

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

УДК 517.9, 515.16, 53.51

Годовой отчет ведущего ученого
по договору N 11.G34.31.0005
“Геометрические методы в математической физике”
за 2011 год

Руководитель проекта
профессор Борис Анатольевич Дубровин

Москва — 2011

Реферат

Отчет состоит из 302 страниц в одной книге, снабжен 5 рисунками.

Ключевые слова: гамильтоновы уравнения в частных производных, интегрируемая иерархия, тета-функция.

В 2011 году научные исследования, проводимые в рамках утвержденного Плана работ, были сконцентрированы на решении следующих основных задач:

Анализ интегрируемых гамильтоновых возмущений высших порядков для систем гидродинамического типа с одной пространственной переменной.

Классификация слабых сингулярностей общего вида для решений квазилинейных гамильтоновых УрЧП с одной и двумя пространственными переменными.

Разработка теории изомонодромных деформаций линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка.

Эти задачи в целом успешно решены. Был также получен ряд вспомогательных результатов, которые планируется использовать в дальнейшем.

Был организован ряд международных конференций и летняя школа для студентов и аспирантов по геометрии и матфизике.

Наряду с руководителем проекта, в работе приняли участие следующие специалисты:

ФИО	разделы
Павлов Максим Валентинович	1
Кляйн Кристиан	1
Богаевский Илья Александрович	2
Гриневич Петр Георгиевич	2
Гаврилюк Андрей Александрович	3
Козачок Марина Александровна	3,4
Магазинов Александр Николаевич	3,4
Гарбер Алексей Игоревич	3
Долбилин Николай Иванович	3
Миронов Андрей Евгеньевич	5
Миллионщиков Дмитрий Владимирович	5

Буряк Александр Юрьевич	5
Казанцев Александр Дмитриевич	5
Веревкин Яков Александрович	5
Мальцев Андрей Яковлевич	5
Прасолов Максим Вячеславович	5
Натанзон Сергей Миронович	6,7
Белавин Александр Абрамович	6
Елаева Мария Сергеевна	7
Шастин Владимир Алексеевич	7,11
Гусейн-Заде Сабир Меджидович	7
Пенской Алексей Викторович	8
Алания Леван Анзорович	8
Смирнов Сергей Валерьевич	9
Мануйлов Владимир Маркович	10
Мищенко Александр Сергеевич	10
Корчагин Антон Игоревич	10
Скрипченко Александра Сергеевна	11
Бурангулов Павел Александрович	11
Троицкий Евгений Вадимович	12
Лучников Никита Дмитриевич	12
Пономарев Виктор Геннадьевич	12
Герасимова Мария Алексеевна	12
Гугнин Дмитрий Владимирович	13
Панов Тарас Евгеньевич	13
Бухштабер Виктор Матвеевич	13
Ероховец Николай Юрьевич	13
Устиновский Юрий Михайлович	13
Гайфуллин Александр Александрович	13
Василевский Борис Олегович	14
Лимонченко Иван Юрьевич	14
Попеленский Михаил Юрьевич	14
Бобов Кирилл Николаевич	15
Дмитриев Константин Вячеславович	15

Зотов Дмитрий Игоревич	15
Крюков Роман Вячеславович	15
Шуруп Андрей Сергеевич	15
Кишуева Ида Аслановна	15
Белиловская Элана Владимировна	15

Содержание

1. Теория возмущений для гамильтоновых уравнений в частных производных и ее приложения	5
2. Волновые фронты гиперболических систем линейных уравнений	78
3. Проблема Калаи о нижней оценке для общего числа граней в центральносимметричном многограннике	97
4. Исследование комбинаторных свойств разбиений евклидова пространства на параллелоэдры	122
5. Коммутативные кольца дифференциальных операторов и топологическая структура гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий	128
6. Полный набор операторов разрезания и склейки в теории Гурвица-Концевича	141
7. Алгебра дифференциальных операторов, порожденных диаграммами Юнга	164
8. Экстремальные метрики: спектральная геометрия и уравнения математической физики	175
9. Полудискретные цепочки Тода	180
10. Полуобратимые расширения C^* -алгебр	193
11. Трехстраничные плетения и R -матрицы	199
12. Исследование характера Чженя калибровочно-инвариантных семейств	231
13. Теория Бухштабера-Риса n -гомоморфизмов Фробениуса	267
14. Функция Грина двумерного дискретного оператора Шредингера	271
15. Применение общих методов решения двумерных и трехмерных обратных волновых задач в приложении к проблемам томографирования	276
Заключение	302
Список приложений	302

Раздел 1.

Теория возмущений для гамильтоновых уравнений в частных производных и ее приложения

1 Теория интегрируемости гамильтоновых квазилинейных уравнений первого порядка и их возмущений. Препятствия к интегрируемости и пертурбативные тесты на интегрируемость

Основным объектом изучения являются гамильтоновы системы уравнений в частных производных представленные в виде *длинноволнового разложения* (также называемого разложением по малой дисперсии)

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x + B_2(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}) + B_3(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_{xxx}) + \dots \quad (1.1)$$

Здесь

$$\mathbf{u} = (u^1(x, t), \dots, u^n(x, t))^T$$

– неизвестная вектор–функция пространственной переменной x и временной переменной t , $A(\mathbf{u})$ – матрица, элементы которой являются гладкими функциями на некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$; предполагается, что характеристические корни $\lambda_1(\mathbf{u}), \dots, \lambda_n(\mathbf{u})$ этой матрицы попарно различны

$$\det(A(\mathbf{u}) - \lambda \cdot 1) = 0, \quad \lambda_i(\mathbf{u}) \neq \lambda_j(\mathbf{u}) \quad \text{при } i \neq j, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Последующие члены $B_2, B_3, \dots, B_k, \dots$ этого разложения¹ правой части уравнений (1.1) должны зависеть полиномиально от производных переменных \mathbf{u} по x :

$$\mathbf{u}_x = (u_x^1, \dots, u_x^n), \quad \mathbf{u}_{xx} = (u_{xx}^1, \dots, u_{xx}^n), \quad \dots$$

¹Быть может, более логично было бы обозначить главный член разложения через

$$A(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x =: B_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x).$$

Мы не будем здесь этого делать. Отметим лишь то важное обстоятельство, что члены нулевой степени (т.е., зависящие только от \mathbf{u} но не от пространственных производных) не появляются в правой части разложения (1.1).

Более точно, они должны быть градуированно однородными полиномами степеней $2, 3, \dots, k, \dots$,

$$\deg B_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k \quad (1.3)$$

$$\deg \frac{\partial^m u^i}{\partial x^m} = m, \quad m > 0, \quad \deg u^i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Мы предполагаем, что коэффициенты этих полиномов являются гладкими функциями на той же самой области \mathcal{D} .

Уравнения (1.1) могут рассматриваться, как возмущения квазилинейной системы уравнений первого порядка вида

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x \quad (1.4)$$

при рассмотрении медленно меняющихся решений, т.е. таких вектор-функций $\mathbf{u}(x)$, которые изменяются на величину порядка 1 лишь на больших пространственных масштабах $L \gg 1$. Амплитуда $|\mathbf{u}(x)|$ этих вектор-функций *не предполагается* малой. Естественным малым параметром служит величина

$$\epsilon = \frac{1}{L} \quad (1.5)$$

появляющаяся в оценках производных

$$\mathbf{u}_x \sim \epsilon, \quad \mathbf{u}_{xx} \sim \epsilon^2, \dots, \mathbf{u}^{(k)} \sim \epsilon^k, \dots \quad (1.6)$$

Удобно переписать уравнения, вводя *медленные переменные*, т.е. делая замену

$$x \mapsto \epsilon x, \quad t \mapsto \epsilon t. \quad (1.7)$$

Система (1.1) переписется в виде

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x + \epsilon B_2(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}) + \epsilon^2 B_3(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_{xxx}) + \dots \quad (1.8)$$

В этих обозначениях главный член (1.4) возникает в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Нашей основной задачей является распространение подхода, предложенного в [19], на случай систем гамильтоновых уравнений в частных производных. Существенные отличия этого случая от рассмотренных в [19] скалярных уравнений проявляются уже в теории двухкомпонентных систем с изложения которой мы и начнем. Ключевыми словами развитых конструкций является процедура продолжения инфинитезимальных симметрий, D -оператор, квазитривиальность, струнное уравнение.

Напомним, что в скалярном случае *произвольное* гамильтоново возмущение сохраняет интегрируемость вплоть до высоких порядков по отношению к малому параметру ϵ . Для систем это не так: уже для систем второго

порядка интегрируемость разрушается в порядке ϵ^2 . Начнем с объяснения соответствующих результатов.

Перейдем к изложению развитой теории интегрируемости гамильтоновых систем гидродинамического типа. Начнем с квазилинейных систем второго порядка вида (1.4) ($n = 2$). Основные идеи развитого подхода будут объяснены для важного в приложениях частного случая нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - \partial_x^2 P'(u) = 0. \quad (1.9)$$

Здесь $P(u)$ – заданная гладкая функция. Уравнение (1.9) линейно, если функция $P(u)$ квадратична. Поэтому мы предположим, что

$$P'''(u) \neq 0.$$

Нужно ли говорить, что уравнение (1.9) само по себе является важнейшим объектом, изучаемым в теории нелинейных уравнений в частных производных. Для нас важно указать те специальные случаи нелинейного волнового уравнения, которые возникают как длинноволновые пределы важных в приложениях уравнений в частных производных высшего порядка. Например, при $P(u) = -\frac{1}{6} u^3$ мы получаем бездисперсный предел

$$u_{tt} + (u u_x)_x = 0 \quad (1.10)$$

уравнения Буссинеска

$$u_{tt} + (u u_x)_x + u_{xxxx} = 0. \quad (1.11)$$

При $P(u) = e^u$ уравнение (1.9) сводится к длинноволновому пределу

$$u_{tt} = \partial_x^2 e^u \quad (1.12)$$

уравнений цепочки Тоды

$$\ddot{u}_n = e^{u_{n+1} - u_n} - e^{u_n - u_{n-1}}. \quad (1.13)$$

Более общо, одномерная цепочка частиц с нелинейным взаимодействием соседей

$$H = \sum \frac{1}{2} p_n^2 + P(q_n - q_{n-1}) \quad (1.14)$$

с потенциалом взаимодействия $P(u)$ (обобщенная система Ферми – Паста – Улама) после интерполяции

$$q_n(t) - q_{n-1}(t) = w(\epsilon n, \epsilon t) \quad (1.15)$$

$$p_n(t) = v(\epsilon n, \epsilon t)$$

и замены

$$u = \frac{\epsilon \partial_x}{1 - e^{-\epsilon \partial_x}} w \quad (1.16)$$

приводит к следующей системе

$$\begin{aligned}
u_t &= v_x \\
v_t &= \epsilon^{-1} \left[P' \left(\frac{e^{\epsilon \partial_x} - 1}{\epsilon \partial_x} u \right) - P' \left(\frac{1 - e^{-\epsilon \partial_x}}{\epsilon \partial_x} u \right) \right] \\
&= \partial_x P'(u) + \frac{\epsilon^2}{24} [2 P''(u) u_{xxx} + 4 P'''(u) u_x u_{xx} + P^{IV}(u) u_x^3] + \mathcal{O}(\epsilon^4).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

В предыдущих формулах тейлоровские разложения по ϵ понимаются как формальные ряды:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{e^{\epsilon \partial_x} - 1}{\epsilon \partial_x} u = \frac{1}{\epsilon} \int_x^{x+\epsilon} u(s) ds = u + \sum_{k \geq 1} \frac{\epsilon^k}{(k+1)!} u^{(k)}, \\
u &= w + \frac{1}{2} \epsilon w' + \sum_{k > 1} \frac{B_k}{k!} \epsilon^k w^{(k)},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

а B_k – это числа Бернулли. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ система уравнений(1.17) сводится к нелинейному волновому уравнению, записанному в виде системы

$$\begin{aligned}
u_t &= v_x \\
v_t &= \partial_x P'(u).
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Другие примеры нелинейных волновых уравнений и их возмущений будут описаны в разделе ??.

Систему (1.19) можно записать в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned}
u_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta v(x)} \\
v_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

с гамильтонианом

$$H = \int \left[\frac{1}{2} v^2 + P(u) \right] dx. \tag{1.21}$$

Соответствующая скобка Пуассона имеет вид

$$\{u(x), v(y)\} = \delta'(x - y). \tag{1.22}$$

Другими словами, скобка Пуассона двух локальных функционалов

$$F = \int f(u, v; u_x, v_x, \dots) dx, \quad G = \int g(u, v; u_x, v_x, \dots) dx$$

– это локальный функционал, задаваемый формулой

$$\{F, G\} = \int \left[\frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta v(x)} + \frac{\delta F}{\delta v(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} \right] dx. \quad (1.23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta u(x)} &= E_u f, & \frac{\delta G}{\delta u(x)} &= E_u g \\ \frac{\delta F}{\delta v(x)} &= E_v f, & \frac{\delta G}{\delta v(x)} &= E_v g \end{aligned}$$

вариационные производные, действие которых на плотностях локальных функционалов определяется операторами Эйлера – Лагранжа,

$$E_u := \frac{\partial}{\partial u} - \partial_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \partial_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \dots \quad (1.24)$$

$$E_v := \frac{\partial}{\partial v} - \partial_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \partial_x^2 \frac{\partial}{\partial v_{xx}} - \dots$$

Напомним, что плотности локальных функционалов определяются с точностью до полных производных по переменной x . Таким образом, скобка (1.23) зануляется, если и только если подынтегральное выражение в правой части равенства является полной производной по пространственной переменной x . Следующий важный результат (см., например, [13]) дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы дифференциальный полином был бы полной производной по x от другого дифференциального полинома.

Теорема 1.1 *Рассмотрим дифференциальный полином*

$$h = \sum_{k,l \geq 0} \sum_{i,j} A_{i,j}(u,v) \partial_x^{i_1} u \dots \partial_x^{i_k} u \partial_x^{j_1} v \dots \partial_x^{j_l} v$$

с коэффициентами $A_{i,j}(u,v)$, являющимися гладкими функциями на некотором диске $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Здесь

$$i = (i_1, \dots, i_k), \quad j = (j_1, \dots, j_l), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq N$$

– мультииндексы, по которым производится суммирование, M, N – два неотрицательных целых числа. Дифференциальный полином h может быть представлен, как полная производная по x от другого дифференциального полинома \tilde{h} той же формы,

$$h = \partial_x \tilde{h}, \quad \partial_x = \sum_{m \geq 0} \left(u^{(m+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(m)}} + v^{(m+1)} \frac{\partial}{\partial v^{(m)}} \right),$$

если и только если

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = 0, \quad \frac{\delta H}{\delta v(x)} = 0, \quad H = \int h dx.$$

Следствие 1.2 Два локальных функционала $F = \int f dx$ and $G = \int g dx$ коммутируют по отношению к скобке Пуассона (1.22), если и только если

$$\begin{aligned} E_u \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta v(x)} + \frac{\delta F}{\delta v(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} \right) &= 0 \\ E_v \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta v(x)} + \frac{\delta F}{\delta v(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Укажем также на альтернативное представление нелинейного волнового уравнения (1.9) в виде уравнений Эйлера – Лагранжа

$$\delta S = 0, \quad S = \int \int \left[\frac{1}{2} \phi_t^2 - V(\phi_x) \right] dx dt.$$

Здесь функция $P(u)$ – это первообразная функции $V(u)$,

$$P(u) = V'(u).$$

Чтобы прийти к такому представлению, достаточно ввести потенциал

$$\phi_x = u.$$

Каноническая скобка Пуассона

$$\{\phi(x), \phi_t(y)\} = \delta(x - y)$$

в переменных u, v переписывается в форме (1.22).

Из явного вида уравнения (1.19) немедленно вытекает, что оно принадлежит к гиперболическому типу на области, в которой функция $P(u)$ является выпуклой:

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{such that} \quad P''(u) > 0, \quad (1.26)$$

и к эллиптическому типу там, где функция $P(u)$ делается вогнутой. На области гиперболичности уравнение (1.19) можно привести к диагональному виду

$$\partial_t r_{\pm} = \pm \sqrt{P''(u)} \partial_x r_{\pm}, \quad (1.27)$$

вводя римановы инварианты

$$r_{\pm} = v \pm Q(u), \quad \text{where} \quad Q'(u) = \sqrt{P''(u)}. \quad (1.28)$$

Чтобы сформулировать основное свойство решений гиперболических систем, записанных через римановы инварианты, введем характеристические переменные

$$x_{\pm} = x \pm \sqrt{P''(u)} t. \quad (1.29)$$

Тогда величины r_+/r_- не зависят соответственно от x_-/x_+ :

$$\frac{\partial r_+}{\partial x_-} = \frac{\partial r_-}{\partial x_+} = 0. \quad (1.30)$$

Перейдем к описанию локальной структуры общего решения нелинейного волнового уравнения (1.19).

Лемма 1.3 Пусть $f = f(u, v)$ – произвольное решение следующего линейного уравнения в частных производных

$$f_{uu} = P''(u)f_{vv}. \quad (1.31)$$

Выберем точку (u_0, v_0) такую, что

$$[f_{uv}(u_0, v_0)]^2 - P''(u_0)[f_{vv}(u_0, v_0)]^2 \neq 0. \quad (1.32)$$

Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) такой, что

$$(x_0, t_0) := (f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0))$$

существует единственная пара функций $(u(x, t), v(x, t))$, удовлетворяющая системе уравнений

$$x = f_u(u, v) \quad (1.33)$$

$$t = f_v(u, v)$$

вместе с нормировкой

$$u(x_0, t_0) = u_0, \quad v(x_0, t_0) = v_0.$$

Более того, функции $(u(x, t), v(x, t))$ дают решение системы уравнений в частных производных (1.19). Их производные по пространственной переменной x в точке (x_0, t_0) не обращаются в ноль одновременно. Обратное, любое решение системы уравнений в частных производных (1.19), удовлетворяющее условию

$$[v_x^2 - P''(u)u_x^2]_{(x_0, t_0)} \neq 0, \quad (1.34)$$

локально может быть получено описанной выше процедурой при подходящем выборе решения $f(u, v)$ линейного уравнения в частных производных (1.31).

Доказательство Леммы может быть получено с помощью известного в теории уравнений гидродинамического типа метода годографа.

Замечание 1.4 Нелишне отметить, что римановы инварианты (1.28) также служат характеристическими переменными для линейного уравнения в частных производных (1.31). Другими словами, в этих переменных уравнение (1.31) на функцию $f = f(r_+, r_-)$ переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r_+ \partial r_-} - \frac{1}{8} \frac{P'''}{(P'')^{3/2}} \left(\frac{\partial f}{\partial r_+} - \frac{\partial f}{\partial r_-} \right) = 0. \quad (1.35)$$

Замечание 1.5 *Исключительные решения уравнения (1.19), не покрываемые процедурой (1.33), могут быть представлены в виде*

$$v = Q(u) + c \quad \text{or} \quad v = -Q(u) + c$$

с некоторой постоянной c , причем $u = u(x, t)$ удовлетворяет скалярному квазилинейному уравнению

$$u_t = \sqrt{P''(u)} u_x \quad \text{or} \quad u_t = -\sqrt{P''(u)} u_x.$$

На таких решениях один из римановых инвариантов принимает постоянные значения.

Установим теперь следующую важную интерпретацию решений линейного уравнения в частных производных (1.31).

Лемма 1.6 *Для заданной функции $f = f(u, v)$ рассмотрим гамильтониан*

$$H_f = \int f(u, v) dx. \quad (1.36)$$

Он коммутирует с гамильтонианом (1.21) нелинейного волнового уравнения, если и только если функция f удовлетворяет (1.31).

Доказательство. Скобка Пуассона (1.22) функционалов H_f и H имеет вид

$$\{H_f, H\} = \int \left[\frac{\delta H_f}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta H}{\delta v(x)} + \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} \right] dx = \int [f_u v_x + f_v P''(u) u_x] dx.$$

Подынтегральное выражение в правой части последнего равенства является полной производной по переменной x , если и только если

$$\partial_u (f_u) = \partial_v (f_v P''(u)).$$

Это дает (1.31). □

Напомним, что дифференциальный полином $f = f(u, v; u_x, v_x, \dots)$ называется *законом сохранения* (или *плотностью первого интеграла*) для уравнения в частных производных (1.19), если справедливо следующее тождество:

$$\partial_t f = \partial_x g, \quad \partial_t = \sum_{m \geq 0} \left[(u_t)^{(m)} \frac{\partial}{\partial u^{(m)}} + (v_t)^{(m)} \frac{\partial}{\partial v^{(m)}} \right] \quad (1.37)$$

для некоторого дифференциального полинома g . В выражении (1.37) подразумевается, что после дифференцирования следует сделать подстановку $u_t \mapsto v_x$, $v_t \mapsto P''(u)u_x$, используя уравнения (1.19).

Следствие 1.7 *Функция $f = f(u, v)$ является законом сохранения для нелинейного волнового уравнения (1.19), если и только если она удовлетворяет линейному уравнению в частных производных (1.31) .*

Доказательство. Беря решение f уравнения (1.31), мы заключаем

$$\partial_t f = \partial_x g,$$

где функция $g = g(u, v)$ определяется квадратурой

$$dg = P''(u)f_v du + f_u dv.$$

Обратное утверждение проверяется прямым вычислением. □

Следствие 1.8 *Гамильтоново уравнение в частных производных вида*

$$\begin{aligned} u_s &= \partial_x f_v(u, v) \\ v_s &= \partial_x f_u(u, v) \end{aligned} \tag{1.38}$$

коммутирует с нелинейным волновым уравнением

$$(u_t)_s = (u_s)_t, \quad (v_t)_s = (v_s)_t,$$

если функция $f(u, v)$ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных (1.31).

Доказательство. В самом деле, уравнения (1.38) представляют собой гамильтонов поток, порожденный гамильтонианом H_f :

$$\begin{aligned} u_s &= \partial_x \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \\ v_s &= \partial_x \frac{\delta H_f}{\delta u(x)}. \end{aligned}$$

Из гамильтонова формализма хорошо известно, что коммутация гамильтонианов влечет коммутативность потоков. □

Мы установили связь линейного уравнения в частных производных (1.31) с инфинитезимальными симметриями нелинейного волнового уравнения (1.9). Докажем теперь, что гамильтонианы вида H_f попарно коммутируют. Другими словами, алгебра Ли инфинитезимальных симметрий нелинейного волнового уравнения коммутативна.

Лемма 1.9 Для произвольной пары решений f, g линейного уравнения в частных производных (1.31) гамильтонианы

$$H_f = \int f(u, v) dx \quad \text{and} \quad H_g = \int g(u, v) dx$$

коммутируют:

$$\{H_f, H_g\} = 0.$$

Таким образом, для заданной функции $P(u)$ мы получаем бесконечное семейство коммутирующих гамильтонианов, параметризованных решениями линейного уравнения в частных производных (1.31). Соответствующие гамильтоновы системы также попарно коммутируют.

