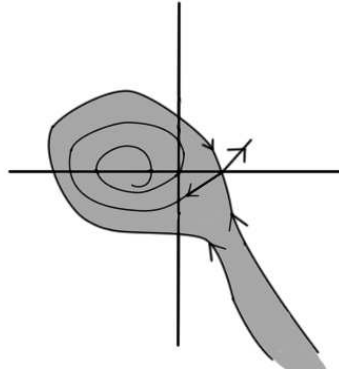
$$\gamma'' = 1 - a \sin \gamma - \sqrt{\varepsilon} \gamma'.$$

Для приближенного описания динамики попробуем, воспользовавшись малостью ε , отбросить последний член. Новое невозмущённое уравнение имеет вид $\gamma'' = 1 - a \sin \gamma$. Это уравнение маятника с постоянным крутящим моментом. Нарисуем его фазовый портрет.



Резонансная прямая — $\gamma' = 0$, и при $a > 1$ на ней есть положения равновесия.

Если мы добавим трение $\sqrt{\varepsilon} \gamma'$, то есть рассмотрим уравнение $\gamma'' = 1 - a \sin \gamma - \sqrt{\varepsilon} \gamma'$, то центр на фазовом портрете превратится в фокус, и картинка будет такой:



Образуется узкая полоса (на рисунке закрашена), такая, что если стартовать из неё, то мы подойдём к резонансу и далее останемся около него. Это явление называется *захватом в резонанс*.

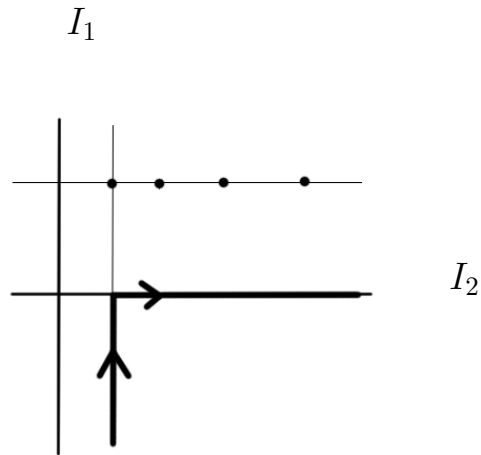
Имеется ещё одна медленная переменная, I_2 , и можно выяснить, как изменяется она. Уравнение для I_2 записывается как

$$I_2' = \sqrt{\varepsilon} \sin \gamma .$$

Значит, I_2 будет меняться медленно. Для описания этого изменения после захвата в резонанс можно снова воспользоваться методом усреднения и приближённо написать

$$I_2' \approx \sqrt{\varepsilon} \langle \sin \gamma \rangle = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a} \quad (\text{для определённости считаем } a > 0) .$$

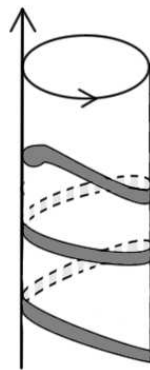
(Здесь угловые скобки обозначают усреднение по фазе колебаний маятника без трения. В колебательной области этого маятника можно ввести новые переменные: энергию и фазу колебаний. При учете трения уравнения для этих переменных и I_2 имеют стандартный вид для применения метода усреднения.) Получается, что I_2 растёт со скоростью $\sim \sqrt{\varepsilon}$. На плоскости (I_1, I_2) траектории состоят из двух образующих прямой угол лучей, то есть ведут себя совсем не так, как им предписывает усреднённая система.



Возникает вопрос о том, сколько этих траекторий. Их всё-таки мало, так как $I_1 = \dot{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}\gamma'$, и узкая область, где γ колеблется, имеет ширину порядка $\sqrt{\varepsilon}$ по I_1 . Доля начальных данных, захватывающихся в резонанс, как можно подсчитать, тоже порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Но вспомним, что γ — переменная на окружности, так что на самом деле движение по переменным γ, I_1 происходит на цилиндре, а полоса захвата в резонанс обматывается вокруг цилиндра. Поэтому далеко от резонансной прямой точки, захватывающиеся и не захватывающиеся в резонанс, перемежаются.

$$\dot{\gamma} = I_1$$



При $\varepsilon \rightarrow 0$ уместно ввести понятие вероятности попадания в область захвата в резонанс. Подсчёты дадут значение вероятности $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Тем самым метод усреднения не работает для начальных условий, которых суммарно $\sim \sqrt{\varepsilon}$. При остальных начальных условиях метод работает, но со средней точностью $\sim \sqrt{\varepsilon}$.