Замечание 1.10 Все уравнения вида (1.38) построенного коммутативного семейства имеют общие римановы инварианты (1.28):

$$\partial_s r_{\pm} = (h_{uv} \pm \sqrt{P''(u)} h_{vv}) \partial_x r_{\pm}. \quad (1.39)$$

Пример 1.11 Для заданного вещественного числа $\kappa \neq 0, \pm 1$ возьмем

$$P(u) = \frac{u^\kappa}{\kappa(\kappa - 1)}. \quad (1.40)$$

Функция

$$f = \frac{1}{2} u v^2 + \frac{u^\kappa}{\kappa(\kappa + 1)} \quad (1.41)$$

удовлетворяет линейному уравнению в частных производных вида (1.31). Соответствующий гамильтонов поток

$$u_t = \partial_x(uv) \quad (1.42)$$

$$v_t = \partial_x \left(\frac{v^2}{2} + \frac{u^\kappa}{\kappa} \right)$$

после замены знака времени совпадает с уравнениями движения одномерного политропного газа с уравнением состояния

$$p \sim \rho^{\kappa+1}.$$

Здесь $u = \rho$ – плотность массы, v – скорость. Следовательно, уравнения (1.42) газовой динамики можно рассматривать, как инфинитезимальные симметрии нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} = \frac{u^{\kappa-1}}{\kappa - 1} u_{xx} + u^{\kappa-2} u_x^2.$$

Пример 1.12 Для исключительного значения $\kappa = 1$ возьмем

$$P(u) = \mp u (\log u - 1). \quad (1.43)$$

Выбор

$$f = \frac{1}{2} (u^2 \mp u v^2) \quad (1.44)$$

решения линейного уравнения в частных производных (1.31) отвечает бездисперсному пределу

$$\begin{aligned} u_t + (u v)_x &= 0 \\ v_t + v v_x \mp u_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.45)$$

фокусирующего/дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера

$$i \psi_t + \frac{1}{2} \psi_{xx} \pm |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.46)$$

переписанного в координатах

$$u = |\psi|^2, \quad v = \frac{1}{2i} \left(\frac{\psi_x}{\psi} - \frac{\bar{\psi}_x}{\bar{\psi}} \right)$$

в виде

$$\begin{aligned} u_t + (u v)_x &= 0 \\ v_t + v v_x \mp u_x &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_{xx}}{u} - \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{u^2} \right)_x. \end{aligned}$$

Таким образом, бездисперсное уравнение Шредингера можно рассматривать, как инфинитезимальную симметрию следующего нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} \pm \partial_x^2 \left(\frac{1}{u} \right) = 0.$$

Замечание 1.13 В работе [16] с каждым решением $F = F(v^1, \dots, v^n)$ так называемых уравнений ассоциативности

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^i \partial v^j \partial v^p} \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial v^q \partial v^k \partial v^l} = \frac{\partial^3 F}{\partial v^l \partial v^j \partial v^p} \eta^{pq} \frac{\partial^3 F}{\partial v^q \partial v^k \partial v^i}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial v^1 \partial v^i \partial v^j} = \eta_{ij}.$$

была связана иерархия попарно коммутирующих систем квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Здесь η^{ij} – элементы постоянной симметрической невырожденной матрицы, η_{ij} – элементы обратной

матрицы. Аксиома квазиоднородности теории фробениусовых многообразий не используется при построении этой иерархии. При $n = 2$ решение $F = F(v, u)$ должно иметь вид

$$F = \frac{1}{2} v u^2 + \Phi(u)$$

для некоторой функции $\Phi(u)$. Выбирая эту функцию так, чтобы

$$\Phi'(u) = P(u),$$

нетрудно убедиться, что построенная иерархия коммутирующих уравнений в частных производных совпадает с той, что была построена выше, исходя из решений линейного уравнения (1.31). Гамильтонианы иерархии, построенной в работе [16], отвечают полиномиальным по v решениям уравнения (1.31).

Покажем теперь, как развитая выше теория интегрируемости нелинейного волнового уравнения (см. Лемму 1.3) обобщается на случай произвольной квазилинейной системы второго порядка

$$u_s = \partial_x h_v \tag{1.48}$$

$$v_s = \partial_x h_u$$

с гамильтонианом

$$H_h = \int h(u, v) dx, \quad h_{uu} = P''(u)h_{vv}.$$

Лемма 1.14 Пусть $f = f(u, v)$ – произвольное решение линейного уравнения в частных производных (1.31) удовлетворяющее условиям

$$(f_v^0 h_{uvv}^0 - f_{uv}^0 h_{vv}^0)^2 - P''(u_0) (f_v^0 h_{vvv}^0 - f_{vv}^0 h_{vv}^0)^2 \neq 0$$

в некоторой точке (u_0, v_0) . Тогда система уравнений

$$x + s h_{uv}(u, v) = f_u(u, v) \tag{1.49}$$

$$s h_{vv}(u, v) = f_v(u, v)$$

$$u(x_0, s_0) = u_0, \quad v(x_0, s_0) = v_0$$

задает единственную пару функций $(u(x, s), v(x, s))$, определенных в некоторой окрестности точки (x_0, s_0) , нормированных условиями

$$\begin{aligned} x_0 + s_0 h_{uv}(u_0, v_0) &= f_u(u_0, v_0) \\ s_0 h_{vv}(u_0, v_0) &= f_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют квазилинейным уравнениям (1.48). Обратно, любое решение квазилинейных уравнений (1.48), удовлетворяющее некоторым условиям невырожденности, может быть построено с помощью этой процедуры.

Применим теперь развитые методы к теории интегрируемости n -компонентных систем уравнений в частных производных, записанных в диагональном виде

$$\partial_t u_i = a_i(\mathbf{u}) \partial_x u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.50)$$

$n \geq 3$. Другими словами, переменные u_1, \dots, u_n являются римановыми инвариантами системы (1.50). Мы будем предполагать, что характеристические скорости $a_1(\mathbf{u}), \dots, a_n(\mathbf{u})$ являются гладкими функциями, принимающими попарно различные значения,

$$a_i(\mathbf{u}) \neq a_j(\mathbf{u}), \quad i \neq j \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in \mathcal{D}.$$

Напомним следующее определение (см. [52]).

Определение 1.15 Система (1.50) называется полугамильтоновой, если ее коэффициенты удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\partial_k \left(\frac{a_{i,j}}{a_i - a_j} \right) = \partial_j \left(\frac{a_{i,k}}{a_i - a_k} \right) \quad (1.51)$$

для всех троек попарно различных индексов i, j, k .

Здесь

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad a_{i,j} := \partial_j a_i;$$

аналогичные обозначения будут использоваться также для производных более высоких порядков, т.е.

$$a_{i,jk} := \partial_j \partial_k a_i, \quad A_{i,jkl} := \partial_j \partial_k \partial_l A_i$$

и т.д.

Важность этого определения проясняется следующей теоремой [52].

Теорема 1.16 (i) Пусть $A_1(\mathbf{u}), \dots, A_n(\mathbf{u})$ – произвольное решение следующей переопределенной системы уравнений в частных производных

$$A_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_i - a_j} (A_i - A_j), \quad i \neq j. \quad (1.52)$$

Тогда квазилинейная система

$$\partial_s u_i = A_i(\mathbf{u}) \partial_x u_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.53)$$

коммутирует с исходной системой (1.50), т.е.

$$\partial_s \partial_t u_i \equiv \partial_t \partial_s u_i. \quad (1.54)$$

(ii) Для полугамильтоновой системы (1.50) общее решение уравнений (1.52) зависит от n произвольных функций одной переменной.

(iii) Пусть задано решение уравнений (1.52) такое, что

$$A_1(\mathbf{u}_0) = \dots = A_n(\mathbf{u}_0) = 0, \quad \prod_{i=1}^n A_{i,i}(\mathbf{u}_0) \neq 0$$

в некоторой точке $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{D}$. Тогда система уравнений

$$x = a_i(\mathbf{u})t + A_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.55)$$

задает единственную гладкую вектор-функцию $\mathbf{u}(x, t)$ при достаточно малых $|x|$, $|t|$, нормированную условием $\mathbf{u}(0, 0) = \mathbf{u}_0$. Эта функция удовлетворяет уравнениям квазилинейной системы (1.50). Обратно, любое решение $\mathbf{u}(x, t)$ квазилинейной полугамильтоновой системы (1.50), удовлетворяющее условиям

$$\partial_x u_1(0, 0) \neq 0, \dots, \partial_x u_n(0, 0) \neq 0$$

может быть локально получено посредством описанной выше процедуры.

Замечание 1.17 Для любой полугамильтоновой системы (1.50) можно также построить бесконечное семейство законов сохранения $h(\mathbf{u})$ таких, что на решениях системы (1.50) справедливо следующее тождество

$$\partial_t h(\mathbf{u}) = \partial_x f(\mathbf{u}) \quad (1.56)$$

для некоторой функции $f(\mathbf{u})$. Эти законы сохранения определяются из следующей переопределенной системы уравнений в частных производных

$$\partial_i \partial_j h = \frac{a_{i,j}}{a_j - a_i} \partial_i h + \frac{a_{j,i}}{a_i - a_j} \partial_j h, \quad i \neq j. \quad (1.57)$$

Решения системы (1.57) также параметризуются наборами из n произвольных функций одной переменной [там же]. В книге [49] законы сохранения $h(\mathbf{u})$ называются энтропиями; системы вида (1.50) обладающие таким обширным семейством энтропий (т.е. семейством, параметризованным наборами из n произвольных функций одной переменной) называются богатыми квазилинейными системами в книге [49]. Этот класс систем совпадает с классом полугамильтоновых уравнений.

Перейдем к изучению гамильтоновых возмущений систем гидроднамического типа. Пусть задана система квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u}) \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u} = (u^1(x, t), \dots, u^n(x, t)) \quad (1.58)$$

представленная в гамильтоновой форме

$$\mathbf{u}_t = \{\mathbf{u}(x), H_0\}_0, \quad H_0 = \int h_0(\mathbf{u}) dx \quad (1.59)$$

по отношению к скобке Пуассона гидродинамического типа, записанной в плоских координатах в виде

$$\{u^i(x), w^j(y)\}_0 = \eta^{ij} \delta'(x - y), \quad \eta^{ji} = \eta^{ij} = \text{const}, \quad \det(\eta^{ij}) \neq 0. \quad (1.60)$$

Мы скажем, что система вида (1.8) является *гамильтоновым возмущением* системы (1.58), если она может быть представлена в виде

$$\mathbf{u}_t = \{\mathbf{u}(x), H\} \quad (1.61)$$

с *возмущенным гамильтонианом*

$$H = H_0 + \epsilon H_1 + \epsilon^2 H_2 + \dots \quad (1.62)$$

$$H_k = \int h_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) dx, \quad k \geq 1$$

$$\deg h_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k$$

и *возмущенной скобкой Пуассона*

$$\{u^i(x), w^j(y)\} = \{u^i(x), w^j(y)\}_0 + \epsilon \{u^i(x), w^j(y)\}_1 + \epsilon^2 \{u^i(x), w^j(y)\}_2 + \dots \quad (1.63)$$

$$\{u^i(x), w^j(y)\}_k = \sum_{s=0}^{k+1} A_{ks}^{ij}(\mathbf{u}(x); \mathbf{u}_x(x), \dots, \mathbf{u}^{(s)}(x)) \delta^{(k-s+1)}(x - y), \quad k \geq 1$$

$$\deg A_{ks}^{ij}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(s)}) = s.$$

В этих формулах через $f(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)})$ и пр. обозначены дифференциальные полиномы

$$f(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) \in \mathcal{C}^\infty(M)[\mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}], \quad \mathbf{u} \in M,$$

которые можно также рассматривать, как полиномиальные функции на пучке джетов $J^k(M)$. Степень дифференциального полинома определяется правилами

$$\deg u_x^i = 1, \quad \deg u_{xx}^i = 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n.$$

В выражениях (1.62) и (1.63) допускаются бесконечные суммы. Подчеркнем, что, тем не менее, каждый член в ϵ -разложениях (1.61) является корректно определенным дифференциальным полиномом. Подразумевается, что антисимметрия и тождество Якоби для скобки Пуассона будут пониматься как тождества в классе формальных степенных рядов по переменной ϵ . Появляющийся

в формулах символ дельта-функции определяется следующим образом. Введем матрицу линейных дифференциальных операторов, зависящих от параметра ϵ :

$$\Pi^{ij} = \Pi_0^{ij} + \epsilon \Pi_1^{ij} + \epsilon^2 \Pi_2^{ij} + \dots \quad (1.64)$$

$$\Pi_0^{ij} = \eta^{ij} \partial_x,$$

$$\Pi_k^{ij} = \sum_{s=0}^{k+1} A_{k s}^{ij} (\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(s)}) \partial_x^{k-s+1}, \quad k \geq 1.$$

Ясно, что

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \Pi^{ij} \delta(x - y). \quad (1.65)$$

С помощью этого матричного дифференциального оператора возмущенная гамильтонова система записывается в виде

$$u_t^i = \Pi^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j(x)} = \sum_{m \geq 0} \epsilon^m \sum_{k+l=m} \Pi_k^{ij} \frac{\delta H_l}{\delta u^j(x)}. \quad (1.66)$$

Из сделанных предположений относительно структуры пертурбативного разложения в уравнениях (1.62) и (1.63) немедленно вытекает, что все коэффициенты рядов (1.8)

$$B_m^i (\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(m+1)}) = \sum_{k+l=m} \Pi_k^{ij} \frac{\delta H_l}{\delta u^j(x)}, \quad m \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

являются дифференциальными полиномами степени $m + 1$.

Введенный класс гамильтоновых возмущений инвариантен по отношению к действию (специальных) преобразований типа *Миуры*, действующих на зависимые переменные по следующему правилу:

$$\mathbf{u} \mapsto \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \sum_{k \geq 1} \epsilon^k F_k (\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}), \quad \deg F_k (\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k. \quad (1.67)$$

Преобразование гамильтонианов задается прямой подстановкой, а скобка Пуассона преобразуется по следующему правилу:

$$\{\tilde{u}^i(x), \tilde{u}^j(y)\} = \tilde{\Pi}^{ij} \delta(x - y) \quad (1.68)$$

$$\tilde{\Pi}^{ij} = L_p^i \Pi^{pq} L_q^\dagger$$

где L и L^\dagger – соответственно оператор линеаризации преобразования (1.67) и его формально сопряженный оператор:

$$L_k^i = \sum_s \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^{k,s}} \partial_x^s, \quad L_k^\dagger = \sum_s (-\partial_x)^s \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^{k,s}}. \quad (1.69)$$

Преобразования вида (1.67) образуют группу. Два гамильтоновых возмущения одной и той же квазилинейной системы (1.58) связанные преобразованием вида (1.67) будут называться *эквивалентными*. В частности, гамильтоново возмущение называется *тривиальным*, если оно эквивалентно невозмущенной системе (1.58).

Пример 1.18 *Нелинейное уравнение Шредингера фокусирующего/дефокусирующего типа*

$$i \epsilon \psi_t + \frac{1}{2} \epsilon^2 \psi_{xx} \pm |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1.70)$$

переписанное в переменных

$$u = |\psi|^2, \quad v = \frac{\epsilon}{2i} \left(\frac{\psi_x}{\psi} - \frac{\bar{\psi}_x}{\bar{\psi}} \right),$$

принимает форму гамильтонова возмущения системы (1.45):

$$\begin{aligned} u_t + (u v)_x &= 0 \\ v_t + v v_x \mp u_x &= \frac{1}{4} \epsilon^2 \left(\frac{u_{xx}}{u} - \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{u^2} \right)_x. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Скобка Пуассона остается той же, что и для невозмущенного уравнения

$$\{u(x), v(y)\} = \delta'(x - y), \quad \{u(x), u(y)\} = \{v(x), v(y)\} = 0,$$

а возмущенный гамильтониан записывается в виде

$$H = H_0 + \epsilon^2 H_2, \quad H_0 = \int \frac{1}{2} (u^2 \mp u v^2) dx, \quad H_2 = - \int \frac{u_x^2}{8u} dx. \quad (1.72)$$

Пример 1.19 *Обобщенная система Ферми – Паста – Улама (1.14) в переменных*

$$\begin{aligned} w_n &= q_n - q_{n-1} \\ v_n &= p_n \end{aligned} \quad (1.73)$$

после интерполяции

$$\begin{aligned} w_n &= w(\epsilon n, \epsilon t) \\ v_n &= v(\epsilon n, \epsilon t) \end{aligned}$$

превращается в следующую систему уравнений для функций $w = w(x, t)$, $v = v(x, t)$

$$\begin{aligned} w_t(x) &= \frac{1}{\epsilon} [v(x) - v(x - \epsilon)] = v_x - \frac{1}{2} \epsilon v_{xx} + \frac{1}{6} \epsilon^2 v_{xxx} + \dots \\ v_t(x) &= \frac{1}{\epsilon} [P'(w(x + \epsilon)) - P'(w(x))] = \partial_x P'(w) + \frac{1}{2} \epsilon \partial_x^2 P'(w) + \frac{1}{6} \epsilon^2 \partial_x^3 P'(w) + \dots \end{aligned} \quad (1.74)$$

Таким образом, эту систему можно рассматривать, как гамильтоново возмущение нелинейного волнового уравнения (1.19). В переменных $w(x)$, $v(x)$ скобка Пуассона нетривиально зависит от ϵ . В самом деле, в дискретных переменных скобка имеет вид

$$\{w_n, v_m\} = \delta_{n,m} - \delta_{n,m+1},$$

(указаны только ненулевые скобки). После интерполяции и деления на ϵ мы получаем возмущенную скобку в виде

$$\begin{aligned} \{w(x), v(y)\} &= \frac{1}{\epsilon} [\delta(x-y) - \delta(x-y-\epsilon)] \\ &= \delta'(x-y) - \frac{1}{2}\epsilon\delta''(x-y) + \frac{1}{6}\epsilon^2\delta'''(x-y) + \dots \end{aligned} \quad (1.75)$$

Скобка (1.75) приводится к стандартной форме

$$\{u(x), v(y)\} = \delta'(x-y)$$

с помощью преобразования типа Миуры (1.16). В самом деле, введем оператор сдвига

$$\Lambda = e^{\epsilon\partial_x}$$

и перепишем скобку (1.75) в следующем виде

$$\{w(x), v(y)\} = \frac{1}{\epsilon} (1 - \Lambda^{-1}) \delta(x-y).$$

Подстановка (1.16), записанная в виде

$$u = \frac{\epsilon\partial_x}{1 - \Lambda^{-1}} w$$

дает

$$\{u(x), v(y)\} = \frac{\epsilon\partial_x}{1 - \Lambda^{-1}} \{w(x), v(y)\} = \partial_x \delta(x-y).$$

В новых переменных возмущенная система описывается возмущенным гамильтонианом

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta v(x)} \\ v_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} \end{aligned}$$

$$H = \int h dx = \int \left[\frac{1}{2} v^2(x) + P(w(x) - w(x-\epsilon)) \right] dx \quad (1.76)$$

$$h = \frac{1}{2} v^2 + P(u) - \frac{\epsilon^2}{24} P''(u) u_x^2 + \frac{\epsilon^4}{5760} [8 P''(u) u_{xx}^2 - P^{IV}(u) u_x^4] + \mathcal{O}(\epsilon^6)$$

(с точностью до несущественных полных производных). В этом случае ряды по переменной ϵ бесконечны.

Возвращаясь к общему случаю возмущенных скобок Пуассона вида (1.60), сформулируем следующее важное утверждение.

Теорема 1.20 1). Любое возмущение (1.62) скобки Пуассона вида (1.60) тривиально.

2). Любое специальное преобразование типа Миуры (1.67), являющееся каноническим по отношению к скобке $\{ , \} = \{ , \}_0$

$$\{\tilde{u}^i(x), \tilde{u}^j(y)\} = \{u^i(x), u^j(y)\}$$

является сдвигом на время ϵ , порожденным гамильтонианом Φ :

$$\tilde{u}^i = u^i + \epsilon \{u^i(x), \Phi\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{u^i(x), \Phi\}, \Phi\} + \dots \quad (1.77)$$

$$\Phi = \int \varphi dx$$

$$\varphi = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \varphi_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}), \quad \deg \varphi_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k, \quad k \geq 0.$$

Здесь $\varphi_0(\mathbf{u})$, $\varphi_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x)$, \dots – некоторые дифференциальные полиномы.

Доказательство вытекает из тривиальности, в положительных степенях, пуассоновых когомологий скобки (1.60), установленной в работах [28], [14] (см. также [25]).

В силу сформулированной теоремы задача классификации гамильтоновых возмущений квазилинейных систем первого порядка сводится к изучению систем следующей стандартной формы

$$u_t^i = \eta^{ij} \partial_x \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.78)$$

другими словами, достаточно рассматривать только возмущенные гамильтонианы вида

$$H = H^{[0]} + \epsilon H^{[1]} + \epsilon^2 H^{[2]} + \dots \quad (1.79)$$

$$H^{[k]} = \int h^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) dx, \quad \deg h^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k, \quad k \geq 0$$

где, как и выше, $h^{[0]}(\mathbf{u})$, $h^{[1]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x)$, $h^{[2]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx})$, \dots – некоторые дифференциальные полиномы. Здесь

$$H^{[0]} = \int h^{[0]}(\mathbf{u}) dx$$

– гамильтониан невозмущенной системы. Эквивалентность в классе возмущенных гамильтонианов устанавливается каноническими преобразованиями (1.77):

$$H \mapsto \tilde{H} = H + \epsilon \{H, \Phi\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{H, \Phi\}, \Phi\} + \dots \quad (1.80)$$

Сформулируем основные проблемы теории деформаций гамильтоновых уравнений в частных производных.

Проблема 1: описать первые интегралы/инфинитезимальные симметрии данной возмущенной гамильтоновой системы посредством анализа процедуры *продолжения* первых интегралов/симметрий невозмущенной системы до интегралов/симметрий ее возмущения.

Проблема 2: классифицировать *интегрируемые* гамильтоновы возмущения, для которых *все* первые интегралы/инфинитезимальные симметрии невозмущенной системы могут быть продолжены до первых интегралов/инфинитезимальных симметрий ее возмущения.

Проблема 3: провести сравнительное сопоставление *свойств решений* возмущенной и невозмущенной систем. Более конкретно, охарактеризовать возмущения, для которых решение возмущенной задачи Коши при подходящем выборе класса начальных условий допускает продолжение за точку градиентной катастрофы у решения невозмущенной задачи Коши с тем же начальным условием. Для этого класса возмущенных гамильтоновых систем установить *универсальный характер* асимптотического поведения решений возмущенной системы в окрестности точки градиентной катастрофы невозмущенного решения. Другими словами, описать те свойства указанного асимптотического поведения, которые в существенном не зависят от выбора начальных условий, и, быть может, от выбора гамильтонова возмущения.

Перейдем к описанию основного инструмента в теории продолжения инфинитезимальных симметрий – так называемого D -оператора. Как и выше, мы начнем со случая нелинейного волнового уравнения.

Пусть задан возмущенный гамильтониан

$$\begin{aligned} H_{\text{pert}} &= H^{[0]} + \epsilon H^{[1]} + \epsilon^2 H^{[2]} + \dots \\ H^{[k]} &= \int h^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) dx, \quad \deg h^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k, \quad k \geq 0 \quad (1.81) \\ h^{[0]} &= \frac{1}{2} v^2 + P(u) \end{aligned}$$

нелинейного волнового уравнения. Мы знаем, что для произвольного решения $f = f(u, v)$ линейного уравнения в частных производных (1.31) гамильтонианы $H^{[0]}$ и

$$H_f^{[0]} = \int f dx \quad (1.82)$$

коммутируют:

$$\{H^{[0]}, H_f^{[0]}\} = 0.$$

Нашей целью является построение деформации

$$\begin{aligned} H_f &= H_f^{[0]} + \epsilon H_f^{[1]} + \epsilon^2 H_f^{[2]} + \dots \\ H_f^{[k]} &= \int h_f^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) dx, \quad \deg h_f^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = k, \quad k \geq 0 \quad (1.83) \\ h_f^{[0]} &= f(u, v) \end{aligned}$$

для любого решения f уравнения (1.31) такого, что

$$\{H_{\text{pert}}, H_f\} = 0.$$

Определение 1.21 *Линейный дифференциальный оператор вида*

$$\begin{aligned} D &= D^{[0]} + \epsilon D^{[1]} + \epsilon^2 D^{[2]} + \dots \\ D^{[0]} &= \text{id}, \quad D^{[k]} = \sum b_{i_1 \dots i_{m(k)}}^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) \frac{\partial^{m(k)}}{\partial u^{i_1} \dots \partial u^{i_{m(k)}}} \quad (1.84) \\ \deg b_{i_1 \dots i_{m(k)}}^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) &= k, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

называется D -оператором для возмущения (1.81), если для любой функции f , удовлетворяющей линейному дифференциальному уравнению (1.31) гамильтониан

$$H_f = \int Df dx \quad (1.85)$$

коммутирует с H_{pert} .

В формуле (2.9) $m(k)$ – некоторое натуральное число, зависящее от k . Нетрудно видеть, что

$$m(k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil. \quad (1.86)$$

В этой формуле предполагается суммирование по всем индексам $i_1, \dots, i_{m(k)}$ от 1 до 2. Как и выше, предполагается, что коэффициенты $b_{i_1 \dots i_{m(k)}}^{[k]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)})$ являются дифференциальными полиномами. Поскольку действие D -оператора определено только на ядре оператора

$$\partial_u^2 - P''(u)\partial_v^2, \quad (1.87)$$

его коэффициенты не определены однозначно. В зависимости от удобства вычислений можно выбрать ту или иную нормальную форму для коэффициентов D -оператора, например, удерживая только производные вида

$$\partial_v^m \quad \text{and} \quad \partial_u \partial_v^{m-1}.$$

Покажем, что действие D -оператора определено однозначно.

Теорема 1.22 Пусть D_1 и D_2 – два D -оператора для данного возмущенного гамильтониана H_{pert} . Тогда

$$D_2 f - D_1 f \in \text{Im } \partial_x \quad \forall f \in \text{Ker}(\partial_u^2 - P''(u) \partial_v^2).$$

Доказательство вытекает из следующего утверждения о том, что нелинейное волновое уравнение не допускает первых интегралов, нетривиально зависящих от производных.

Лемма 1.23 Пусть потенциал $P(u)$ удовлетворяет условию $P''(u) \neq 0$. Пусть

$$g = g(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)})$$

– дифференциальный полином степени $k > 0$ такой, что функционал

$$G = \int g(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) dx$$

коммутирует с $H^{[0]}$,

$$\{G, H^{[0]}\} = 0 \tag{1.88}$$

Тогда g является полной производной по x :

$$g(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) = \partial_x \tilde{g}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(k-1)}).$$

Следствие 1.24 Предположим, что возмущенный гамильтониан (1.81) допускает D -оператор. Тогда для любой пары решений f, g линейного уравнения в частных производных (1.31) гамильтонианы H_f и H_g коммутируют:

$$\{H_f, H_g\} = 0, \quad H_f = \int Df dx, \quad H_g = \int Dg dx \tag{1.89}$$

$$f_{uu} = P''(u) f_{vv}, \quad g_{uu} = P''(u) g_{vv}.$$

Доказательство Из тождества Якоби выводим, что

$$\{\{H_f, H_g\}, H_{\text{pert}}\} = 0.$$

Предположим, что скобка Пуассона $\{H_f, H_g\}$ имеет вид

$$\{H_f, H_g\} = \epsilon^k F^{[k]} + \mathcal{O}(\epsilon^{k+1})$$

при некотором $k \geq 1$. Функционал $F^{[k]}$ должен коммутировать с $H^{[0]}$. В силу предыдущей Леммы он должен зануляться. \square

Замечание 1.25 *Предыдущие рассмотрения применимы и к более общему классу квазилинейных гамильтоновых систем первого порядка, записанных в виде*

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_x h_v \\ v_t &= \partial_x h_u \end{aligned} \quad (1.90)$$

для заданной гладкой функции $h = h(u, v)$. Законы сохранения $f = f(u, v)$ для такой системы определяются из следующего линейного уравнения в частных производных

$$h_{vv} f_{uu} = h_{uu} f_{vv}. \quad (1.91)$$

Соответствующие гамильтонианы

$$H_f^{[0]} = \int f dx$$

попарно коммутируют. Скажем, что система (1.90) является регулярной,² если она не допускает нетривиальных законов сохранения, зависящих от высших производных (см. Лемму 1.23). Задача классификации всех регулярных квазилинейных гамильтоновых систем будет изучена позднее.

В качестве примера D -оператора рассмотрим гамильтоновы возмущения скалярного уравнения Хопфа

$$u_t + u u_x = 0$$

классифицированные в работе [19]. Напомним, что гамильтонова структура уравнения Хопфа задается формулами

$$\begin{aligned} u_t + \{u(x), H^{[0]}\} &\equiv u_t + \partial_x \frac{\delta H^{[0]}}{\delta u(x)} = 0 \\ H^{[0]} &= \frac{1}{6} \int u^3 dx, \quad \{u(x), u(y)\} = \delta'(x - y). \end{aligned}$$

Возмущения общего вида гамильтониана $H^{[0]}$ вплоть до членов порядка ϵ^4 могут быть параметризованы двумя произвольными функциями одной переменной $c = c(u)$ и $p = p(u)$ следующим образом:

$$H_{\text{pert}} = \int \left[\frac{u^3}{6} - \frac{\epsilon^2}{24} c(u) u_x^2 + \epsilon^4 p(u) u_{xx}^2 \right] dx.$$

Оказывается, что такие возмущения являются *интегрируемыми* в приближении ϵ^4 :

$$\{H_f, H_g\} = \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad H_f = \int D_{c,p} f dx, \quad H_g = \int D_{c,p} g dx, \quad \forall f = f(u), \quad g = g(u).$$

²Ср. определение регулярных элементов в алгебрах Ли.

Соответствующий D -оператор записывается в виде

$$D_{c,p}f = f - \frac{\epsilon^2}{24}c f''' u_x^2 + \epsilon^4 \left[\left(p f''' + \frac{c^2 f^{(4)}}{480} \right) u_{xx}^2 - \left(\frac{c c'' f^{(4)}}{1152} + \frac{c c' f^{(5)}}{1152} + \frac{c^2 f^{(6)}}{3456} + \frac{p' f^{(4)}}{6} + \frac{p f^{(5)}}{6} \right) u_x^4 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^6). \quad (1.92)$$

В рассматриваемом примере f – произвольная функция.

Покажем теперь, как применить развитую выше теорию D -операторов к выводу простых критериев интегрируемости. В качестве примера рассмотрим обобщенную систему Ферми – Паста – Улама. Напомним, что возмущенный гамильтониан имеет вид

$$H_{\text{pert}} = \int \left[\frac{1}{2} v^2 + P(u) - \frac{\epsilon^2}{24} P''(u) u_x^2 \right] dx + \mathcal{O}(\epsilon^4) \quad (1.93)$$

(см. формулу (1.76) выше). Зададимся следующим вопросом: при каком выборе потенциала $P(u)$ можно построить D -оператор в ϵ^2 -приближении? Покажем, что это возможно только для потенциалов, удовлетворяющих уравнению

$$P'' P^{IV} = (P''')^2. \quad (1.94)$$

Для вывода условия (1.94) будем искать плотности возмущенных гамильтонианов в виде дифференциальных полиномов с неопределенными коэффициентами

$$H_f = \int h_f dx, \quad \{H_f, H_{\text{pert}}\} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$h_f = f + \epsilon h_f^{[1]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x) + \epsilon^2 h_f^{[2]}(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}).$$

Первая поправка должна быть линейной по u_x, v_x . Добавляя при необходимости полные производные по x , можно свести задачу к рассмотрению первой поправки вида

$$h_f^{[1]} = p(u, v) v_x$$

с некоторой функцией $p = p(u, v)$. Вычисление скобки дает

$$\{H_f, H_{\text{pert}}\} = \epsilon \int p_u [v_x^2 - P''(u) u_x^2] dx + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение является полной производной по x , только если $p_u = 0$, т.е. $p = p(v)$. Но в этом случае весь член $h_f^{[1]}$ является полной производной по x .

Перейдем к рассмотрению членов второго порядка. С точностью до полных производных по x они могут быть записаны в виде

$$h_f^{[2]} = \frac{1}{2} (a(u, v) u_x^2 + 2b(u, v) u_x v_x + c(u, v) v_x^2).$$

Вычисление скобки Пуассона в порядке ϵ^2 дает следующий функционал:

$$\begin{aligned} & \{H_f, H_{\text{pert}}\} = \\ & = \epsilon^2 \int \left\{ \frac{1}{12} f_v P'' u_{xxx} + \left[\left(\frac{1}{6} f_v P''' - b P'' \right) u_x - a v_x \right] u_{xx} - (c P'' u_x + b v_x) v_{xx} \right. \\ & + \frac{1}{24} (f_v P^{IV} + 12 P'' a_v - 24 P'' b_u) u_x^3 - \frac{1}{2} (a_u + 2 P'' c_u) u_x^2 v_x - \frac{1}{2} (2 a_v + P'' c_v) u_x v_x^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} (c_u - 2 b_v) v_x^3 \right\} dx + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Обозначим подынтегральное выражение через I . Требуется проверить справедливость равенств

$$E_u I = 0, \quad E_v I = 0.$$

Зануление коэффициента в $E_v I$ перед третьей производной u_{xxx} влечет

$$a = \left(c - \frac{1}{12} f_{vv} \right) P''.$$

Далее, зануление коэффициента в $E_v I$ перед $v_{xx} v_x$ приводит к соотношению

$$b_v = c_u.$$

Следовательно, существует потенциал $\lambda = \lambda(u, v)$ такой, что

$$b = \lambda_u, \quad c = \lambda_v.$$

После подстановки, собирая коэффициенты перед $u_{xx} u_x$, $u_{xx} v_x$, $v_{xx} u_x$, $v_{xx} v_x$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} 6 P''' \lambda_v + P'' f_{uvv} &= 0 \\ P''' \lambda_u - P'' \lambda_{uu} + P''^2 \lambda_{vv} &= 0 \\ 6 \lambda_{uu} - 6 P'' \lambda_{vv} + P'' f_{vvv} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \lambda_u &= -\frac{1}{6} \frac{P''^2}{P'''} f_{vvv} \\ \lambda_v &= -\frac{1}{6} \frac{P''}{P'''} f_{uvv}. \end{aligned}$$

Приравнивая смешанные производные

$$(\lambda_u)_v = (\lambda_v)_u,$$

получаем

$$\frac{(P''')^2 - P'' P^{IV}}{6 (P''')^2} f_{uvv} = 0.$$

Это доказывает (1.94).

Уравнение (1.94) на потенциал решается без труда: деля на $P'''P''$, получаем

$$\frac{P'''}{P''} = \frac{P^{IV}}{P'''}.$$

После интегрирования получаем

$$P''' = c P''.$$

Следовательно,

$$P(u) = k e^{cu} + a u + b$$

для некоторых постоянных коэффициентов a, b, c, k .

Таким образом, среди обобщенных систем Ферми – Паста – Улама только классическая цепочка Тоды удовлетворяет предложенному нами критерию интегрируемости.

Замечание 1.26 *Представляет интерес сопоставление приведенных выше методов с аргументами теории нормальных форм конечных цепочек Ферми – Паста – Улама для возмущения малой амплитуды, развитой А.Henrici и Т.Каррелер в работах [33, 34]. Это будет сделано позднее.*

Перейдем к задаче классификации интегрируемых возмущений. Прежде всего, проиллюстрируем развитые методы на примере нелинейного волнового уравнения.

Пусть $f = f(u, v)$ и $g = g(u, v)$ – два первых интеграла нелинейного волнового уравнения (1.19), т.е. два решения линейного дифференциального уравнения (1.31). Гамильтонианы

$$H_f^{[0]} = \int f dx, \quad H_g^{[0]} = \int g dx$$

коммутируют:

$$\{H_f^{[0]}, H_g^{[0]}\} = 0.$$

Как было показано выше, получаем коммутативную алгебры Ли гамильтонианов, параметризованных решениями уравнения (1.31). Нашей ближайшей целью будет классификация деформаций этой алгебры, представляемых в виде (1.61), которые сохраняют коммутативность.

Такая классификация будет получена в первом нетривиальном порядке ϵ^2 . Сформулируем основной результат.

Теорема 1.27 *Любое возмущение нелинейного волнового уравнения (1.19) с произвольным потенциалом $P(u)$, интегрируемое в ϵ^2 -приближении,*

параметризуется двумя произвольными функциями одной переменной $\rho_{\pm} = \rho_{\pm}(r_{\pm})$. Соответствующий D -оператор имеет вид

$$\begin{aligned} D_{\rho,r}f &= f + \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \left[P''(\rho_u f_{vvv} + \rho_v f_{uvv}) + \frac{1}{2} P''' \rho_v f_{vv} \right] u_x^2 \right. \\ &+ 2 \left(P'' \rho_v f_{vvv} + \rho_u f_{uvv} + \frac{P'''}{4P''} \rho_u f_{vv} \right) u_x v_x \\ &\left. + (\rho_u f_{vvv} + \rho_v f_{uvv}) v_x^2 \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

где

$$\rho = \rho(u, v) = \rho_+(r_+) + \rho_-(r_-),$$

римановы $r_{\pm} = r_{\pm}(u, v)$ определены в (1.28).

Доказательство Возьмем два произвольных решения $f = f(u, v)$, $g = g(u, v)$ линейного уравнения в частных производных (1.31). Любое возмущение порядка $\mathcal{O}(\epsilon)$ коммутирующих гамильтонианов $H_f^{[0]}$ и $H_g^{[0]}$ может быть представлено в виде

$$H_f = H_f^{[0]} + \epsilon \int p(u, v) v_x dx + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad H_g = H_g^{[0]} + \epsilon \int q(u, v) v_x dx + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

для некоторых функций p и q . Из коммутативности

$$\{H_f, H_g\} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

вычисляя коэффициент при u_{xx} в $\frac{\delta}{\delta u(x)} \{H_f, H_g\}$, выводим, что

$$\frac{\partial_u p}{f_{vv}} = \frac{\partial_u q}{g_{vv}}. \quad (1.95)$$

Рассмотрим каноническое преобразование

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + \epsilon \{ \mathbf{u}(x), K \} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

порожденное гамильтонианом

$$K = \int k(u, v) dx.$$

Под его действием гамильтонианы H_f и H_g преобразуются следующим образом:

$$H_f \mapsto H_f + \epsilon \{ H_f^{[0]}, K \} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad H_g \mapsto H_g + \epsilon \{ H_g^{[0]}, K \} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Выбирая функцию $k = k(u, v)$, удовлетворяющую уравнению

$$k_{uu} - P''(u)k_{vv} = \frac{\partial_u p}{f_{vv}} = \frac{\partial_u q}{g_{vv}},$$

мы уничтожим члены, линейные по ϵ одновременно в обоих гамильтонианах H_f и H_g .

Следующий шаг – рассмотрение возмущений порядка ϵ^2 . Их можно представить в следующей форме:

$$H_f = H_f^{[0]} + \frac{\epsilon^2}{2} \int (a_f u_x^2 + 2b_f u_x v_x + c_f v_x^2) dx + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

$$H_g = H_g^{[0]} + \frac{\epsilon^2}{2} \int (a_g u_x^2 + 2b_g u_x v_x + c_g v_x^2) dx + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

с некоторыми функциями $a_i = a_i(u, v)$, $b_i = b_i(u, v)$, $c_i = c_i(u, v)$, $i = f, g$. Из коммутативности

$$\{H_f, H_g\} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

выводим, вычисляя коэффициент при v_{xxx} в $\frac{\delta}{\delta u(x)}\{H_f, H_g\}$, что

$$(a_f - c_f P''(u)) g_{vv} = (a_g - c_g P''(u)) f_{vv}.$$

Следовательно,

$$a_f = c_f P''(u) + k(u, v) f_{vv}$$

$$a_g = c_g P''(u) + k(u, v) g_{vv}$$

для некоторой функции $k(u, v)$.

Подставим

$$b_f = r_1 f_{vvv} + r_2 f_{uvv} + r_3 f_{vv} + r_4 f_{uv}, \quad c_f = s_1 f_{vvv} + s_2 f_{uvv} + s_3 f_{vv} + s_4 f_{uv}$$

$$b_g = r_1 g_{vvv} + r_2 g_{uvv} + r_3 g_{vv} + r_4 g_{uv}, \quad c_g = s_1 g_{vvv} + s_2 g_{uvv} + s_3 g_{vv} + s_4 g_{uv}$$

с неопределенными коэффициентами $r_i = r_i(u, v)$, $s_i = s_i(u, v)$, $i = 1, \dots, 4$ (это не что иное, как коэффициенты D -оператора). Вычисления, аналогичные приведенным выше, приводят к следующим выражениям для этих коэффициентов:

$$r_1 = P'' \rho_v, \quad r_2 = \rho_u, \quad r_3 = \frac{P'''}{4P''} \rho_u, \quad r_4 = 0$$

$$s_1 = \rho_u, \quad s_2 = \rho_v, \quad s_4 = 0$$

$$k = \frac{1}{2} P''' \rho_v - 2s_3 P'',$$

где $s_3 = s_3(u, v)$ – произвольная функция, а $\rho = \rho(u, v)$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_{uu} - P'' \rho_{vv} = \frac{P'''}{2P''} \rho_u.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение эквивалентно уравнению Даламбера, если его переписать в римановых инвариантах:

$$\rho_{uu} - P'' \rho_{vv} - \frac{P'''}{2P''} \rho_u = -4P'' \frac{\partial^2 \rho}{\partial r_+ \partial r_-}.$$

В результате мы получаем следующее выражение для ϵ^2 -поправки к гамильтоновой плотности:

$$\begin{aligned} h_f &= f + \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \left[P''(\rho_u f_{vvv} + \rho_v f_{uvv}) + \frac{1}{2} P''' \rho_v f_{vv} \right] u_x^2 \right. \\ &+ 2 \left(P'' \rho_v f_{vvv} + \rho_u f_{uvv} + \frac{P'''}{4P''} \rho_u f_{vv} \right) u_x v_x \\ &\left. + (\rho_u f_{vvv} + \rho_v f_{uvv}) v_x^2 + s_3 (v_x^2 - P'' u_x^2) f_{vv} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение получается для плотности h_g , нужно лишь заменить $f \mapsto g$. Нетрудно показать, что член, содержащий произвольную функцию s_3 можно истребить посредством канонического преобразования, порожденного гамильтонианом

$$\Phi = \frac{\epsilon}{2} \int \phi(u, v) v_x dx,$$

в котором $\phi = \phi(u, v)$ —функция, определяемая квадратурой

$$\phi_u = s_3.$$

□

Для последующего изучения решений возмущенных уравнений нам будет важна конструкция так называемых преобразований квазитривиальности, к изложению которой мы и переходим.

Напомним (см. выше), что ϵ -возмущение квазилинейной системы первого порядка называется тривиальным, если оно может быть устранено (специальным) преобразованием типа Миуры (1.67). В ϵ -разложении этого преобразования все члены являются дифференциальными полиномами.

Определение 1.28 *Возмущение называется квазитривиальным, если оно может быть устранено преобразованием вида*

$$\mathbf{u} \mapsto \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \sum_{k \geq 1} \epsilon^k F_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(m(k))}), \quad \deg F_k(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^{(m(k))}) = k \quad (1.96)$$

в котором члены F_k при каждом $k \geq 1$ являются рациональными функциями переменных $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}, \dots, \mathbf{u}^{(m(k))}$ для некоторого натурального $m(k)$.

Как доказано в работе [21], все бигамильтоновы возмущения квазитривиальны. Более того, порядок самой старшей производной $m(k)$ в выражении F_k допускает оценку

$$m(k) = \left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil. \quad (1.97)$$

Было бы интересно распространить Теорему Кваситривиальности работы [21] на все гамильтоновы возмущения³.

Наличие преобразования квазитривиальности позволяет вывести универсальную формулу для пертурбативного решения возмущенной системы для весьма общего класса начальных данных. А именно, подставляя в (1.96) решение невозмущенной системы $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(x, t)$, мы получаем формальный ряд по ϵ , удовлетворяющий возмущенному уравнению в частных производных во всех порядках. В рассмотренных ниже примерах все рациональные функции, появляющиеся в выражениях для преобразования квазитривиальности, в качестве знаменателей имеют степени выражения

$$\Delta = v_x^2 - P''(u)u_x^2. \quad (1.98)$$

В гамильтоновом случае каноническое преобразование квазитривиальности может быть представлено, как гамильтонов сдвиг на время ϵ (ср. [19]). Это означает, что существует гамильтониан

$$K = \sum_{m \geq 1} \epsilon^m K_m \quad (1.99)$$

$$K_m = \int k_m(\mathbf{u}; \mathbf{u}_x, \dots, \mathbf{u}^0) dx, \quad m \geq 1$$

такой, что каноническое преобразование

$$\mathbf{u} \mapsto \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \epsilon \{\mathbf{u}(x), K\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{\mathbf{u}(x), K\}, K\} + \dots \quad (1.100)$$

преобразует *все* невозмущенные коммутирующие гамильтонианы в их возмущения,

$$H_f = \int f(\tilde{\mathbf{u}}) dx \quad \text{for any } f \text{ satisfying } f_{uu} = P''(u)f_{vv}. \quad (1.101)$$

Порождающий гамильтониан K определяется из уравнения

$$H_f^{[0]} + \epsilon \{H_f^{[0]}, K\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{H_f^{[0]}, K\}, K\} + \dots = H_f \equiv H_f^{[0]} + \epsilon H_f^{[1]} + \epsilon^2 H_f^{[2]} + \dots \quad (1.102)$$

Получаемые таким образом гамильтонианы автоматически коммутируют; нетривиальным является сокращения знаменателей, что обеспечивает

³Теорема квазитривиальности была доказана в работе S.-Q.Liu и Y.Zhang [44] для более общего класса возмущений скалярных уравнений в частных производных. См. также работу [43], в которой техника преобразований квазитривиальности применялась к анализу существования локальных гамильтоновых структур скалярных эволюционных уравнений в частных производных.

полиномиальность плотностей этих гамильтонианов по переменным \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_{xx} и т.д. с точностью до полных производных.

Полученные пертурбативные разложения могут быть использованы для асимптотического интегрирования возмущенных гамильтоновых систем при достаточно малых временах. При подходе к точке градиентной катастрофы они теряют свою применимость, поскольку знаменатели стремятся к нулю. Для того, чтобы изучать поведение решений вблизи критической точки, требуется иной подход, к изложению которого мы и переходим.

Начнем с доказательства следующей

Лемма 1.29 *Предположим, что гамильтониан возмущенного нелинейного волнового уравнения имеет следующий вид*

$$H_{\text{pert}} = \int \left[\frac{1}{2} v^2 + P(u) + \sum_{k \geq 1} \epsilon^k h^{[k]}(u; u_x, v_x, \dots, u^{(k)}, v^{(k)}) \right] dx. \quad (1.103)$$

Другими словами, явная зависимость от v отсутствует в высших поправках. Тогда коэффициенты D -оператора, если он существует, не зависят от v .

Доказательство В самом деле, в силу сделанных предположений коэффициенты уравнения коммутативности $\{H_f, H_{\text{pert}}\} = 0$ для $H_f = \int Df dx$

$$\begin{aligned} E_u \left[\frac{\delta H_f}{\delta u(x)} \left(v_x + \epsilon \partial_x \frac{\delta \tilde{H}_{\text{pert}}}{\delta v(x)} \right) + \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \left(P''(u)u_x + \epsilon \partial_x \frac{\delta \tilde{H}_{\text{pert}}}{\delta u(x)} \right) \right] &= 0 \\ E_v \left[\frac{\delta H_f}{\delta u(x)} \left(v_x + \epsilon \partial_x \frac{\delta \tilde{H}_{\text{pert}}}{\delta v(x)} \right) + \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \left(P''(u)u_x + \epsilon \partial_x \frac{\delta \tilde{H}_{\text{pert}}}{\delta u(x)} \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

не зависят явно от v (см. уравнение (1.25)). Здесь

$$\tilde{H}_{\text{pert}} = \int \sum_{k \geq 1} \epsilon^{k-1} h^{[k]}(u; u_x, v_x, \dots, u^{(k)}, v^{(k)}) dx.$$

Более того, сдвиг

$$v \mapsto v + c$$

отображает в себя пространство решений линейного уравнения в частных производных (1.31). Следовательно, тот же сдвиг, примененный к D -оператору, дает другой D -operator. Ввиду Теоремы единственности 1.22 сдвинутый оператор совпадает с оператором D с точностью до, быть может, полной производной по x . \square

Замечание 1.30 *Класс гамильтоновых возмущений, описываемых Леммой, отвечает следующему классу возмущений нелинейного волнового уравнения:*

$$u_{tt} = P''(u)u_{xx} + \epsilon \partial_x Q(u; u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots; \epsilon). \quad (1.104)$$

Для данного решения $h = h(u, v)$ линейного уравнения в частных производных (1.31), рассмотрим интегрируемое гамильтоново возмущение квазилинейной системы

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_x h_v \\ v_t &= \partial_x h_u \end{aligned}$$

(мы изменили обозначения для временной переменной $s \mapsto t$). Как было установлено выше, решения этой системы допускают параметризацию вида (1.48) посредством функций $f = f(u, v)$, удовлетворяющих тому же линейному уравнению (1.31). Предположим, что возмущенное уравнение допускает не зависящий от v D -оператор. Покажем, что в этом случае решение возмущенного уравнения, близкие к решениям (1.48), могут быть найдены из системы “обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка записанных в вариационной форме. Эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений мы назовем *струнным уравнением*.

Теорема 1.31 *Решения струнного уравнения*

$$\begin{aligned} x + t \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)} &= \frac{\delta H_f}{\delta u(x)} \\ t \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} &= \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \end{aligned} \tag{1.105}$$

также удовлетворяют гамильтоновым уравнениям

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_x \frac{\delta H_h}{\delta v(x)} \\ v_t &= \partial_x \frac{\delta H_h}{\delta u(x)} \end{aligned} \tag{1.106}$$

где $f = f(u, v)$ – произвольное решение уравнения $f_{uu} = P''(u)f_{vv}$,

$$h' := \frac{\partial h}{\partial v}.$$

Доказательство Поскольку коэффициенты D -оператора не зависят от v , справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial v} Dh = Dh'. \tag{1.107}$$

Ввиду очевидной коммутативности

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}, E_u \right] = \left[\frac{\partial}{\partial v}, E_v \right] = 0$$

в предположениях Теоремы из (1.107) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\delta H_h}{\delta u(x)} = \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)}, \quad \frac{\partial}{\partial v} \frac{\delta H_h}{\delta v(x)} = \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)}. \quad (1.108)$$

Используем полученные соотношения для того, чтобы доказать, что поток

$$\begin{aligned} u_s &= t \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} \\ v_s &= 1 + t \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)} \end{aligned} \quad (1.109)$$

является инфинитезимальной симметрией системы (1.106). В самом деле,

$$\begin{aligned} (u_t)_s &= t \left\{ \partial_x \frac{\delta H_h}{\delta v(x)}, H_{h'} \right\} + \partial_x \frac{\delta H_h}{\partial v \delta v(x)} = t \left\{ \{u(x), H_h\}, H_{h'} \right\} + \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} \\ (v_t)_s &= t \left\{ \{v(x), H_h\}, H_{h'} \right\} + \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)}. \end{aligned}$$

Вычисление производных в обратном порядке дает

$$\begin{aligned} (u_s)_t &= \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} + t \left\{ \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)}, H_h \right\} = \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} + \left\{ \{u(x), H_{h'}\}, H_h \right\} \\ (v_s)_t &= \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)} + \left\{ \{v(x), H_{h'}\}, H_h \right\}. \end{aligned}$$

Из тождества Якоби и коммутативности гамильтонианов $\{H_h, H_{h'}\} = 0$ вытекает

$$\begin{aligned} \left\{ \{u(x), H_h\}, H_{h'} \right\} &= \left\{ \{u(x), H_{h'}\}, H_h \right\} \\ \left\{ \{v(x), H_h\}, H_{h'} \right\} &= \left\{ \{v(x), H_{h'}\}, H_h \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$(u_t)_s = (u_s)_t, \quad (v_t)_s = (v_s)_t.$$

Коммутативность остается справедливой и после прибавления к симметрии (1.109) произвольного потока иерархии, например, заменяя (1.109) на

$$\begin{aligned} u_s &= t \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta v(x)} - \partial_x \frac{\delta H_f}{\delta v(x)} \\ v_s &= 1 + t \partial_x \frac{\delta H_{h'}}{\delta u(x)} - \partial_x \frac{\delta H_f}{\delta u(x)} \end{aligned} \quad (1.110)$$

для некоторого решения f линейного уравнения (1.31). Как хорошо известно (см., например, [47, 40]), множество стационарных точек инфинитезимальной

симметрии инвариантно по отношению к потоку (1.106). Интегрируя, приходим к струнному уравнению (1.105). Нелишне отметить, что в бездисперсном пределе струнное уравнение совпадает с уравнением (1.49), полученным методом характеристик:

$$\begin{aligned}x + t h_{uv} &= f_u \\ t h_{vv} &= f_v.\end{aligned}$$

2 Бесконечномерные фробениусовы многообразия и 2+1-интегрируемые системы

Чтобы распространить развитый в предыдущем разделе подход к классификации возмущений квазилинейных гамильтоновых систем первого порядка на случай систем с большим числом независимых пространственных переменных, следует, прежде всего, обобщить на этот случай технику фробениусовых многообразий. Мы объясним основные идеи такого обобщения на важном пределе двумеризованной цепочки Тоды

$$\partial_t^2 u_n - \partial_y^2 u_n = e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n} + e^{u_{n-1}}. \quad (2.1)$$

В этом случае мы имеем две пространственные переменные: непрерывную переменную y и дискретную переменную $n \in \mathbb{Z}$. Делая 1+1 редукцию $\partial_y u_n = 0$ уравнений (2.1), мы приходим к уравнениям классической цепочки Тоды

$$\ddot{q}_n = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}, \quad u_n = q_{n+1} - q_n$$

т.е. к бесконечной системе точек на прямой с экспоненциальным взаимодействием соседей. В длинноволновом пределе получаем следующее уравнение в частных производных

$$u_{tt} - u_{yy} = (e^u)_{xx} \quad (2.2)$$

для функции $u = u(x, y, t)$, получаемой в результате интерполяции

$$u_n(y, t) = u(\epsilon n, y, t)$$

и замены масштабов

$$y \mapsto \epsilon y, \quad t \mapsto \epsilon t$$

в пределе $\epsilon \rightarrow 0$.

Для построения соответствующего фробениусова многообразия мы вложим уравнения (2.1), следуя К.Уено and К.Такасакі [53], в бесконечную иерархию, состоящую из бесконечного числа потоков, связанных с парой полубесконечных разностных операторов

$$L = \Delta + u_0(n) + u_{-1}(n)\Delta^{-1} + u_{-2}(n)\Delta^{-2} + \dots \quad (2.3)$$

$$\bar{L} = \bar{u}_{-1}(n)\Delta^{-1} + \bar{u}_0(n) + \bar{u}_1(n)\Delta + \bar{u}_2(n)\Delta^2 + \dots$$

Здесь Δ – оператор сдвига

$$\Delta f_n = f_{n+1}.$$

Уравнения иерархии могут быть записаны в привычной лаксовой форме

$$\frac{\partial L}{\partial s_k} = [(L^k)_+, L], \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial s_k} = [(L^k)_+, \bar{L}] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{s}_k} = [(\bar{L}^k)_-, L], \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{s}_k} = [(\bar{L}^k)_-, \bar{L}]$$

$k \geq 1$. В частности, коэффициент

$$u_n = \log \bar{u}_{-1}(n)$$

как функция переменных $t = s_1 - \bar{s}_1$, $y = s_1 + \bar{s}_1$ удовлетворяет (2.1).

Иерархия уравнений (2.4) обладает всеми привычными свойствами интегрируемых 1+1 систем: потоки (2.4) попарно коммутируют, они допускают бигамильтоново описание [7]. Но она содержит бесконечное число неизвестных функций

$$u_i(n), \bar{u}_j(n), \quad i \leq 0, j \geq -1$$

дискретной переменной n . Вследствие этого и приходится работать с бесконечномерными фробениусовыми многообразиями.

Перейдем к основным конструкциям. Пусть S^1 – единичная окружность $|z| = 1$ на комплексной z -плоскости. Обозначим D_0 и D_∞ соответственно внутреннюю и внешнюю части сферы Римана по отношению к S^1 . Обозначим через $\mathcal{H}(D_0)$, соответственно через $\mathcal{H}(D_\infty)$, пространство функций, голоморфных на замкнутом диске D_0 , соответственно на D_∞ , т.е., функций, голоморфных на D_0/D_∞ , допускающих аналитическое продолжение на больший диск

$$|z| < 1 + \rho \quad \text{или} \quad |z| > 1 - \rho \quad \text{соответственно}$$

для некоторого положительного ρ . Далее, через $\dot{\mathcal{H}}(D_0)$ и $\dot{\mathcal{H}}(D_\infty)$ обозначим расширения этих пространств, допуская функции с простыми полюсами при $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно. Функции из $\dot{\mathcal{H}}(D_\infty)$ будут обозначаться так:

$$\lambda(z) = u_1 z + u_0 + \frac{u_{-1}}{z} + \dots \in \dot{\mathcal{H}}(D_\infty), \quad (2.5)$$

а функции из $\dot{\mathcal{H}}(D_0)$ будут обозначаться⁴

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{\bar{u}_{-1}}{z} + \bar{u}_0 + \bar{u}_1 z + \dots \in \dot{\mathcal{H}}(D_0). \quad (2.6)$$

⁴В этом разделе черта над буквой *не обозначает* комплексное сопряжение. Коэффициенты лорановских рядов (2.5) и (2.6) можно считать комплексными координатами на $\dot{\mathcal{H}}(D_\infty)$ и $\dot{\mathcal{H}}(D_0)$ соответственно.

Определим бесконечномерное многообразие M как аффинное подпространство в прямой сумме

$$M = \left\{ (\lambda, \bar{\lambda}) \in \dot{\mathcal{H}}(D_\infty) \oplus \dot{\mathcal{H}}(D_0) \mid u_1 = 1 \right\}. \quad (2.7)$$

Касательное пространство к M в каждой точке изоморфно прямой сумме

$$TM = \mathcal{H}(D_\infty) \oplus \dot{\mathcal{H}}(D_0), \quad (2.8)$$

если отождествить линейный дифференциальный оператор первого порядка с производными функций $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$:

$$\partial \mapsto (\partial\lambda(z), \partial\bar{\lambda}(z)) \in \mathcal{H}(D_\infty) \oplus \dot{\mathcal{H}}(D_0) = TM \quad (2.9)$$

Аналогичным образом кокасательное пространство отождествляется с

$$T^*M = \dot{\mathcal{H}}(D_0) \oplus \mathcal{H}(D_\infty). \quad (2.10)$$

Подразумевается, что спаривание между касательным и кокасательным пространствами устанавливается посредством вычисления вычета от произведений

$$\langle \hat{\omega}, \hat{\alpha} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} [\alpha(z)\omega(z) + \bar{\alpha}(z)\bar{\omega}(z)] dz, \quad \hat{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}) \in TM, \quad \hat{\omega} = (\omega, \bar{\omega}) \in T^*M. \quad (2.11)$$

Следующие линейные функционалы будут полезны в вычислениях

$$\langle d\lambda(p), \hat{\alpha} \rangle = \alpha(p), \quad \langle d\bar{\lambda}(p), \hat{\alpha} \rangle = \bar{\alpha}(p), \quad \hat{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha}) \in TM. \quad (2.12)$$

Используя интегральную формулу Коши, получаем следующую реализацию этих 1-форм как элементов пространства $T^*M = \dot{\mathcal{H}}(D_0) \oplus \mathcal{H}(D_\infty)$

$$d\lambda(p) = \left(\frac{p}{z} \frac{1}{p-z}, 0 \right), \quad d\bar{\lambda}(p) = \left(0, \frac{z}{p} \frac{1}{z-p} \right). \quad (2.13)$$

Перейдем к определению фробениусовой структуры на подходящем бесконечномерном подмногообразии M_0 в M . Напомним, что фробениусово многообразие должно быть снабжено структурой фробениусовой алгебры на касательном пучке, такой, что ассоциированная инвариантная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является метрикой нулевой кривизны, а произведение горизонтальных векторных полей допускает представление

$$\langle \partial_1 \cdot \partial_2, \partial_3 \rangle = \partial_1 \partial_2 \partial_3 F. \quad (2.14)$$

Здесь $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ – три произвольных плоских векторных поля. Функция F называется *потенциалом* фробениусова многообразия. Кроме того, требуется существование плоского единичного векторного поля, а также эйлерова векторного поля, входящего в формулировку условия квазиоднородности (см. детали в [18]).

В силу невырожденности инвариантная билинейная форма индуцирует изоморфизм между касательным и кокасательным пучками. Тем самым структура фробениусовой алгебры определена также и на кокасательном пучке T^*M . Мы сначала определим эту структуру.

Определим симметрическое скалярное произведение и умножение на кокасательном пучке T^*M в точке $(\lambda, \bar{\lambda})$ следующими формулами:

$$\langle d\alpha(p), d\beta(q) \rangle_* = \frac{pq}{p-q} (\epsilon(\alpha) \beta'(q) - \epsilon(\beta) \alpha'(p)) \quad (2.15)$$

и

$$d\alpha(p) \cdot d\beta(q) = \frac{pq}{p-q} [\alpha'(p) d\beta(q) - \beta'(q) d\alpha(p)]. \quad (2.16)$$

Здесь $d\alpha(p)$, $d\beta(q)$ – это один из символов $d\lambda(p)$ или $d\bar{\lambda}(p)$, знаки $\epsilon(\alpha)$, $\epsilon(\beta)$ определяются следующим образом

$$\epsilon(\alpha) = 1 \quad \text{если} \quad \alpha = \lambda, \quad \text{и} \quad \epsilon(\alpha) = -1 \quad \text{если} \quad \alpha = \bar{\lambda}.$$

Поскольку любая 1-форма $\hat{\omega} = (\omega(z), \bar{\omega}(z))$ может быть представлена, как линейная комбинация 1-форм $d\lambda(p)$, $d\bar{\lambda}(p)$:

$$\hat{\omega} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|p|=1} (\omega(p) d\lambda(p) + \bar{\omega}(p) d\bar{\lambda}(p)),$$

скалярное произведение и умножение продолжаются на весь кокасательный пучок T^*M .

Утверждение 2.1 *Для любой точки $(\lambda, \bar{\lambda}) \in M$ умножение (2.16) определяет на $T^*_{(\lambda, \bar{\lambda})}M$ структуру коммутативной ассоциативной алгебры с инвариантной билинейной формой (2.15). Эта билинейная форма не вырождается на открытом подмножестве в M определенном условиями*

$$\bar{u}_{-1} \neq 0, \quad \lambda'(z) + \bar{\lambda}'(z) \neq 0 \quad \text{for} \quad |z| = 1. \quad (2.17)$$

Опишем подмногообразие $M_0 \subset M$, на котором будет определена фробениусова структура. Это – открытое подмножество $M_0 \subset M$, определенное следующими условиями. Обозначим

$$w(z) = \lambda(z) + \bar{\lambda}(z). \quad (2.18)$$

Во-первых, для $(\lambda, \bar{\lambda}) \in M_0$ должно выполняться условие $w'(z) \neq 0$ для любого $z \in S^1$. Более того, образ единичной окружности

$$\Gamma = w(S^1)$$

должен быть несамопересекающимся положительно ориентированным замкнутым контуром, обходящим начало координат $w = 0$. Во-вторых, должно выполняться

условие $\bar{u}_{-1} \neq 0$. Многообразие M_0 расслоено над пространством M_{red} параметризованных простых аналитических кривых

$$M_0 \ni (\lambda(z), \bar{\lambda}(z)) \mapsto \{z \rightarrow w(z) \mid |z| = 1\} \in M_{\text{red}} \quad (2.19)$$

с двумерным слоем над каждой точкой. В качестве координат в слое можно выбрать коэффициенты

$$u = \log \bar{u}_{-1}, \quad v = \bar{u}_0. \quad (2.20)$$

Теорема 2.2 *Формулы (2.15), (2.16) определяют на M_0 структуру полупростого бесконечномерного фробениусова многообразия с единичным вектором*

$$e = (-1, 1) \in TM, \quad (2.21)$$

эйлеровым векторным полем

$$E = (\lambda(z) - z \lambda'(z), \bar{\lambda}(z) - z \bar{\lambda}'(z)) \in T_{(\lambda, \bar{\lambda})}M \quad (2.22)$$

и потенциалом

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \oint_{|z_1| < |z_2|} \frac{w(z_1) w(z_2)}{z_1 z_2} \log \frac{z_2 - z_1}{z_2} dz_1 dz_2 \\ & + \frac{1}{2} (\bar{u}_0 - u_0) \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{w(z)}{z} \log \frac{w(z)}{z} dz - u_0 - \bar{u}_0 \right] \\ & + \frac{1}{2} \bar{u}_0^2 \log \bar{u}_{-1} + \bar{u}_{-1} (1 + \bar{u}_1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Опишем канонические координаты на полупростой части фробениусова многообразия M_0 . Рассмотрим аналитическую кривую

$$\Sigma := \{S^1 \ni p \mapsto \frac{\lambda'(p)}{\lambda'(p) + \bar{\lambda}'(p)}\}. \quad (2.24)$$

Обозначим $M_{ss}^0 \subset M_0$ подмножество, состоящее из пар $(\lambda, \bar{\lambda})$ таких, что кривая Σ гладкая и несамопересекающаяся. Для данной кривой Σ введем следующий функционал на M_{ss}^0 , зависящий от точки кривой

$$u_\sigma := [\sigma \bar{\lambda}(p) + (\sigma - 1) \lambda(p)]_{p=p(\sigma)}, \quad \sigma \in \Sigma, \quad (2.25)$$

где $p = p(\sigma) \in S^1$ определяется из уравнения

$$[\sigma \bar{\lambda}'(p) + (\sigma - 1) \lambda'(p)]_{p=p(\sigma)} = 0, \quad \sigma \in \Sigma. \quad (2.26)$$

Утверждение 2.3 *Функционалы u_σ являются каноническими координатами на M_{ss}^0 .*

Замечание 2.4 Для бездисперсного предела $1+1$ лагранжевых уравнений хорошо известный рецепт указывает на критические значения символа лагранжева оператора как на римановы инварианты бездисперсных уравнений (совпадающие с каноническими координатами фробениусова многообразия). Это правило распространяется также и на $1+1$ уравнения Уизема, в которых римановы инварианты даются точками ветвления спектральной кривой [26]. Наша конструкция (2.25), (2.26) выглядит сходным образом. Принципиальным новшеством является то, что римановы инварианты теперь маркируются непрерывным параметром, пробегающим кривую Σ .

Существенной частью теории фробениусовых многообразий является форма пересечений [18], т.е. еще одна важная симметрическая билинейная форма на кокасательном пучке определенная формулой

$$(\omega_1, \omega_2)_* = i_E(\omega_1 \cdot \omega_2) \quad (2.27)$$

Эта форма невырождена вне замкнутого аналитического подмножества. Кривизна индуцированной метрики обращается в ноль.

Утверждение 2.5 Форма пересечений фробениусова многообразия M_0 дается формулой

$$(d\alpha(p), d\beta(q))_* = \frac{pq}{p-q} [\alpha'(p)\beta(q) - \beta'(q)\alpha(p)] + pq\alpha'(p)\beta'(q). \quad (2.28)$$

она невырождена на открытом подмножестве в M_0 задаваемом условиями

$$\lambda'(z) \neq 0, \quad \bar{\lambda}'(z) \neq 0, \quad \lambda(z)\bar{\lambda}'(z) - \bar{\lambda}(z)\lambda'(z) \neq 0 \quad |z| = 1. \quad (2.29)$$

На этом подмножестве она определяет метрику нулевой кривизны на касательном пространстве

$$(\partial_1, \partial_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\left(\frac{\partial_1 \lambda}{\lambda'} - \frac{\partial_1 \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}\right) \left(\frac{\partial_2 \lambda}{\lambda'} - \frac{\partial_2 \bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}\right) dz}{\frac{\lambda}{\lambda'} - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}} \frac{1}{z^2}. \quad (2.30)$$

Обозначения в этой формуле аналогичны тем, что были использованы в (2.15). Дополнение к подмножеству (2.29) – это дискриминант бесконечномерного фробениусова многообразия.

Плоский пучок метрик (2.15) и (2.28) играет важную роль в бигамильтоновой формулировке ассоциированной интегрируемой иерархии. Напомним, что интегрируемая иерархия квазилинейных систем уравнений в частных производных первого порядка, ассоциированная с данным n -мерным фробениусовым многообразием M (так называемая *Главная Иерархия*) – это бесконечное семейство коммутирующих потоков на формальном пространстве петель

$$\mathcal{L}(M) := \{S^1 \rightarrow M\}.$$

Все уравнения иерархии являются эволюционными уравнениями в частных производных с одной пространственной и одной временной переменной. В плоских координатах v^1, \dots, v^n уравнения нижнего уровня этой иерархии (так называемые *примарные потоки*) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v^\gamma}{\partial t^{\alpha,0}} = \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta}^\gamma(v) \frac{\partial v^\beta}{\partial x}, \quad \gamma = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

(индекс α , нумерующий уравнения, принимает значения от 1 до n). Здесь $c_{\alpha\beta}^\gamma(v)$ – структурные константы фробениусовой алгебры на TM . Уравнения $\partial v^\gamma / \partial t^{\alpha,p} = \dots$ высших уровней $p > 0$ строятся посредством подходящей рекурсивной процедуры (см. подробнее в [18]).

Таким образом, для бесконечномерного фробениусова многообразия требуется построить бесконечное семейство примарных потоков. Лишь два из них приходят из длинноволнового предела цепочки Тоды (2.4), а именно

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = -\frac{\partial}{\partial t^{0,0}} + \frac{\partial}{\partial t^{u,0}}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{s}_1} = -\frac{\partial}{\partial t^{u,0}}.$$

Все остальные примарные потоки являются новыми в теории двумерной цепочки Тоды. Их явный вид дается следующей конструкцией.

Теорема 2.6 *Примарные потоки Главной Иерархии, ассоциированной с бесконечномерным фробениусовым многообразием Теоремы 2.2, имеют следующий вид*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(z)}{\partial t^{\alpha,0}} &= \frac{1}{\alpha+1} \{w^{\alpha+1}(z)_{<0}, \lambda(z)\}, & \frac{\partial \bar{\lambda}(z)}{\partial t^{\alpha,0}} &= -\frac{1}{\alpha+1} \{w^{\alpha+1}(z)_{\geq 0}, \bar{\lambda}(z)\} \\ \alpha \in \mathbb{Z}, \quad \alpha &\neq -1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda(z)}{\partial t^{-1,0}} &= \left\{ \left(\log \frac{w(z)}{z} \right)_{<0} + \log z, \lambda(z) \right\}, & \frac{\partial \bar{\lambda}(z)}{\partial t^{-1,0}} &= - \left\{ \left(\log \frac{w(z)}{z} \right)_{\geq 0}, \bar{\lambda}(z) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial t^{v,0}} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t^{u,0}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{s}_1} \end{aligned}$$

Все эти потоки являются симметриями длинноволнового предела двумерной цепочки Тоды.

В этих формулах примарные потоки представлены посредством бездисперсного аналога представления Лакса: фигурные скобки обозначают стандартную скобку Пуассона на цилиндре $(z, x) \in S^1 \times \mathbb{R}$:

$$\{f(z, x), g(z, x)\} = z \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - z \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Опишем также диагональный вид примарных потоков (2.32), используя построенные выше римановы инварианты.

Утверждение 2.7 *Примарные потоки (2.32) в канонических координатах (2.25) принимают следующую диагональную форму:*

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial t^{i,0}} = A_i(\sigma) \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in \Sigma \quad (2.33)$$

$$A_i(\sigma) = -p(\sigma) [\sigma (w^i(p)w'(p))_{\geq 0} + (\sigma - 1) (w^i(p)w'(p))_{\leq -1}]_{p=p(\sigma)}$$

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial t^{u,0}} = A_u(\sigma) \frac{\partial u_\sigma}{\partial x}, \quad A_u(\sigma) = \frac{e^u}{p(\sigma)}.$$

Для решения задачи классификации полупростых фробениусовых многообразий фундаментальную роль играет анализ аналитических свойств горизонтальных сечений плоской деформированной связности. В случае бесконечномерных фробениусовых многообразий эти свойства оказались существенно более сложными, чем в конечномерном случае. Опишем эти горизонтальные сечения для нашего примера.

Введем следующие функции на $M_0 \times \mathbb{C}^\times$, голоморфные по параметру ζ в некоторой окрестности точки $\zeta = 0$

$$\theta_\alpha(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(\lambda + \bar{\lambda})^{\alpha+1}}{\alpha + 1} e^{\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2}\zeta} \frac{dz}{z} \quad \text{при } \alpha \neq -1,$$

$$\theta_{-1}(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[e^{-\lambda\zeta} \left(\log \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right) + \text{Ein}(-\lambda\zeta) - 1 \right) + e^{\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2}\zeta} \right] \frac{dz}{z},$$

$$\theta_v(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[-e^{-\lambda\zeta} \left(\log \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \right) + \text{Ein}(-\lambda\zeta) - 1 \right) + e^{\bar{\lambda}\zeta} (\log \bar{\lambda}(\lambda + \bar{\lambda}) - \text{Ein}(\bar{\lambda}\zeta) - 1) \right] \frac{dz}{z},$$

$$\theta_u(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{\bar{\lambda}\zeta} - 1}{\zeta} \frac{dz}{z}$$

а также функции

$$y_\alpha(\zeta) = \zeta^{\alpha+\frac{1}{2}} \theta_\alpha(\zeta),$$

$$y_v(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{2}} (\zeta^{-1} \theta_v(\zeta) + 2 \log(\zeta) \theta_u(\zeta)),$$

$$y_u(\zeta) = \zeta^{\frac{1}{2}} \theta_u(\zeta),$$

аналитические на универсальной накрывающей $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Теорема 2.8 *Функции $y_\alpha(\zeta)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, образуют полный набор горизонтальных сечений плоской деформированной связности на бесконечномерном фробениусовом многообразии M_0 .*

Для завершения задачи классификации бесконечномерных фробениусовых многообразий необходимо дополнить этот фундаментальной важности результат описанием асимптотических свойств построенных горизонтальных сечений при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Такое описание в настоящее время находится под пристальным изучением.

Конструкции, изложенные выше для примера бесконечномерного фробениусова многообразия, ассоциированного с двумерной цепочкой Тоды, могут быть обобщены на другие 2+1 интегрируемые системы [9], [48], [55]. Мы получаем таким образом значительный запас бесконечномерных фробениусовых многообразий, аналитические свойства которых находятся в стадии изучения.

3 Классификация слабых особенностей решений квазилинейных уравнений первого порядка и их возмущений

Перейдем к локальной классификации особенностей решений квазилинейных уравнений первого порядка. Как и выше, начнем с рассмотрения нелинейного волнового уравнения. Отметим, что развитый метод, основанный на применении теоремы о неявной функции, оказывается эффективным также и для более общих уравнений в частных производных вида (1.48), составляющих коммутативное семейство инфинитезимальных симметрий нелинейного волнового уравнения. Так что мы прямо перейдем к этому более общему случаю.

Функции $(u(x, s), v(x, s))$, задаваемые системой (1.49), являются гладкими в предположении справедливости условий теоремы о неявной функции. В точке (x_c, s_c) , где теорема о неявной функции перестает быть применимой решение уравнений (1.48) имеет *слабую особенность*. Это означает, что существуют пределы самих решений

$$\lim_{x \rightarrow x_c, s \rightarrow s_c} u(x, s) = u_c, \quad \lim_{x \rightarrow x_c, s \rightarrow s_c} v(x, s) = v_c,$$

но их производные u_x, v_x обращаются в бесконечность. Нашей задачей является локальное описание поведения решений возле слабых особенностей *общего положения*.

Мы будем рассматривать слабые особенности следующих двух типов.

Тип I. Предельное значение (u_c, v_c) лежит в области гиперболичности системы (1.48), т.е.

$$P''(u_c) > 0. \quad (3.1)$$

Тип II. Предельное значение (u_c, v_c) лежит в области эллиптичности системы (1.48), т.е.

$$P''(u_c) < 0. \quad (3.2)$$

Нетрудно видеть, что линейное уравнение в частных производных (1.31) относится к гиперболическому/эллиптическому типу возле критической точки (u_c, v_c) типа I/II соответственно.

Заметим, что, поскольку производная h_v функции h удовлетворяет тому же линейному уравнению в частных производных (1.31), что и сама функция h , нам будет достаточно изучить слабые особенности функций $u(x, s)$ и $v(x, s)$, задаваемых системой

$$\begin{aligned} x + s h_u(u, v) &= f_u(u, v) \\ s h_v(u, v) &= f_v(u, v) \end{aligned} \tag{3.3}$$

в которой обе функции h и f удовлетворяют (1.31). Далее, сдвиги

$$x \mapsto x - x_c, \quad s \mapsto s - s_c$$

можно компенсировать переопределением функции f .

$$f \mapsto f + x_c u + s_c h$$

Таким образом, без потери общности мы можем предположить, что критическая точка совпадает с началом координат, $x_c = s_c = 0$.

Упростим обозначения следующим образом: значения функций $f(u, v)$, $h(u, v)$ и их производных $f_u(u, v)$, $f_v(u, v)$ и т.д. в критической точке (u_c, v_c) будут обозначаться через f^0 , h^0 , f_u^0 , f_v^0 и т.д. Обозначим также

$$P_0 := P(u_c), \quad P'_0 := P'(u_c)$$

и т.д.

В соответствии со сделанными выше соглашениями мы будем иметь

$$f_u^0 = f_v^0 = 0. \tag{3.4}$$

В наших обозначениях теорема о неявной функции делается неприменимой, если

$$-\det \begin{pmatrix} f_{uu} - s h_{uu} & f_{uv} - s h_{uv} \\ f_{uv} - s h_{uv} & f_{vv} - s h_{vv} \end{pmatrix}_{x=0, s=0} = (f_{uv}^0)^2 - P''_0 (f_{vv}^0)^2 = 0. \tag{3.5}$$

Из представления решений в виде (1.33) вытекает, что отображение, обратное к отображению

$$(x, t) \mapsto (u(x, t), v(x, t))$$

определено также и в окрестности критической точки. Более того, оно записывается в градиентной форме

$$(u, v) \mapsto (f_u(u, v), f_v(u, v)) = (x, t), \tag{3.6}$$

где функция $f(u, v)$ удовлетворяет уравнению (1.31). Напомним, что в окрестности критической точки (u_c, v_c) типа I это уравнение относится к гиперболическому типу. Слабые особенности решения $(u(x, t), v(x, t))$ – это в точности те точки, в которых якобиан градиентного отображения (3.6) зануляется.

Классификация особенностей гладких отображений плоскости на плоскость была получена в знаменитой работе Уитни [54]. Эта классификация послужила одной из отправных точек для создания современной теории особенностей. Напомним, что Уитни получил полный список нормальных форм гладких отображений

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (u, v) &\mapsto (x, t), \end{aligned}$$

устойчивых по отношению к малым возмущениям. Он доказал, что с точностью до диффеоморфизмов

$$\begin{aligned} (x, t) &\mapsto (\tilde{x}, \tilde{t}) \\ (u, v) &\mapsto (\tilde{u}, \tilde{v}) \end{aligned}$$

такие отображения относятся к одной из следующих нормальных форм.

Тип $W1$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{v} \\ \tilde{t} &= \tilde{u} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тип $W2$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{v}^2 \\ \tilde{t} &= \tilde{u} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Тип $W3$

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{u} \tilde{v} - \frac{1}{6} \tilde{v}^3 \\ \tilde{t} &= \tilde{u} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для отображений, относящихся к типу $W1$ обратные функции $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ корректно определены и являются гладкими. Мы покажем ниже, что решения квазилинейной системы (1.48) возле особых точек общего положения, относящихся к типу I, локально представляются в виде (3.8).

Другим естественным вопросом является задача о структуре решения в окрестности *первой* особой точки. Будем говорить, что особая точка (x_c, t_c) является первой особенностью решения нелинейного волнового уравнения, если функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ являются гладкими для достаточно малых $|x - x_c|$ и при $t < t_c$. Мы покажем, что локальное поведение решения в окрестности точки первой особенности общего положения внутри области гиперболичности описывается нормальной формой типа $W3$ из списка Уитни. Обратим внимание на существенное ограничение: в отличие от классификационной задачи Уитни в окрестности критических точек решений квазилинейных уравнений будут допускаться лишь *аффинные преобразования* независимых переменных x, t , а не произвольные диффеоморфизмы.

Перейдем к описанию особенностей общего положения типа I решений уравнений (1.48). В силу предположения $P_0'' > 0$ якобиан (3.5) допускает факторизацию в виде

$$(f_{uv}^0)^2 - P_0'' (f_{vv}^0)^2 = (f_{uv}^0 + \sqrt{P_0''} f_{vv}^0) (f_{uv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vv}^0).$$

Сформулируем теперь первое предположение, выделяющее подкласс особенностей общего положения. Будем предполагать, что в критической точке типа I зануляется лишь один из факторов. Не ограничивая общности можно предположить, что в этой точке

$$f_{uv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vv}^0 = 0. \quad (3.10)$$

Другие ограничения на подкласс особенностей общего положения сформулированы в следующем

Определение 3.1 Мы скажем, что критическая точка (3.10) типа I является точкой общего положения если выполнены следующие условия:

$$f_{uv}^0 + \sqrt{P_0''} f_{vv}^0 \neq 0 \quad (3.11)$$

и

$$f_{uvv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vvv}^0 + f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} \neq 0, \quad (3.12)$$

или же

$$f_{uvv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vvv}^0 + f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} = 0,$$

но

$$A_0 := h_{uv}^0 - \sqrt{P_0''} h_{vv}^0 + h_v^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} \neq 0 \quad \text{and} \quad (3.13)$$

$$B_0 := f_{uvvv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vvvv}^0 + f_{vvv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} + \frac{1}{32} \frac{f_{vv}^0}{(P_0'')^{5/2}} [5(P_0''')^2 - 4P_0^{IV} P_0''] \neq 0.$$

Формула

$$\partial_x r_{\pm} = \frac{1}{f_{uv}^0 \pm \sqrt{P_0''} f_{vv}^0 - s \left(h_{uv}^0 \pm \sqrt{P_0''} h_{vv}^0 \right)} \quad (3.14)$$

для производных римановых инвариантов проясняет смысл первого из сформулированных выше предположений (3.11): в критической точке $(x_c, s_c) = (0, 0)$ производные лишь одного из римановых инвариантов обращаются в бесконечность (в наших обозначениях речь идет об инварианте r_-), в то время как другой риманов инвариант остается гладким.

Покажем, что случай (3.12) несовместим с предположением о том, что критическая точка $(x_c, s_c) = (0, 0)$ локально является первой особой точкой.

Лемма 3.2 *Предположим, что $(x_c, s_c) = (0, 0)$ – критическая точка типа I удовлетворяющая условиям (3.10) и (3.11) такая, что функции $u(x, s)$, $v(x, s)$, задаваемые уравнениями (3.3) и нормализацией $u(x_c, s_c) = u_c$, $v(x_c, s_c) = v_c$ являются гладкими при $s < s_c$ для достаточно малых $|x - x_c|$, $|s - s_c|$. Тогда*

$$f_{uv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vv}^0 + f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} = 0. \quad (3.15)$$

Условие (3.15) допускает следующую интерпретацию: график риманова инварианта $r_-(x, s_c)$ должен иметь точку перегиба при $x = x_c$.

Доказательство. Для простоты предположим, что

$$h_v^0 \neq 0.$$

Используя это предположение можно решить систему (3.3) в виде

$$s = s(u, v) = \frac{f_v}{h_v}, \quad x = x(u, v) = \frac{f_u h_v - f_v h_u}{h_v}.$$

Разлагая эти функции в ряд Тейлора по переменным r_+ , r_- в точке $u = u_c$, $v = v_c$, мы приходим к следующим выражениям для линейных комбинаций

$$x_{\pm} = x + \left(h_u^0 \pm \sqrt{P_0''} h_v^0 \right) s \quad (3.16)$$

независимых характеристических переменных

$$\begin{aligned} x_+ &= 2f_{vv}^0 \sqrt{P_0''} \bar{r}_+ \\ &+ \frac{1}{2h_v^0} \left[h_v^0 \left(f_{uvv}^0 + \sqrt{P_0''} f_{vvv}^0 \right) - 2f_{vv}^0 \left(h_{uv}^0 + \sqrt{P_0''} h_{vv}^0 \right) \right] \bar{r}_+^2 + \mathcal{O}(|w|^3) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} x_- &= f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{8P_0''} \bar{r}_+^2 - \frac{f_{vv}^0}{h_v^0} \left(h_{uv}^0 - \sqrt{P_0''} h_{vv}^0 + h_v^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} \right) \bar{r}_+ \bar{r}_- \\ &+ \frac{1}{2} \left(f_{uvv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vvv}^0 + f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''} \right) \bar{r}_-^2 + \mathcal{O}(|w|^3). \end{aligned}$$

В этих формулах мы использовали обозначения

$$\bar{r}_\pm = r_\pm - r_\pm^0 \quad (3.18)$$

для сдвинутых римановых инвариантов. Предполагая выполненным условие (3.12), сделаем линейную замену

$$x_\pm \mapsto k x_\pm, \quad \bar{r}_+ \mapsto k \bar{r}_+, \quad \bar{r}_- \mapsto k^{1/2} \bar{r}_-$$

с малым положительным коэффициентом k . После простых вычислений получаем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_+ &= \bar{r}_+ + \mathcal{O}(k^{1/2}) \\ \tilde{x}_- &= \bar{r}_-^2 + \mathcal{O}(k^{1/2}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{x}_+ &= \frac{x_+}{2f_{vv}^0 \sqrt{P_0''}} \\ \tilde{x}_- &= \frac{2x_-}{f_{uvv}^0 - \sqrt{P_0''} f_{vvv}^0 + f_{vv}^0 \frac{P_0'''}{4P_0''}} \end{aligned}$$

(обратим внимание на то, что $f_{vv}^0 \neq 0$ ввиду принятых предположений (3.11)). Мы приходим к нормальной форме Уитни типа $W2$. Следовательно, решение, определяемое в неявной форме из системы (3.3) в окрестности критической точки определено на полуплоскости, проходящей через критическую точку, с границей $\tilde{x}_- = 0$. Ясно, что поведение такого типа несовместимо с предположениями леммы. \square

Теорема 3.3 *При выполнении условий (3.13) локальная структура решения описывается нормальной формой Уитни типа $W3$.*

Доказательство . Нам теперь следует учесть также и члены третьего порядка в тейлоровском разложении функций $x(u, v)$, $s(u, v)$. Линейная замена

$$x_+ \mapsto k^{2/3} x_+, \quad x_- \mapsto k x_-, \quad \bar{r}_+ \mapsto k^{2/3} \bar{r}_+, \quad \bar{r}_- \mapsto k^{1/3} \bar{r}_- \quad (3.20)$$

дает

$$\begin{aligned} x_+ &= 2f_{vv}^0 \sqrt{P_0''} \bar{r}_+ + \mathcal{O}(k^{1/3}) \\ x_- &= -\frac{f_{vv}^0}{h_v^0} A_0 \bar{r}_+ \bar{r}_- + \frac{1}{6} B_0 \bar{r}_-^3 + \mathcal{O}(k^{1/3}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

где коэффициенты A_0 и B_0 определяются формулами (3.13). Теорема доказана. \square

Перейдем теперь к рассмотрению критических точек типа II. Напомним [51], что эллиптическая омбилическая особенность может быть реализована, как особенность функции

$$F(X, Y) = \frac{1}{3} X^3 - X Y^2 \quad (3.22)$$

при $X = Y = 0$. Ее можно также определить (см. [2]) как одну из вещественных форм коразмерности 2 особенности типа D_4 . Нам будет полезна следующая интерпретация. Для гармонической функции двух переменных $\Phi(X, Y)$,

$$\Phi_{XX} + \Phi_{YY} = 0$$

рассмотрим особенности градиентного отображения

$$(X, Y) \mapsto (\Phi_X(X, Y), \Phi_Y(X, Y)) = (U, V), \quad (3.23)$$

т.е. точки, в которых якобиан отображения (3.23) зануляется,

$$\det \begin{pmatrix} \partial U / \partial X & \partial U / \partial Y \\ \partial V / \partial X & \partial V / \partial Y \end{pmatrix} = -[\Phi_{XX}^2 + \Phi_{XY}^2] = 0.$$

Из явной формулы для якобиана немедленно вытекает, что в особой точке все вторые производные функции Φ зануляются. Таким образом, росток третьего порядка этой функции должен быть кубическим гармоническим полиномом. Следовательно, он совпадает с (3.22) с точностью до линейной замены переменных.

Градиентное отображение для функции (3.22) задается следующими формулами

$$\left. \begin{aligned} U &= X^2 - Y^2 \\ V &= -2XY \end{aligned} \right\}. \quad (3.24)$$

В комплексных координатах

$$W = U - iV, \quad Z = X + iY$$

оно принимает вид

$$W = Z^2. \quad (3.25)$$

Покажем, что в окрестности особой точки типа II особенность общего положения у решения квазилинейной системы (1.48) локально описывается эллиптической омбилической сингулярностью.

Как и выше, предположим, что особая точка совпадает с началом координат, $x_c = s_c = 0$. Мы также будем предполагать, как и выше, что

$$f_u^0 = f_v^0 = 0.$$

Обозначим $\bar{u} = u - u_c$, $\bar{v} = v - v_c$. Рассмотрим решение квазилинейной системы (1.48), задаваемой уравнениями (1.49) в окрестности критической точки.

Лемма 3.4 В критической точке зануляются все вторые производные функции f :

$$f_{uu}^0 = f_{vv}^0 = f_{uv}^0 = 0. \quad (3.26)$$

Доказательство вытекает из (3.5) в силу отрицательности величины P_0'' .

Определение 3.5 Критическая точка типа II называется точкой общего положения, если росток третьего порядка функции $f(u, v)$ в этой точке отличен от нуля.

Лемма 3.6 После линейной замены

$$\begin{aligned} x &\mapsto kx \\ s &\mapsto ks \\ \bar{u} &\mapsto k^{1/2}\bar{u} \\ \bar{v} &\mapsto k^{1/2}\bar{v} \end{aligned}$$

в пределе $k \rightarrow 0+$ решение системы (3.5) возле критической точки ($x = x_c = 0, s = s_c = 0, u = u_c, v = v_c$) общего положения типа II решение стремится к функции, удовлетворяющей системе

$$z = \frac{1}{2} a_0 w^2 \quad (3.27)$$

$$z := x + s h_u^0 + i c_0 s h_v^0, \quad w := \bar{v} + i c_0 \bar{u}, \quad a_0 := f_{uvv}^0 + i c_0 f_{vvv}^0,$$

где

$$c_0 = \sqrt{-P_0''}.$$

Отметим, что в силу (1.31) и (3.26) в критической точке для производных функции $f(u, v)$ выполняются соотношения

$$f_{uuu}^0 = P_0'' f_{uvv}^0, \quad f_{uuv}^0 = P_0'' f_{vvv}^0.$$

Следовательно, в критической точке общего положения типа II выполнено равенство $a_0 \neq 0$.

Доказательство Леммы аналогично доказательству Леммы 3.2. Разлагая левые части уравнений (3.3) в ряды Тейлора и используя уравнение (1.31), справедливое для обеих функций f и h , получаем

$$\begin{aligned} &x + s h_u^0 + s (-c_0^2 h_{vv}^0 \bar{u} + h_{uv}^0 \bar{v}) + \frac{s}{2} [h_{uvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 2c_0^2 h_{vvv}^0 \bar{u} \bar{v}] \\ &= \frac{1}{2} [f_{uvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 2c_0^2 f_{vvv}^0 \bar{u} \bar{v}] + \mathcal{O}((\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{3/2}) \\ &s h_v^0 + s (h_{uv}^0 \bar{u} + h_{vv}^0 \bar{v}) + \frac{s}{2} [h_{vvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) + 2h_{uvv}^0 \bar{u} \bar{v}] \\ &= \frac{1}{2} [f_{vvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) + 2f_{uvv}^0 \bar{u} \bar{v}] + \mathcal{O}((\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{3/2}) \end{aligned}$$

После линейной замены и деления на k мы приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} x + s h_u^0 &= \frac{1}{2} [f_{uvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) - 2c_0^2 f_{vvv}^0 \bar{u} \bar{v}] + \mathcal{O}(k^{1/2}) \\ s h_v^0 &= \frac{1}{2} [f_{vvv}^0 (-c_0^2 \bar{u}^2 + \bar{v}^2) + 2f_{uvv}^0 \bar{u} \bar{v}] + \mathcal{O}(k^{1/2}). \end{aligned}$$

В пределе $k \rightarrow 0$ они сходятся к (3.27). Лемма доказана. \square

Таким образом, мы установили, что после подходящей линейной замены независимых переменных локальная структура общего решения в окрестности критической точки общего положения типа II асимптотически описывается бифуркационной диаграммой (3.25) эллиптической омбилической сингулярности.

Перейдем теперь к классификации особенностей решений гамильтоновых квазилинейных систем в общем многокомпонентном случае. Мы рассмотрим даже более общий случай полугамильтоновых систем (как известно, этот класс содержит гамильтоновы интегрируемые системы).

В точке градиентной катастрофы (без ограничения общности, как и выше, можно предположить, что точка катастрофы совпадает с началом координат $x_0 = 0, t_0 = 0$) условия теоремы о неявной функции, примененной к уравнениям (1.55), перестают выполняться. Более явно, это означает, что в точке катастрофы

$$\det (a_{i,j}(\mathbf{u}) t + A_{i,j}(\mathbf{u}))_{x=x_0, t=t_0, \mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \prod_{i=1}^n A_{i,i}(\mathbf{u}_0) = 0. \quad (3.28)$$

Определение 3.7 Точка градиентной катастрофы $x = x_0 = 0, t = t_0 = 0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ называется точкой общего положения, если в этой точке

$$\begin{aligned} A_{i,i}(\mathbf{u}_0) = 0, \quad A_{j,j}(\mathbf{u}_0) \neq 0 \quad \text{при } j \neq i, \\ A_{i,ii}(\mathbf{u}_0) = 0, \quad A_{i,iii}(\mathbf{u}_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Первая часть этого определения означает, что только i -й риманов инвариант опрокидывается в критической точке. Предположение $A_{i,ii}(\mathbf{u}_0) = 0$ не является ограничительным; его смысл в том, что график i -го риманова инварианта $u_i(x, 0)$ имеет точку перегиба с вертикальной касательной в точке градиентной катастрофы. Как будет ясно из дальнейшего неравенство $A_{i,iii}(\mathbf{u}_0) \neq 0$ гарантирует, что эта точка перегиба является невырожденной.

Предположим, что $x = x_0 = 0, t = t_0 = 0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = 0$ является точкой градиентной катастрофы общего положения с $i = n$. Обозначим

$$a_i^0 := a_i(\mathbf{u}_0), \quad A_{i,i}^0 := A_{i,i}(\mathbf{u}_0)$$

и т.д. Заметим, что

$$A_{i,j}^0 = 0 \quad \text{при всех } i \neq j$$

в силу уравнений (1.52).

Сделаем линейную замену в пространстве независимых переменных, полагая

$$z_i := x - a_i^0 t, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.30)$$

Теорема 3.8 *После масштабного преобразования*

$$\begin{aligned} z_m &\mapsto k^{2/3} z_m, & m \neq n \\ z_n &\mapsto k z_n \\ t &\mapsto k^{2/3} t \\ u_m &\mapsto k^{2/3} u_m, & m \neq n \\ u_n &\mapsto k^{1/3} u_n \end{aligned} \quad (3.31)$$

система уравнений (1.52) принимает вид

$$\begin{aligned} z_m &= A_{m,m}^0 u_m + \mathcal{O}(k^{1/3}), & m \neq n \\ z_n &= a_{n,n}^0 t u_n + \frac{1}{6} A_{n,nnn}^0 u_n^3 + \mathcal{O}(k^{1/3}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Доказательство. Используя уравнения (1.51), получаем

$$a_{i,jk} = \frac{2a_i - a_j - a_k}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)} a_{i,j} a_{i,k} + \frac{(a_i - a_j)^2 a_{i,k} a_{k,j} - (a_i - a_k)^2 a_{i,j} a_{j,k}}{(a_i - a_j)(a_i - a_k)(a_j - a_k)} \quad (3.33)$$

для всех троек попарно различных индексов i, j, k . В силу этих соотношений, а также системы (1.52) приходим к следующему утверждению

Лемма 3.9 *В точке градиентной катастрофы*

$$\begin{aligned} A_{m,nn}^0 &= 0, & A_{m,ni}^0 &= 0 \quad \text{for } m \neq n, \quad i \neq m, n \\ A_{m,nnn}^0 &= 0, & A_{m,nni}^0 &= 0, & A_{m,nij}^0 &= 0, & A_{m,ijk}^0 &= 0 \\ \text{for } m &\neq n, & i, j, k &\neq m, n, & i, j, k &\text{ попарно различны} \\ A_{n,ni}^0 &= 0, & A_{n,ij}^0 &= 0, & \text{при } i, j &\neq n, & i &\neq j \\ A_{n,nni}^0 &= 0, & A_{n,nij}^0 &= 0, & A_{n,ijk}^0 &= 0 \\ \text{при } i, j, k &\neq n, & i, j, k &\text{ попарно различны} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Следствие 3.10 *Тейлоровское разложение уравнений (1.55) в окрестности критической точки принимает вид*

$$\begin{aligned}
x - a_m^0 t &= t \left[\sum'_i a_{m,i}^0 u_i + a_{m,m}^0 u_m + a_{m,n}^0 u_n + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2) \right] + A_{m,m}^0 u_m \\
&- \frac{1}{2} \sum'_i \frac{a_{m,i}^0}{a_m^0 - a_i^0} A_{i,i}^0 u_i^2 + u_m \sum'_i \frac{a_{m,i}^0}{a_m^0 - a_i^0} A_{m,m}^0 u_i \\
&+ \frac{1}{2} A_{m,mm}^0 u_m^2 + u_m u_n \frac{a_{m,n}^0}{a_m^0 - a_n^0} A_{m,m}^0 \\
&+ \frac{1}{2} \sum'_{i \neq j} A_{m,ij}^0 u_i^2 u_j + \frac{1}{6} \sum'_i A_{m,iii}^0 u_i^3 \\
&+ \frac{1}{2} u_m \sum'_{i \neq j} A_{m,mij}^0 u_i u_j + \frac{1}{2} u_m \sum'_i A_{m,mii}^0 u_i^2 \\
&+ \frac{1}{2} u_m^2 \sum'_i A_{m,mmi}^0 u_i + \frac{1}{6} A_{m,mmm}^0 u_m^3 + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^4). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - a_n^0 t &= t \left[\sum'_i a_{n,i}^0 u_i + a_{n,n}^0 u_n + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^2) \right] - \frac{1}{2} \sum'_i \frac{a_{n,i}^0}{a_n^0 - a_i^0} A_{i,i}^0 u_i^2 \\
&+ \frac{1}{2} \sum'_{i \neq j} A_{n,ij}^0 u_i^2 u_j + \frac{1}{6} \sum'_i A_{n,iii}^0 u_i^3 + \frac{1}{2} u_n \sum'_i A_{n,nii}^0 u_i^2 + \frac{1}{6} A_{n,nnn}^0 u_n^3 + \mathcal{O}(|\mathbf{u}|^4). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

В этих формулах подразумевается, что индексы суммирования i, j и пр. в суммах, обозначенных через \sum' не должны принимать значения n и (в формуле (3.35)) значения m .

Применяя масштабное преобразование (3.31) к уравнениям (3.35), (3.36) мы приходим к доказательству Теоремы. \square

Как было показано выше, локально, в окрестности точки градиентной катастрофы общее решение нелинейного волнового уравнения, а также, более общо, любого гамильтонова уравнения в частных производных, коммутирующего с ним, допускает совершенно стандартное описание. А именно, если градиентная катастрофа имеет место в области гиперболичности, то локальное поведение описывается одной из уитниевских сингулярностей. Для градиентной катастрофы в области эллиптичности локальное поведение допускает описание в терминах эллиптической омбилической сингулярности. В обоих случаях локальная форма решения является универсальной, т.е. не зависящей от выбора решения, с точностью до простых аффинных преобразований независимых переменных и нелинейного преобразования зависимых переменных.

Гипотеза Универсальности для решений возмущенной системы утверждает, что, аналогичным образом, главный член асимптотического разложения решения при $\epsilon \rightarrow 0$ возле критической точки не зависит от выбора решения общего положения, с точностью до простых преобразований зависимых и независимых переменных. Возникающие универсальные формы описываются в терминах некоторых весьма специальных решений уравнений типа Пенлеве и их обобщений. Дадим описание этих решений.

- Критическая точка типа I. Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $U = U(X)$, зависящее от параметра T

$$X = T U - \left[\frac{1}{6} U^3 + \frac{1}{24} (U'^2 + 2U U'') + \frac{1}{240} U^{IV} \right], \quad U' = \frac{dU}{dX} \quad \text{и т.д.} \quad (3.37)$$

Уравнение (3.37) является высшим аналогом уравнения Пенлеве-I. Часто его обозначают символом P_I^2 . Как было показано в работе T.Claeys и M.Vanlessen [11], это уравнение обладает специальным решением, не имеющим сингулярностей на вещественной оси $X \in \mathbb{R}$ при всех вещественных значениях параметра T . Обозначим это решение через $U(X, T)$. Оно может быть охарактеризовано [11] в терминах множителей Стокса ассоциированного с (3.37) линейного дифференциального оператора с полиномиальными коэффициентами. При больших $|X|$ решение растет как

$$U(X, T) \sim (-6X)^{1/3}.$$

При $T \ll 0$ оно монотонно убывает; при положительных T в решении развивается зона осцилляций (см. Рис.1).

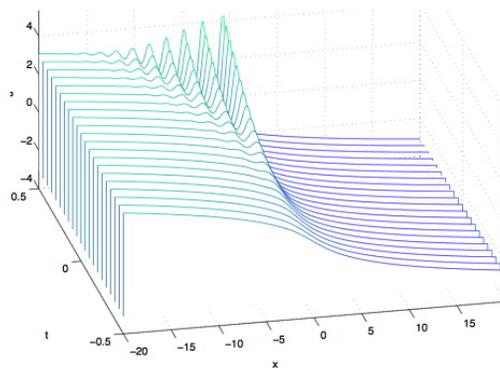


Рис.1: Решение уравнения (3.37) для разных значений параметра $T > 0$

Сформулируем Гипотезу Универсальности, описывающую локальное поведение решений возмущенных гамильтоновых систем (1.106) возле

критической точки (x_c, t_c, u_c, v_c) типа I. Обозначим r_{\pm} римановы инварианты (1.28) невозмущенной сисемы. Через

$$x_{\pm} = (x - x_c) + c_{\pm}(t - t_c), \quad c_{\pm} = h_u(u_c, v_c) \pm \sqrt{P''(u_c)}h_v(u_c, v_c)$$

обозначим характеристические направления в точке градиентной катастрофы. Предположим, что в точке градиентной катастрофы опрокидывается второй риманов инвариант r_- , в то время, как инвариант r_+ остается гладким (см. (3.21) выше). Тогда решение возмущенного уравнения (1.106) в окрестности критической точки имеет следующий вид:

$$r_+ = r_+(u_c, v_c) + c_+x_+ + a_+ \epsilon^{4/7} U'' \left(b_- \frac{x_-}{\epsilon^{6/7}}, b_+ \frac{x_+}{\epsilon^{4/7}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{6/7}) \quad (3.38)$$

$$r_- = r_-(u_c, v_c) + a_- \epsilon^{2/7} U \left(b_- \frac{x_-}{\epsilon^{6/7}}, b_+ \frac{x_+}{\epsilon^{4/7}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{4/7})$$

с некоторыми константами a_{\pm} , b_{\pm} , c_+ , зависящими от выбора решения и гамильтонова возмущения. Здесь $U = U(X, T)$ – специальное решение уравнения (3.37), описанное выше.

- Критическая точка типа II. В этом случае мы приходим к специальному частному решению $W = W_0(Z)$ классического уравнения Пенлеве-I (P_I)

$$W_{ZZ} = 6W^2 - Z. \quad (3.39)$$

Это специальное решение было открыто еще P.Boutroux в начале прошлого века [4]. Оно характеризуется следующим асимптотическим поведением

$$W \sim -\sqrt{\frac{Z}{6}}, \quad |\arg Z| < \frac{4\pi}{5}, \quad |Z| \rightarrow \infty$$

(подразумевается главная ветвь квадратного корня). В частности, решение $W_0(Z)$ не имеет полюсов в секторе $|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}$ при достаточно больших $|Z|$. Boutroux назвал его *tritronquée* (трижды усеченное) решение. А.Капаев [37] получил полную характеристику этого решения в терминах специальных значений множителей Стокса линейного дифференциального оператора, ассоциированного с уравнением (3.39).

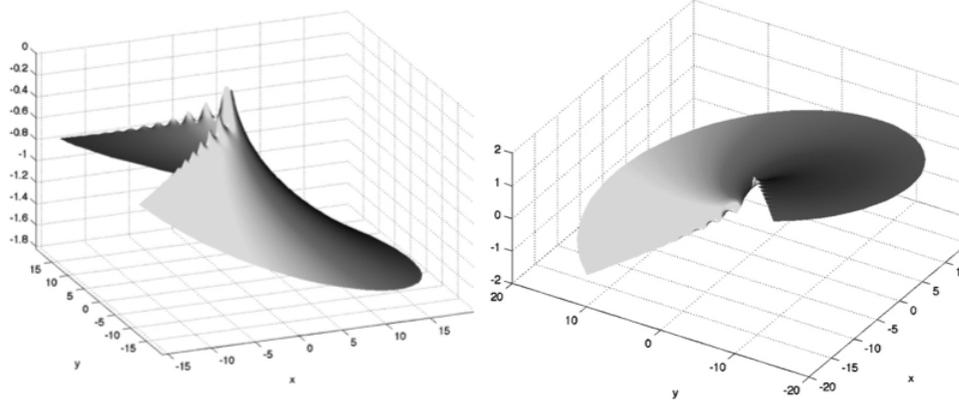


Рис.2: Вещественная (слева) и мнимая часть *tritronquée* решения уравнения Пенлеве-I в секторе $|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}$.

В работе [20] была сформулирована гипотеза, согласно которой *все* полюса *tritronquée* решения уравнения P_I заключены в секторе $|\arg Z| \geq \frac{4\pi}{5}$. На Рис. 2 изображены графики вещественной и мнимой частей *tritronquée* решения. На графиках видно, что полюсов в секторе $|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}$ нет.

Гипотеза Универсальности для критического поведения типа II предлагает следующее выражение для асимптотического описания комплексных римановых инвариантов

$$r_+ = r_+(u_c, v_c) + \beta \epsilon^{2/5} W_0 \left(\frac{x_+}{\alpha \epsilon^{4/5}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{4/5}), \quad (3.40)$$

поведение второго риманова инварианта r_- как функции переменной x_- дается комплексно сопряженным выражением. Здесь $W_0(Z)$ – *tritronquée* решение уравнения P_I ,

$$x_+ = (x - x_c) + (h_v^0 + i \sqrt{-P_0''} h_v^0) (t - t_c),$$

α, β некоторые комплексные константы. Эти константы таковы, что при достаточно малых $|t|$ и $\epsilon > 0$ прямая

$$Z = \frac{x_+}{\alpha \epsilon^{4/5}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

на комплексной плоскости содержится в секторе

$$|\arg Z| < \frac{4\pi}{5},$$

в котором, согласно сформулированной выше гипотезе, *tritonquée* решение $W_0(Z)$ не имеет полюсов.

Перейдем к рассмотрению основных примеров. Начнем с уравнения Буссинеска. Как было объяснено выше, уравнение Буссинеска можно рассматривать, как гамильтоново возмущение нелинейного волнового уравнения с потенциалом

$$P(u) = -\frac{1}{6}u^3.$$

Линейное уравнение (1.31) для этого потенциала совпадает с уравнением Трикоми

$$f_{uu} + u f_{vv} = 0. \quad (3.41)$$

Областью гиперболичности является полуплоскость $u < 0$. D -оператор, переводящий решения этого уравнения в первые интегралы иерархии Буссинеска имеет вид

$$\begin{aligned} f \mapsto D_{\text{Bous}}f = f + \epsilon^2 & \left[\left(\frac{1}{2} f_{vv} + u f_{uvv} \right) u_x^2 + 2u f_{vvv} u_x v_x - f_{uvv} v_x^2 \right] \\ & + \epsilon^4 \left[\left(\frac{6}{5} u^2 f_{4v} - f_{uvv} \right) u_{xx}^2 - \frac{4}{5} (3u f_{u3v} + 2f_{vvv}) u_{xx} v_{xx} - \frac{6}{5} u f_{4v} v_{xx}^2 \right. \\ & - \frac{1}{5} f_{4v} u_{xx} v_x^2 - f_{u3v} v_{xx} u_x^2 - \frac{1}{120} (31 f_{4v} - 20u^3 f_{6v} + 92u f_{u4v}) u_x^4 \\ & - \frac{2}{15} u (13 f_{5v} + 5u f_{u5v}) u_x^3 v_x + \frac{1}{10} (11 f_{u4v} - 10u^2 f_{6v}) u_x^2 v_x^2 \\ & \left. + \frac{1}{15} (7 f_{5v} + 10u f_{u5v}) u_x v_x^3 + \frac{1}{6} u f_{6v} v_x^4 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Здесь и далее мы будем использовать следующие обозначения для частных производных

$$f_{4v} := \frac{\partial^4 f}{\partial v^4}, \quad f_{u3v} := \frac{\partial^4 f}{\partial u \partial v^3}$$

и т.д. В частности, выбирая

$$f = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{6} u^3$$

мы получим плотность гамильтониана уравнения Буссинеска

$$D_{\text{Bous}}f = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{6} u^3 + \frac{\epsilon^2}{2} u_x^2.$$

Опишем критическое поведение решений уравнений иерархии Буссинеска

$$\begin{aligned} u_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta v(x)} \\ v_t &= \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} \end{aligned} \quad (3.43)$$

где

$$H = \int D_{\text{Bous}} \tilde{h} dx, \quad \tilde{h}_{uu} + u \tilde{h}_{vv} = 0. \quad (3.44)$$

Начнем с критических точек типа I; для них $u_c < 0$. Удобно изменить знак

$$u \mapsto -u.$$

Выпишем струнное уравнение

$$\delta \int [x u + t D_{\text{Bous}} h - D_{\text{Bous}} f] dx = 0 \quad (3.45)$$

для произвольной пары функций $f = f(u, v)$, $h = h(u, v)$ удовлетворяющих уравнениям

$$f_{uu} = u f_{vv}, \quad h_{uu} = u h_{vv}.$$

Здесь решение $h = h(u, v)$ связано с гамильтонианом (3.44) системы (3.43) (с заменой u на $-u$) соотношением

$$\partial_v \tilde{h} = h. \quad (3.46)$$

В критической точке (u_c, v_c) имеем

$$\begin{aligned} f_u^0 &= f_v^0 = 0 \\ f_{uv}^0 &= \sqrt{u_c} f_{vv}^0 \\ f_{uvv}^0 &= -\frac{f_{vv}^0}{4u_c} + \sqrt{u_c} f_{vvv}^0 \end{aligned}$$

(см. (3.10) и (3.15) выше). Разложим струнное уравнение возле критической точки в ряд Тейлора по отношению к римановым инвариантам

$$r_{\pm} = v \pm \frac{2}{3} u^{3/2}.$$

Сделаем также линейную замену независимых переменных $(x, t) \mapsto (x_+, x_-)$

$$x_{\pm} = x + (h_u^0 \pm \sqrt{u_c} h_v^0) t$$

(ср. (3.16)). После перемасштабирования

$$\bar{x}_+ \mapsto k^{2/3} \bar{x}_+, \quad \bar{x}_- \mapsto k \bar{x}_- \quad (3.47)$$

$$\bar{r}_+ \mapsto k^{2/3} \bar{r}_+, \quad \bar{r}_- \mapsto k^{1/3} \bar{r}_-$$

$$\epsilon \mapsto k^{7/6} \epsilon$$

сдвинутых переменных

$$\bar{x}_{\pm} = x_{\pm} - x_{\pm}^0, \quad \bar{r}_{\pm} = r_{\pm} - r_{\pm}^0 = \bar{v} \pm \sqrt{u_c} \bar{u}$$

в пределе $k \rightarrow 0$ приходим к следующей системе

$$\bar{x}_+ = 2\sqrt{u_c} f_{vv}^0 \bar{r}_+ + \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{u_c}} f_{vv}^0 \partial_-^2 \bar{r}_- + \mathcal{O}(k^{1/3}) \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_- &= A_0 \bar{x}_+ \bar{r}_- + B_0 \bar{r}_-^3 + \epsilon^2 A_2 [(\partial_- \bar{r}_-)^2 + 2\bar{r}_- \partial_-^2 \bar{r}_-] \\ &\quad - \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{u_c}} f_{vv}^0 \partial_-^2 \bar{r}_+ + \epsilon^4 \tilde{A}_4 \partial_-^4 \bar{r}_- + \mathcal{O}(k^{1/3}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

с некоторыми коэффициентами $A_0, B_0, A_2, \tilde{A}_4$ (см. ниже). В этих уравнениях мы положили

$$\partial_{\pm} := \frac{\partial}{\partial x_{\pm}}.$$

Из первого уравнения получаем

$$\partial_-^2 \bar{r}_+ = -\frac{\epsilon^2}{4u_c} \partial_-^4 \bar{r}_- + \mathcal{O}(k^{1/3}).$$

Подстановка в (3.49) дает

$$\bar{x}_- = A_0 \bar{x}_+ \bar{r}_- + B_0 \bar{r}_-^3 + \epsilon^2 A_2 [(\partial_- \bar{r}_-)^2 + 2\bar{r}_- \partial_-^2 \bar{r}_-] + \epsilon^4 A_4 \partial_-^4 \bar{r}_- + \mathcal{O}(k^{1/3}) \quad (3.50)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{h_{vv}^0}{2h_v^0} - \frac{h_{uv}^0}{2\sqrt{u_c} h_v^0} - \frac{1}{8u_c^{3/2}} \\ B_0 &= \frac{1}{6} \left[\frac{5f_{vv}^0}{32u_c^{5/2}} + \frac{1}{4u_c} f_{vvv}^0 - \sqrt{u_c} f_{vvvv}^0 + f_{uvvv}^0 \right] \\ A_2 &= 6\sqrt{u_c} B_0 \\ A_4 &= \frac{72}{5} u_c B_0. \end{aligned}$$

Подстановка

$$\begin{aligned} \bar{x}_- &= \alpha X \\ \bar{x}_+ &= \gamma T \\ \bar{r}_- &= \beta U \end{aligned}$$

при выборе

$$k = \epsilon^{6/7}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha &= -2^{10/7} 3^{4/7} u_c^{3/14} B_0^{1/7} \\ \beta &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/7} u_c^{1/14} B_0^{-2/7} \\ \gamma &= -2^{9/7} 3^{5/7} u_c^{1/7} A_0^{-1} B_0^{3/7} \end{aligned}$$

сводит уравнение (3.50) к стандартной форме

$$X = UT - \left[\frac{1}{6}U^3 + \frac{1}{24}(U'^2 + 2UU'') + \frac{1}{240}U^{IV} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^{2/7}).$$

Уравнение (3.48) принимает следующую форму

$$\bar{x}_+ = 2\sqrt{u_c}f_{vv}^0 \left(\bar{r}_+ + \frac{1}{4u_c} \frac{\beta^2}{\alpha} U'' \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{2/7}).$$

Возвращаясь к исходным переменным, приходим к окончательной формулировке Гипотезы Универсальности для критического поведения типа I общего решения уравнения иерархии Буссинеска:

$$\begin{aligned} r_+ &= r_+^0 + \frac{1}{2\sqrt{u_c}f_{vv}^0} [x - x_c + (h_u^0 + \sqrt{u_c}h_v^0)(t - t_c)] \\ &\quad - \frac{\epsilon^{4/7}}{4u_c} \frac{\beta}{\alpha^2} U'' \left(\frac{x - x_c + (h_u^0 - \sqrt{u_c}h_v^0)(t - t_c)}{\epsilon^{6/7}\alpha}, \frac{x - x_c + (h_u^0 + \sqrt{u_c}h_v^0)(t - t_c)}{\epsilon^{4/7}\gamma} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{6/7}) \\ r_- &= r_-^0 + \beta \epsilon^{2/7} U \left(\frac{x - x_c + (h_u^0 - \sqrt{u_c}h_v^0)(t - t_c)}{\epsilon^{6/7}\alpha}, \frac{x - x_c + (h_u^0 + \sqrt{u_c}h_v^0)(t - t_c)}{\epsilon^{4/7}\gamma} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{4/7}). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Здесь функция $U(X, T)$, гладкая при всех вещественных значениях переменных X, T , определяется из уравнения P_I^2 , как было объяснено выше. При специальном выборе

$$h(u, v) = v$$

получается описание критического поведения решений самого уравнения Буссинеска. Решения параметризуются функциями $f = f(u, v)$, удовлетворяющими

$$f_{uu} = u f_{vv}.$$

Рассмотрим теперь критическое поведение типа II. В этом случае удобно вернуться к исходным переменным уравнения Буссинеска. В критической точке $u_c > 0$. Для данной пары решений $f = f(u, v)$, $h = h(u, v)$ уравнения Трикоми (3.41) рассмотрим струнное уравнение (3.45). В критической точке типа II будем иметь

$$f_u^0 = f_v^0 = 0, \quad f_{uu}^0 = f_{uv}^0 = f_{vv}^0 = 0.$$

Римановы инварианты

$$r_{\pm} = v \mp \frac{2}{3} i u^{3/2}$$

комплексно сопряжены. Для невозмущенной системы они являются голоморфными (соответственно, антиголоморфными) функциями характеристических переменных

$$x_{\pm} = x + (h_u \mp i \sqrt{u} h_v)t,$$

т.е.

$$\frac{\partial r_+}{\partial x_-} = \frac{\partial r_-}{\partial x_+} = 0.$$

Как и выше, разложим струнное уравнение в ряд Тейлора возле критической точки. После масштабного преобразования

$$\begin{aligned}\bar{x}_\pm &\mapsto k \bar{x}_\pm \\ \bar{r}_\pm &\mapsto k^{1/2} \bar{r}_\pm \\ \epsilon &\mapsto k^{5/4} \epsilon\end{aligned}$$

сдвинутых переменных

$$\begin{aligned}\bar{x}_\pm &= (x - x_c) \pm i \sqrt{u_c} (t - t_c) \\ \bar{r}_\pm &= r_\pm - r_\pm(u_c, v_c) = \bar{v} \pm i \sqrt{u_c} \bar{u}\end{aligned}$$

в пределе при $k \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}\bar{x}_+ &= \lambda (\bar{r}_+^2 - \epsilon^2 \mu \bar{r}_+'') + \mathcal{O}(k^{1/2}) \\ \lambda &= \frac{1}{2} (f_{uvv}^0 - i \sqrt{u_c} f_{vvv}^0), \quad \mu = 4i \sqrt{u_c}.\end{aligned}\tag{3.52}$$

Комплексно сопряженное выражение получается для x_- , r_- .

В этих уравнениях

$$\bar{r}_+'' = \partial_x^2 \bar{r}_+ = \partial_+^2 \bar{r}_+ + 2\partial_+ \partial_- \bar{r}_+ + \partial_-^2 \bar{r}_+.$$

Делая то же само масштабное преобразование в уравнении Буссинеска, находим, что

$$\begin{aligned}\bar{u}_t &= \bar{v}_x \\ \bar{v}_t + u_c \bar{u}_x &= \mathcal{O}(k^{1/2}).\end{aligned}$$

Это равносильно соотношению

$$\partial_- \bar{r}_+ = \mathcal{O}(k^{1/2}).$$

Другими словами, в главном порядке функция \bar{r}_+ аналитична по переменной x_+ . Уравнение (3.52) принимает следующий вид

$$\bar{x}_+ = \lambda (\bar{r}_+^2 - \epsilon^2 \mu \partial_+^2 \bar{r}_+) + \mathcal{O}(k^{1/2}).\tag{3.53}$$

Выбирая

$$k = \epsilon^{4/5}$$

и делая замену

$$\begin{aligned}x_+ &= \alpha Z \\ \bar{r}_+ &= \beta W\end{aligned}$$

с

$$\alpha = (6\lambda\mu^2)^{1/5}$$

$$\beta = \left(6^3 \frac{\mu}{\lambda^2}\right)^{1/5}$$

мы приходим к требуемому уравнению

$$Z = 6W^2 - W'' + \mathcal{O}(\epsilon^{2/5})$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем Гипотезу Универсальности для критического поведения типа II решений уравнения иерархии Буссинеска в виде

$$v - v_c - i u_c^{1/2} (u - u_c)$$

$$= \epsilon^{2/5} \beta W_0 \left(\frac{x - x_c + (h_u^0 - i\sqrt{u_c} h_v^0)(t - t_c)}{\alpha \epsilon^{4/5}} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^{4/5}) \quad (3.54)$$

где $W_0(Z)$ – *tritronquée* решение уравнения Пенлеве-I equation. В самом деле, нетрудно видеть, что прямая

$$Z = \frac{1}{\alpha} (x - x_c + (h_u^0 - i\sqrt{u_c} h_v^0)(t - t_c)), \quad x \in \mathbb{R}$$

лежит в секторе

$$|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим цепочку Тоды. Линейное уравнение (1.31) относится к гиперболическому типу при всех вещественных (u, v) :

$$f_{uu} = e^u f_{vv}. \quad (3.55)$$

D -оператор, переводящий решения этого уравнения в законы сохранения для иерархии Тоды и ее расширения (см. [8]) имеет вид

$$f \mapsto h_f = D_{\text{Тоды}} f$$

$$= f - \frac{\epsilon^2}{24} [(f_{vv} + 2f_{uvv}) v_x^2 + 2e^u (f_{uvv} u_x^2 + 2f_{vvv} u_x v_x)] + \epsilon^4 \left\{ \frac{1}{720} f_{vv} v_{xx}^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{120} e^u f_{vvv} (u_x^2 + u_{xx}) v_{xx} + \frac{1}{4320} f_{uvv} [2e^u (u_x^4 - 3u_{xx}^2) + 3u_{xx} v_x^2 + 24v_{xx}^2]$$

$$+ \frac{1}{4320} f_{uvvv} [4e^u (2u_x^3 v_x + 15u_x^2 v_{xx} + 18u_{xx} v_{xx}) - 3u_x v_x^3]$$

$$+ \frac{1}{5760} f_{vvvv} [16e^{2u} (3u_{xx}^2 - u_x^4) - 4e^u (7u_x^2 v_x^2 + 8u_{xx} v_x^2 - 12v_{xx}^2) - v_x^4]$$

$$- \frac{1}{2160} e^u f_{5v} u_x v_x (14e^u u_x^2 + 15v_x^2) - \frac{1}{4320} f_{u4v} (17e^{2u} u_x^4 + 27e^u u_x^2 v_x^2 + 4v_x^4)$$

$$\left. - \frac{1}{864} e^u f_{6v} (e^{2u} u_x^4 + 6e^u u_x^2 v_x^2 + v_x^4) - \frac{1}{216} e^u f_{u5v} u_x v_x (e^u u_x^2 + v_x^2) \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^6)$$

Преобразование квазитривиальности порождается гамильтонианом

$$\begin{aligned}
K = & \int dx \left\{ -\frac{\epsilon}{24} \left[u v_x + (v_x - e^{\frac{u}{2}} u_x) \log(v_x - e^{\frac{u}{2}} u_x) + (v_x + e^{\frac{u}{2}} u_x) \log(v_x + e^{\frac{u}{2}} u_x) \right] \right. \\
& + \frac{\epsilon^3}{2880 \Delta^3} \left[2 e^{3u} u_x^8 v_x - 13 e^{3u} u_x^4 u_{xx}^2 v_x - 6 e^{3u} u_x^2 u_{xx}^3 v_x - 2 e^{2u} u_{xx}^3 v_x^3 + 6 e^{3u} u_x^5 u_{xx} v_{xx} \right. \\
& + 6 e^{3u} u_x^3 u_{xx}^2 v_{xx} + 24 e^{2u} u_x^3 u_{xx} v_x^2 v_{xx} + 18 e^{2u} u_x u_{xx}^2 v_x^2 v_{xx} - 6 e^u u_x u_{xx} v_x^4 v_{xx} - 8 e^{2u} u_x^4 v_x v_{xx}^2 \\
& - 18 e^{2u} u_x^2 u_{xx} v_x v_{xx}^2 - 8 e^u u_x^2 v_x^3 v_{xx}^2 - 6 e^u u_{xx} v_x^3 v_{xx}^2 + 4 v_x^5 v_{xx}^2 + 2 e^{2u} u_x^3 v_{xx}^3 + 6 e^u u_x v_x^2 v_{xx}^3 \left. \right] \\
& + \frac{\epsilon^3}{2880 \Delta^2} v_x \left(2 e^{2u} u_x^6 + 14 e^{2u} u_x^4 u_{xx} - 9 e^u u_x^2 u_{xx} v_x^2 + u_{xx} v_x^4 \right) \\
& \left. - \frac{\epsilon^3}{1152 \Delta} e^u u_x^4 v_x - \frac{\epsilon^3}{3840} e^{\frac{u}{2}} u_x \left(u_x^2 + 4 u_{xx} \right) \log \frac{v_x + e^{\frac{u}{2}} u_x}{v_x - e^{\frac{u}{2}} u_x} \right\}
\end{aligned}$$

где

$$\Delta = v_x^2 - e^u u_x^2$$

(ср. (1.98)).

Основная схема, объясненная выше на примере уравнения Буссинеска, работает и для уравнений Тоды⁵.

Для фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера D -оператор записывается в виде

$$\begin{aligned}
f \mapsto h_f = D_{\text{NLS}} f = & f - \frac{\epsilon^2}{12} \left[\left(f_{uuu} + \frac{3}{2u} f_{uu} \right) u_x^2 + 2 f_{uuv} u_x v_x - u f_{uuu} v_x^2 \right] \\
& + \epsilon^4 \left\{ \frac{1}{120} \left[\left(f_{uuuu} + \frac{5}{2u} f_{uuu} \right) u_{xx}^2 + 2 f_{uuuv} u_{xx} v_{xx} - u f_{uuuu} v_{xx}^2 \right] \right. \\
& - \frac{1}{80} f_{uuuu} u_{xx} v_x^2 - \frac{1}{48u} f_{uuuv} v_{xx} u_x^2 - \frac{1}{3456u^3} (30 f_{uuu} - 9u f_{uuuu} + 12u^2 f_{5u} + 4u^3 f_{6u}) u_x^4 \\
& - \frac{1}{432u^2} (-3 f_{uuuv} + 6u f_{uuuvv} + 2u^2 f_{5uv}) u_x^3 v_x + \frac{1}{288u} (9 f_{uuuu} + 9u f_{5u} + 2u^2 f_{6u}) u_x^2 v_x^2 \\
& \left. + \frac{1}{2160} (9 f_{uuuvv} + 10u f_{5uv}) u_x v_x^3 - \frac{u}{4320} (18 f_{5u} + 5u f_{6u}) v_x^4 \right\} + O(\epsilon^6)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Для дефокусирующего случая достаточно заменить $u \mapsto -u$. В частности, беря

$$f = \frac{1}{2}(u v^2 - u^2)$$

⁵В работах [45, 46] методы, развитые в [19, 20] были применены к описанию критического поведения некоторых частных решений уравнений Тоды и некоторых родственных систем.

получаем гамильтониан самого уравнения НУШ

$$h_f = \frac{1}{2}(u v^2 - u^2) + \frac{\epsilon^2}{8u} u_x^2.$$

В этом случае бесконечный ряд обрывается. Выбор $g = -\frac{1}{2}v^2 + u(\log u - 1)$ приводит к гамильтониану цепочки Тода

$$\begin{aligned} h_g = & -\frac{1}{2}v^2 + u(\log u - 1) - \frac{\epsilon^2}{24u^2} (u_x^2 + 2u v_x^2) \\ & -\epsilon^4 \left(\frac{u_{xx}^2}{240u^3} + \frac{v_{xx}^2}{60u^2} + \frac{u_{xx}v_x^2}{40u^3} - \frac{u_x^4}{144u^5} - \frac{u_x^2 v_x^2}{24u^4} + \frac{v_x^4}{360u^3} \right) + O(\epsilon^6) \end{aligned} \quad (3.57)$$

записанной в переменных $\phi = \log u$ в виде

$$\epsilon^2 \phi_{xx} + e^{\phi(s+\epsilon)} - 2e^{\phi(s)} + e^{\phi(s-\epsilon)} = 0.$$

Еще одним важным примером является система Абловица – Ладика (АЛ) [1], записанная в комплексной форме

$$\begin{aligned} i \dot{a}_n = & -\frac{1}{2} (1 - a_n b_n)(a_{n-1} + a_{n+1}) + a_n \\ i \dot{b}_n = & \frac{1}{2} (1 - a_n b_n)(b_{n-1} + b_{n+1}) - b_n. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Редукции

$$b_n = \mp \bar{a}_n \quad (3.59)$$

приводят фокусирующей/дефокусирующей версии уравнения АЛ соответственно:

$$i \dot{a}_n + \frac{1}{2}(a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1}) \pm |a_n|^2 \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = 0. \quad (3.60)$$

Последнее уравнение рассматривается, как дискретная версия нелинейного уравнения Шредингера.

Система (3.58) является гамильтоновой по отношению к скобке Пуассона

$$\{a_n, b_m\} = i(1 - a_n b_n) \delta_{n,m}, \quad \{a_n, a_m\} = \{b_n, b_m\} = 0 \quad (3.61)$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_n \frac{1}{2}(a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1}) + \log(1 - a_n b_n). \quad (3.62)$$

Гамильтониан

$$C = \sum_n \log(1 - a_n b_n) \quad (3.63)$$

порождает фазовые преобразования

$$\begin{aligned}\{a_n, C\} &= -i a_n \\ \{b_n, C\} &= i b_n.\end{aligned}$$

Введем новые переменные, факторизуя по действию фазовых преобразований:

$$w_n = -\log(1 - a_n b_n) \tag{3.64}$$

$$v_n = \frac{1}{2i} \left(\log \frac{a_n}{a_{n-1}} - \log \frac{b_n}{b_{n-1}} \right).$$

Переменные v_n , w_n принимают вещественные значения для фокусирующей/дефокусирующей редукции уравнений АЛ. Переменная w_n принимает отрицательные значения для фокусирующего случая и положительные для дефокусирующего. В новых переменных динамика описывается гамильтонианом

$$H = \sum_n \sqrt{(1 - e^{-w_n})(1 - e^{-w_{n-1}})} \cos v_n \tag{3.65}$$

со скобками Пуассона

$$\{w_n, v_m\} = \delta_{n,m-1} - \delta_{n,m}, \quad \{w_n, w_m\} = \{v_n, v_m\} = 0. \tag{3.66}$$

После интерполяции и замены времени

$$w_n = w(\epsilon n, \epsilon t), \quad v_n = v(\epsilon n, \epsilon t)$$

в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ получаем квазилинейную систему первого порядка

$$\begin{aligned}w_t &= \partial_x [(e^{-w} - 1) \sin v] \\ v_t &= \partial_x [e^{-w} \cos v],\end{aligned} \tag{3.67}$$

называемую *длинноволновым пределом* системы Абловица – Ладика.

Характеристические скорости для (3.67) имеют вид

$$\lambda_{\pm} = -e^{-w} [\sin v \pm \sqrt{e^w - 1} \cos v]$$

Таким образом, длинноволновый предел (3.67) системы АЛ относится к эллиптическому случаю для фокусирующего случая и к гиперболическому для дефокусирующего. В последнем случае римановы инварианты системы (3.67) даются выражениями

$$r_{\pm} = v \pm 2 \arctan \sqrt{e^w - 1}. \tag{3.68}$$

Сделаем замену переменной $w(x)$ на новую переменную $u(x)$, полагая

$$u = \frac{\epsilon \partial_x}{e^{\epsilon \partial_x} - 1} w \quad (3.69)$$

(ср. (1.16)). Скобка Пуассона переменных u, v принимает стандартный вид (1.22). Гамильтониан дается формулой

$$H_{\text{AL}} = \int h_{\text{AL}} dx = \int \sqrt{\left(1 - \exp\left\{\frac{1 - e^{\epsilon \partial_x}}{\epsilon \partial_x} u\right\}\right) \left(1 - \exp\left\{\frac{e^{-\epsilon \partial_x} - 1}{\epsilon \partial_x} u\right\}\right)} \cos v dx \quad (3.70)$$

$$h_{\text{AL}} = (1 - e^{-u}) \cos v + \frac{\epsilon^2}{24} e^{-u} u_x \frac{(e^u - 4) \cos v u_x + 4(e^u - 1) \sin v v_x}{e^u - 1} + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

В длинноволновом пределе (3.67) достаточно просто заменить букву w на u .

Установим связь уравнений АЛ с гамильтоновыми возмущениями нелинейного волнового уравнения с потенциалом

$$P(u) = Li_2(e^{-u}). \quad (3.71)$$

Здесь дилогарифм $Li_2(x)$ определяется, как аналитическое продолжение функции

$$Li_2(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k^2} \quad \text{for } |x| < 1.$$

Соответствующее нелинейное волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt} = \frac{u_{xx}}{e^u - 1}. \quad (3.72)$$

Линейное уравнение в частных производных (1.31) для первых интегралов уравнения (3.72) превращается в

$$f_{vv} = (e^u - 1) f_{uu}. \quad (3.73)$$

Лемма 3.11 *Функция $f(u, v)$ является законом сохранения для длинноволнового предела (3.67) уравнения АЛ, если и только если она удовлетворяет уравнению (3.73).*

Доказательство Доказательство получается прямым вычислением. □

Построим теперь D -оператор для АЛ иерархии.

Теорема 3.12 Для любого C^∞ решения $f = f(u, v)$ уравнения (3.73) существует единственный гамильтониан

$$H_f = H_f^{[0]} + \sum_{k \geq 1} \epsilon^k H_f^{[k]} = \int D_{\text{AL}} f dx \quad (3.74)$$

$$H_f^{[k]} = \int h_f^{[k]} dx, \quad h_f^{[0]} = f$$

коммутирующий с гамильтонианом (3.70) уравнений Абловица – Ладика:

$$\int \left[\frac{\delta H}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta H_{\text{AL}}}{\delta v(x)} + \frac{\delta H}{\delta v(x)} \partial_x \frac{\delta H_{\text{AL}}}{\delta u(x)} \right] dx = 0.$$

В явном виде

$$D_{\text{AL}} f = f + \epsilon^2 \left[-\frac{1}{24} \frac{2(1 - e^u) f_{uvv} + (e^u - 2) f_{vv}}{(e^u - 1)^2} u_x^2 + \frac{1}{6} \frac{f_{vvv}}{e^u - 1} u_x v_x + \frac{1}{12} \frac{(e^u - 1) f_{uvv} - f_{vv}}{e^u - 1} v_x^2 \right] + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Базис линейно независимых решений линейного уравнения (3.73) может быть получен в виде

$$f_n^+ = \cos nv e^{-nu} F(-n, -n; 1 - 2n; e^u) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0. \quad (3.75)$$

$$f_n^- = \sin nv e^{-nu} F(-n, -n; 1 - 2n; e^u)$$

Здесь $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. При положительных n гипергеометрический фактор является полиномом степени n по e^u ; эти законы сохранения отвечают первым интегралам иерархии АЛ, построенным в [1]. Вторая часть решений уравнения (3.73), отвечающая отрицательным $n < 0$, corresponds отвечает новым интегралам иерархии АЛ, найденным в работе [27].

Например, выбирая

$$f = f_1^+ = (1 - e^{-u}) \cos v$$

мы получаем

$$h_f = h_{\text{AL}}.$$

Выбор

$$f = f_1^- = (1 - e^{-u}) \sin v$$

дает ϵ -разложение

$$h_f = (1 - e^{-u}) \sin v + \frac{\epsilon^2}{24} e^{-u} u_x \frac{(e^u - 4) \sin v u_x - 4(e^u - 1) \cos v v_x}{e^u - 1} + \mathcal{O}(\epsilon^4)$$

гамильтониана

$$H = \frac{1}{2i} \sum a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}$$

дискретного модифицированного уравнения КдФ

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= \frac{1}{2} (1 - a_n b_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) \\ \dot{b}_n &= \frac{1}{2} (1 - a_n b_n)(b_{n+1} - b_{n-1}). \end{aligned}$$

Отметим, что гамильтониан (3.72) возмущенного волнового уравнения имеет вид

$$H_{\text{pert}} = \int \left[\frac{1}{2} v^2 + Li_2(e^{-u}) + \frac{\epsilon^2}{24} \frac{u_x^2 - (e^u - 1)(u_x^2 + 2v_x^2)}{(e^u - 1)^2} \right] dx + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (3.76)$$

Это возмущение не эквивалентно тому, что дается формулой (1.76) исходя из обобщенной системы Ферми – Паста – Улама с потенциалом (3.71).

Замечание 3.13 *Рекуррентная процедура построения законов сохранения для длинноволнового предела уравнений иерархии Абловица – Ладика может быть сформулирована в терминах двумерного фробениусова многообразия с потенциалом*

$$F(u, v) = \frac{1}{2} u v^2 - Li_3(e^{-u}) \quad (3.77)$$

(см. Замечание 1.13 выше).

Методы, развитые выше для двухкомпонентных систем, допускают обобщение на случай систем квазилинейных уравнений в частных производных с числом независимых переменных $3 \leq n \leq \infty$. В качестве примера рассмотрим интегрируемую иерархию типа A_3 . Лаксов оператор имеет вид

$$L = (\epsilon \partial_x)^4 - w_3 (\epsilon \partial_x)^2 - (w_2 + \epsilon w_{3x}) (\epsilon \partial_x) - (w_1 - \frac{1}{8} w_3^2 + \frac{1}{2} \epsilon w_2 + \frac{5}{12} \epsilon^2 w_{3xx}). \quad (3.78)$$

Несложно вычислить первые несколько потоков этой интегрируемой иерархии:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_\alpha}{\partial t^{1,0}} &= (w_\alpha)_x, \quad \alpha = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial w_1}{\partial t^{2,0}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4} w_2 w_3 - \frac{1}{6} \epsilon^2 w_{2xx} \right] \\
\frac{\partial w_2}{\partial t^{2,0}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[w_1 + \frac{1}{8} w_3^2 - \frac{1}{12} \epsilon^2 w_{3xx} \right] \\
\frac{\partial w_3}{\partial t^{2,0}} &= w_{2x} \\
\frac{\partial w_1}{\partial t^{3,0}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{8} w_2^2 + \frac{1}{48} w_3^3 - \epsilon^2 \left(\frac{1}{12} w_{1xx} + \frac{1}{32} (w_{3x})^2 + \frac{1}{16} w_3 w_{3xx} \right) + \frac{1}{72} \epsilon^4 w_{3xxxx} \right] \\
\frac{\partial w_2}{\partial t^{3,0}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{4} w_2 w_3 - \frac{1}{6} \epsilon^2 w_{2xx} \right] \\
\frac{\partial w_3}{\partial t^{3,0}} &= w_{1x} \\
\frac{\partial w_1}{\partial t^{1,1}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} w_1^2 + \frac{1}{4} w_2^2 w_3 + \frac{1}{64} w_3^4 - \epsilon^2 \left(-\frac{1}{6} (w_{2x})^2 + \frac{5}{12} w_2 w_{2xx} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} w_3 w_{1xx} + \frac{1}{12} w_{1xx} w_{3x} + \frac{1}{8} w_3 (w_{3x})^2 + \frac{1}{8} w_3^2 w_{3xx} \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^4 \left(\frac{7}{60} w_{1xxxx} + \frac{19}{144} (w_{3xx})^2 + \frac{25}{144} w_{3x} w_{3xxx} + \frac{11}{144} w_3 w_{3xxxx} \right) - \frac{1}{72} \epsilon^6 w_{3xxxxx} \right] \\
\frac{\partial w_2}{\partial t^{1,1}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[w_1 w_2 + \frac{1}{4} w_2 w_3^2 - \epsilon^2 \left(\frac{1}{2} w_3 w_{2xx} + \frac{1}{2} w_{2x} w_{3x} + \frac{1}{3} w_2 w_{3xx} \right) + \frac{1}{5} \epsilon^4 w_{2xxxx} \right] \\
\frac{\partial w_3}{\partial t^{1,1}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} w_2^2 + w_1 w_3 - \epsilon^2 \left(w_{1xx} + \frac{1}{8} (w_{3x})^2 + \frac{1}{12} w_3 w_{3xx} \right) + \frac{1}{30} \epsilon^4 w_{3xxxx} \right]
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Следующие три выражения дают плотности законов сохранения для иерархии A_3 .

$$\begin{aligned}
h_{1,0} &= \frac{1}{2} w_2^2 + w_1 w_3 - \epsilon^2 \left[w_{1xx} + \frac{1}{8} (w_{3x})^2 + \frac{1}{12} w_3 w_{3xx} \right] + \frac{1}{30} \epsilon^4 w_{3xxxx} \\
h_{2,0} &= w_1 w_2 + \frac{1}{8} w_2 w_3^2 - \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} w_{2x} w_{3x} + \frac{1}{3} w_3 w_{2xx} + \frac{1}{4} w_2 w_{3xx} \right] + \frac{1}{6} \epsilon^4 w_{2xxxx} \\
h_{3,0} &= \frac{1}{2} w_1^2 + \frac{1}{8} w_2^2 w_3 + \frac{1}{192} w_3^4 \\
&\quad - \epsilon^2 \left[\frac{1}{6} (w_{2x})^2 + \frac{1}{4} w_2 w_{2xx} + \frac{1}{12} w_3 w_{1xx} + \frac{1}{12} w_{1x} w_{3x} + \frac{3}{32} w_3 (w_{3x})^2 + \frac{1}{16} w_3^2 w_{3xx} \right] \\
&\quad + \epsilon^4 \left[\frac{1}{12} w_{1xxxx} + \frac{13}{144} (w_{3xx})^2 + \frac{19}{144} w_{3x} w_{3xxx} + \frac{7}{144} w_3 w_{3xxxx} \right] - \frac{5}{504} \epsilon^6 w_{3xxxxx}
\end{aligned}$$

Римановы инварианты u_1, u_2, u_3 бездисперсного предела – это корни кубического

уравнения

$$u^3 + (3w_1 + \frac{1}{8}w_3^2)u^2 + (3w_1^2 - \frac{9}{16}w_2^2w_3 + \frac{1}{4}w_1w_3^2 - \frac{1}{64}w_3^4)u + w_1^3 + \frac{27}{256}w_2^4 - \frac{9}{16}w_1w_2^2w_3 + \frac{1}{8}w_1^2w_3^2 + \frac{7}{128}w_2^2w_3^3 - \frac{1}{64}w_1w_3^4 - \frac{1}{512}w_3^6 = 0$$

Введем вспомогательный параметр s такой, что

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{s(s^2 - 81)}{(s^2 + 27)^{3/2}} = \frac{w_2}{w_3^{3/2}}.$$

Тогда римановы инварианты допускают следующее представление

$$u_1 = -w_1 + \frac{2187 + 594s^2 - 13s^4}{24(s^2 + 27)^2}w_3^2$$

$$u_2 = -w_1 + \frac{-2187 - 3888s - 378s^2 + 5s^4}{24(s^2 + 27)}w_3^2$$

$$u_3 = -w_1 + \frac{-2187 + 3888s - 378s^2 + 5s^4}{24(s^2 + 27)}w_3^2$$

В окрестности точки градиентной катастрофы типа I (т.е., все три римановых инварианта принимают вещественное значение) в решении общего положения развивается осцилляционная зона. В окрестности точки фазового перехода асимптотика решения описывается специальной функцией $U(X, T)$, задаваемой уравнением (3.37). См. Рис. 3, на котором изображены графики трех римановых инвариантов для общего решения уравнений иерархии A_3 в окрестности точки фазового перехода типа I.

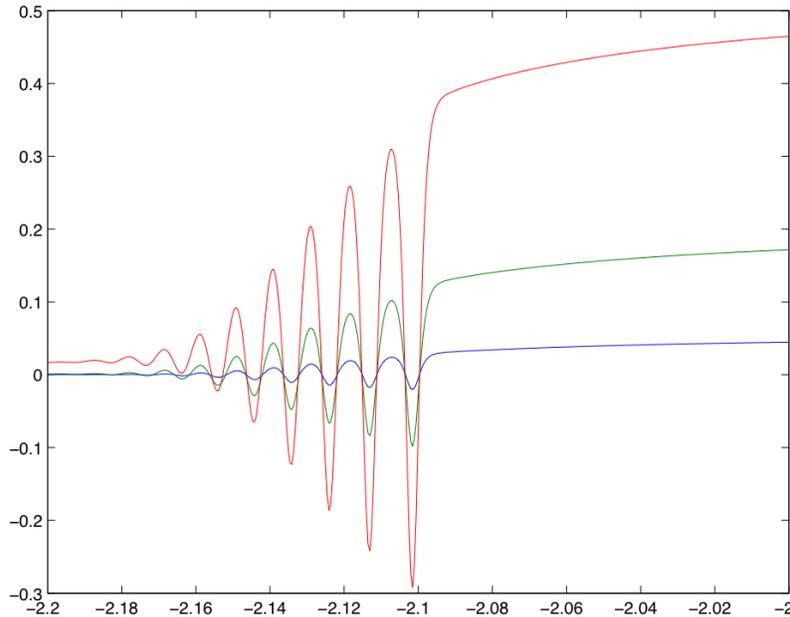


Рис.3: Римановы инварианты для решения уравнений (3.78) в окрестности точки фазового перехода типа I.

Список литературы

- [1] M.J.Ablowitz, J.F.Ladik, Nonlinear differential-difference equations and Fourier analysis, *J. Math. Phys.* **17** (1976) 1011-1018.
- [2] V.I.Arnold, V.V.Goryunov, O.V.Lyashko, V.A.Vasil'ev, *Singularity Theory. I. Dynamical systems. VI*, Encyclopaedia Math. Sci. **6**, Springer, Berlin, 1993.
- [3] V.A.Baikov, R.K. Gazizov, N.Kh. Ibragimov, Approximate symmetries and formal linearization, *PMTF* **2** (1989) 40-49. (In Russian)
- [4] P.Boutroux, Recherches sur les transcendents de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations différentielles du second ordre. *Ann. École Norm* **30** (1913) 265 - 375.
- [5] A.Bressan, One dimensional hyperbolic systems of conservation laws. Current developments in mathematics, 2002, 1–37, Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [6] É.Brézin, E.Marinari, G.Parisi, A nonperturbative ambiguity free solution of a string model. *Phys. Lett. B* **242** (1990) 35–38.
- [7] G.Carlet, The Hamiltonian structures of the two-dimensional Toda lattice and R -matrices, *Lett. Math. Phys.* **71** (2005) 209–226.
- [8] G.Carlet, B.Dubrovin, Y.Zhang, The Extended Toda Hierarchy, *Moscow Math. J.* **4** (2004) 313-332.
- [9] G.Carlet, L.P.Mertens, Principal hierarchies of infinite dimensional Frobenius manifolds: the extended 2D Toda lattice, arXiv:1109.5343.
- [10] T.Claeys, T.Grava, Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann-Hilbert approach, arXiv:0801.2326.
- [11] T.Claeys, M.Vanlessen, The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation. *Nonlinearity* **20** (2007), no. 5, 1163–1184.
- [12] T. Claeys, M. Vanlessen, Universality of a double scaling limit near singular edge points in random matrix models, *Comm. Math. Phys.* **273** (2007), no. 2, 499–532.

- [13] P.Dedecker and W.M.Tulczyjev, *Spectral Sequences and the Inverse Problem of the Calculus of Variations*, Lecture Notes in Math. **836** (1980) 498-503.
- [14] L. Degiovanni, F. Magri, V. Sciacca, On deformation of Poisson manifolds of hydrodynamic type, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), no. 1, 1–24.
- [15] P.Deift, X.Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, *Ann. of Math. (2)* **137** (1993), 295–368.
- [16] B. Dubrovin, Integrable systems in topological field theory, *Nucl. Phys.* **B379** (1992), 627–689.
- [17] B. Dubrovin, Geometry of 2D topological field theories, in *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, 1993), 120 - 348. Lecture Notes in Mathematics, **1620**. Springer, Berlin, 1996.
- [18] B. Dubrovin, Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds, Proceedings of ICM98, Vol. 2, 315-326.
- [19] B.Dubrovin, On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: universality of critical behaviour, *Comm. Math. Phys.* **267** (2006) 117 - 139.
- [20] B.Dubrovin, T.Grava, C.Klein, On universality of critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the *tritronquée* solution to the Painlevé-I equation, arXiv:0704.0501, to appear in *J. Nonlinear Sci.*
- [21] B. Dubrovin, S.-Q. Liu, Y. Zhang, On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, I: Quasi-triviality of bi-Hamiltonian perturbations. *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006), no. 4, 559 - 615.
- [22] B. Dubrovin, S.P. Novikov, The Hamiltonian formalism of one-dimensional systems of hydrodynamic type and the Bogolyubov – Whitham averaging method, *Soviet Math. Dokl.* **270:4** (1983), 665-669.
- [23] B. Dubrovin, S.P. Novikov, On Poisson brackets of hydrodynamic type, *Soviet Math. Dokl.* **279:2** (1984), 294-297.
- [24] B. Dubrovin, S.P. Novikov, Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory. *Uspekhi Mat. Nauk* **44** (1989) 29-98. English translation in *Russ. Math. Surveys* **44** (1989) 35-124.
- [25] B.Dubrovin, Y.Zhang, Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov - Witten invariants, ArXiv:math.DG/0108160, 2001.
- [26] H.Flaschka, M.G.Forest, D.W.McLaughlin, Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg – de Vries equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980) 739-784.

- [27] F.Gesztesy, H.Holden, J.Michor, G.Teschl, Local conservation laws and the Hamiltonian formalism for the Ablowitz-Ladik hierarchy, ArXiv:0711.1644
- [28] E. Getzler, A Darboux theorem for Hamiltonian operators in the formal calculus of variations, *Duke Math. J.* **111** (2002), 535–560.
- [29] T.Grava, C.Klein, Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg de Vries and Whitham equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **60** (2007), no. 11, 1623–1664.
- [30] T.Grava, C.Klein, Numerical study of a multiscale expansion of KdV and Camassa-Holm equation. ArXiv:math-ph/0702038.
- [31] P.Grinevich, S.P. Novikov, String equation. II. Physical solution. (Russian) *Algebra i Analiz* **6** (1994), no. 3, 118–140; translation in *St. Petersburg Math. J.* **6** (1995) 553–574.
- [32] A.Gurevich, L.Pitaevski, Nonstationary structure of a collisionless shock wave, *Sov. Phys. JETP Lett.* **38** (1974) 291–297.
- [33] A.Henrici, T.Kappeler, Normal forms for odd periodic FPU chains, arXiv:nlin/0611063.
- [34] A.Henrici, T.Kappeler, Resonant normal form for even periodic FPU chains, arXiv:0709.2624.
- [35] T.Y.Hou, P.D.Lax, Dispersive approximations in fluid dynamics. *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991) 1–40.
- [36] A.A.Kapaev, Weakly nonlinear solutions of the equation P_1^2 , *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **187** (1991), *Differentsialnaya Geom. Gruppy Li i Mekh.* **12**, 88–109, 172–173, 175; translation in *J. Math. Sci.* **73** (1995), no. 4, 468–481.
- [37] A.Kapaev, Quasi-linear Stokes phenomenon for the Painlevé first equation. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 11149–11167.
- [38] Y. Kodama, A. Mikhailov, Obstacles to asymptotic integrability, Algebraic aspects of integrable systems, 173–204, *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **26**, Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
- [39] V.Kudashev, B.Suleimanov, A soft mechanism for the generation of dissipationless shock waves, *Phys. Lett. A* **221** (1996) 204–208.
- [40] P.Lax, Periodic solutions of the KdV equations. *Nonlinear Wave Motion*, pp. 85–96. *Lectures in Appl. Math.*, **15**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
- [41] P.Lax, D.Levermore, The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I, II, III. *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983) 253–290, 571–593, 809–829.

- [42] P. D.Lax, C. D.Levermore, S.Venakides, The generation and propagation of oscillations in dispersive initial value problems and their limiting behavior. In: *Important Developments in Soliton Theory*, 205–241, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer, Berlin, 1993.
- [43] S.-Q. Liu, C.-Z.Wu, Y. Zhang, On properties of Hamiltonian structures for a class of evolutionary PDEs, ArXiv:0711.2599.
- [44] S.-Q. Liu, Y. Zhang, On Quasitriviality and Integrability of a Class of Scalar Evolutionary PDEs, *J. Geom. Phys.* **57** (2006) 101-119.
- [45] L.Martínez Alonso, E.Medina, Regularization of Hele-Shaw flows, multiscaling expansions and the Painlevé I equation, arXiv:0710.3731.
- [46] L.Martínez Alonso, E.Medina, The double scaling limit method in the Toda hierarchy, arXiv:0804.3498.
- [47] S.P.Novikov, A periodic problem for the Korteweg-de Vries equation. I. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **8** (1974), no. 3, 54–66.
- [48] A. Raimondo, Frobenius manifold for the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation, arXiv:1008.2128
- [49] D.Serre, *Systèmes de lois de conservation I : hyperbolicité, entropies, ondes de choc; Systèmes de lois de conservation II: structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes*, Paris Diderot Editeur 1996.
- [50] I.A.B.Strachan, Deformations of the Monge/Riemann hierarchy and approximately integrable systems, *J. Math. Phys.* **44** (2003) 251–262.
- [51] R.Thom, *Structural Stability and Morphogenesis: An Outline of a General Theory of Models*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- [52] S. Tsarev, The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method, *Math. USSR Izv.* **37** (1991), 397–419.
- [53] K.Ueno, K.Takasaki, Toda lattice hierarchy. In: *Group Representations and Systems of Differential Equations* (Tokyo, 1982), 1–95, *Adv. Stud. Pure Math.*, **4**, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [54] H.Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane. *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), 374–410.
- [55] C.-Z.Wu, D.Xu, A Class of Infinite-dimensional Frobenius Manifolds and Their Submanifolds, arXiv:1103.4048
- [56] N.Zabusky, M.Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 2403.

Раздел 2.

Волновые фронты гиперболических систем линейных уравнений

Аннотация

Для гиперболической волновой системы из двух линейных уравнений с частными производными первого порядка и переменными коэффициентами в трёхмерном пространстве исследовано возникновение фронта фундаментального решения, начальное условие которого сосредоточено в точке, удовлетворяющей условию контактной гиперболичности.

Сначала мы исследуем фронт модельной вырожденной системы, а затем с помощью его возмущения получаем фронт системы общего вида. На рисунках 1 и 2 изображены сами полученные нами фронты, двойственные к ним поверхности в двойственном пространстве и поверхности волновых скоростей.

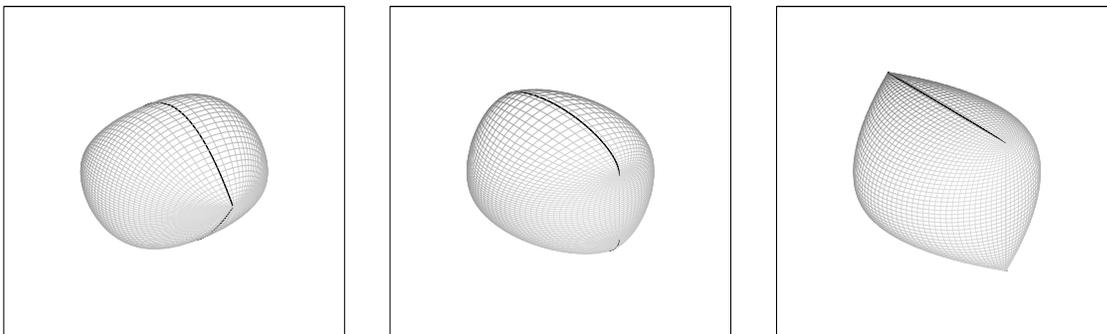


Рис. 1: Фронт модельной системы, его двойственный фронт и поверхность волновых скоростей. Выделенные линии состоят из особых точек.

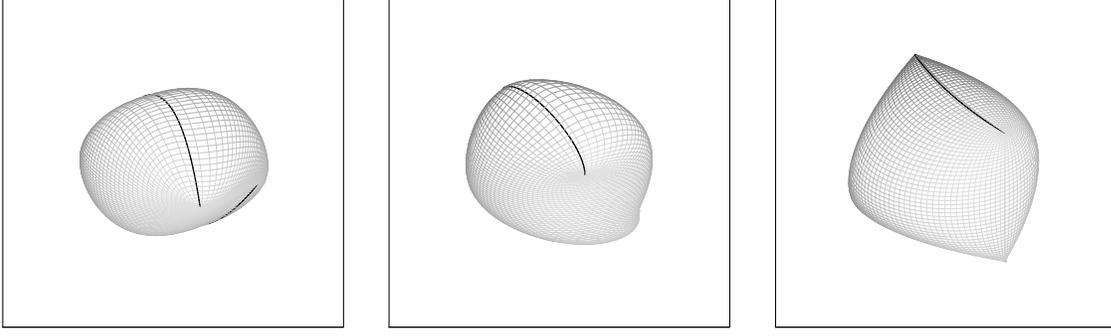


Рис. 2: Фронт возмущённой системы, его двойственный фронт и поверхность волновых скоростей. Выделенные линии состоят из особых точек.

1 Постановка задачи

В настоящей работе исследуется малый фронт волны точечного источника, распространение которой в трёхмерном пространстве описывается следующей гиперболической системой из двух линейных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{A}(t, x, y, z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B}(t, x, y, z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{C}(t, x, y, z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{D}(t, x, y, z) \mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} : \mathbb{R}^{1+3} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — неизвестная вектор-функция, а \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — 2×2 -матрицы с элементами, гладко зависящими от t , x , y , z общим образом, причём матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} — симметрические.

Система из двух линейных уравнений — это первый интересный и до сих пор не исследованный случай поставленной задачи. (Для одного линейного уравнения ответ тривиален.) Выбор трёх пространственных переменных связан с возможными физическими приложениями решаемой задачи.

Начальное условие сосредоточено в начале координат: $\mathbf{u}(0, x, y, z) = \mathbf{u}_0 \delta(x) \delta(y) \delta(z)$, где $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$, — это и есть точечный источник. Фронт испускаемой им волны замечает гиперповерхность $t = \tau(x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению эйконала:

$$\det \left(\mathbf{A}(\tau, x, y, z) \frac{\partial \tau}{\partial x} + \mathbf{B}(\tau, x, y, z) \frac{\partial \tau}{\partial y} + \mathbf{C}(\tau, x, y, z) \frac{\partial \tau}{\partial z} - \mathbf{E} \right) = 0$$

(где \mathbf{E} — единичная матрица) и начальному условию $\tau(0, 0, 0) = 0$.

Геометрически уравнение эйконала представляет собой так называемую световую гиперповерхность

$$\mathcal{H} = \left\{ (t, x, y, z, p, q, r) \in J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid (a_{11}p + b_{11}q + c_{11}r - 1)(a_{22}p + b_{22}q + c_{22}r - 1) - (a_{12}p + b_{12}q + c_{12}r)^2 = 0 \right\}$$

в пространстве $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 1-струй функций $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; здесь элементы a_{ij} , b_{ij} и c_{ij} матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} — функции от t , x , y и z . Гиперповерхность $t = \tau(x, y, z)$ состоит из всех

бихарактеристик гиперповерхности \mathcal{H} , начинающихся в начале координат $t = x = y = z = 0$.

Задача проекта состоит в исследовании фронта волны при малых временах, т.е. поверхности $\tau(x, y, z) = \varepsilon$ при малых положительных ε : $0 < \varepsilon \ll 1$ при следующем дополнительном условии контактной гиперболичности световой гиперповерхности в начале координат, где находится точечный источник. А именно, предполагается, что при $t = x = y = z = 0$ она имеет ровно одну особую точку, в окрестности которой световая поверхность контактными преобразованиями пространства струй приводится к гиперболической нормальной форме В. И. Арнольда: $p^2 + q^2 - y^2 = 0$.

Если же световая гиперповерхность приводится к эллиптической нормальной форме В. И. Арнольда: $p^2 - q^2 - y^2 = 0$, то световая гиперповерхность удовлетворяет условию контактной эллиптичности. Этот случай планируется исследовать на следующем этапе работ по данному проекту. На данный момент имеется гипотеза, что в эллиптическом случае исследуемый волновой фронт — это субриманова сфера А. А. Аграчёва, описанная в [2].

Поставленная задача решена в три этапа:

1. Найти особенности фронта для модельной квазиоднородной контактно гиперболической системы, имеющей дополнительную однопараметрическую группу симметрий и поэтому характеристики световой гиперповерхности которой находятся явно.
2. Найти общий вид главных членов инфинитезимальных контактных диффеоморфизмов пространства $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, переводящих световую гиперповерхность модельной квазиоднородной системы в световую гиперповерхность произвольной контактно гиперболической системы. (Согласно известным теоремам [1], [3] это всегда можно сделать.)
3. Найти особенности общих фронтов, получающихся из модельного действием найденных контактных диффеоморфизмов.

2 Полученные результаты

Этап 1. Модельная система и её фронт

Рассматривалась квазиоднородная ($\deg t = \deg x = \deg y = 1, \deg z = 2$) система со следующими матрицами коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} y+t & 0 \\ 0 & y-t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0.$$

Световая гиперповерхность этой системы имеет уравнение

$$p^2 + (q - rt)^2 - (ry - 1)^2 = 0.$$

Для этой модельной световой гиперповерхности получено решение соответствующего уравнения эйконала в параметрической форме:

$$x = t \sin b \frac{c \ln c^2}{1 - c^2}, \quad y = -t \cos b, \quad z = \frac{t^2}{2} \sin^2 b \left(2 \frac{c^2 \ln c^2}{(1 - c^2)^2} + \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right),$$

что при $t = \varepsilon$ даёт уравнение волнового фронта. Здесь $c \in \mathbb{R}$, $b \in [-\pi, \pi]$ и $t \geq -$ параметры на графике $t = \tau(x, y, z)$ решения.

С помощью программной оболочки символьного вычисления Maple получены формулы и рисунки вырожденного фронта. Использувавшиеся программные коды и выданные программой результаты приведены в разделе 3.

Этап 2. Контактные возмущения

Найден общий вид главных членов инфинитезимальных контактных диффеоморфизмов пространства $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, переводящих световую гиперповерхность модельной квазиоднородной системы в световую гиперповерхность произвольной контактно гиперболической системы. (Согласно известным теоремам [1], [3] это всегда можно сделать.)

Точнее, нас интересовало векторное пространство \mathfrak{A} главных членов эффективных контактных векторных полей на пространстве естественного расслоения $\pi : J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \rightarrow J^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. По определению, эффективные контактные векторные поля переводят световую гиперповерхность модельной квазиоднородной системы в световую гиперповерхность другой системы, касаются отмеченного слоя $\pi^{-1}(0)$, а рассматриваются с точностью до полей, сохраняющих расслоение π , и с точностью до полей, касательных к световой гиперповерхности модельной квазиоднородной системы. Нами был найден базис пространства \mathfrak{A} , состоящий из двух контактных векторных полей с производящими функциями:

$$\frac{(q+1)(py - qx - x + pt)}{r}, \quad \frac{(q-1)(py - qx + x - pt)}{r}$$

Эти формулы также были получены с помощью программной оболочки символьного вычисления Maple. Использувавшиеся для этого программные коды и выданные программой результаты приведены в разделе 3.

Этап 3. Фронт возмущённой системы

Для найденных векторных полей были вычислены явно контактные фазовые потоки, действие которых на фронт модельной квазиоднородной системы даёт фронты систем общего положения, но по-прежнему удовлетворяющих условию контактной гиперболичности. Далее, с помощью программной оболочки символьного вычисления Maple были получены явные формулы для таких возмущённых фронтов и их рисунки. Использувавшиеся программные коды и выданные программой результаты приведены в разделе 3.

3 Программный код на языке *Maple*

```
> restart;  
> readlib(mtaylor):  
> with(plots):  
> N:=50;
```

$N := 50$

Подпрограмма для вычисления действия контактного векторного поля с данной производящей функцией K на данную функцию H

(новые переменные $P = -p/r, Q = -q/r, S = 1/r, X = x, Y = y, Z = z, T = t$):

```
> L:=proc(K,H) global vP,vQ,vS,vX,vY,vT,vZ;  
> vP:=-P*diff(K,Z)-diff(K,X);  
> vQ:=-Q*diff(K,Z)-diff(K,Y);  
> vS:=-S*diff(K,Z)-diff(K,T);  
> vX:=diff(K,P);  
> vY:=diff(K,Q);  
> vT:=diff(K,S);  
> vZ:=P*diff(K,P)+Q*diff(K,Q)+S*diff(K,S)-K;  
> expand(vP*diff(H,P)+vQ*diff(H,Q)+vS*diff(H,S)  
> +vX*diff(H,X)+vY*diff(H,Y)+vT*diff(H,T)+vZ*diff(H,Z));  
> end;
```

$L := \text{proc}(K, H)$

global $vP, vQ, vS, vX, vY, vT, vZ$;

$vP := -P\text{diff}(K, Z) - \text{diff}(K, X)$;

$vQ := -Q\text{diff}(K, Z) - \text{diff}(K, Y)$;

$vS := -S\text{diff}(K, Z) - \text{diff}(K, T)$;

$vX := \text{diff}(K, P)$;

$vY := \text{diff}(K, Q)$;

$vT := \text{diff}(K, S)$;

$vZ := P\text{diff}(K, P) + Q\text{diff}(K, Q) + S\text{diff}(K, S) - K$;

$\text{expand}(vP\text{diff}(H, P) + vQ\text{diff}(H, Q) + vS\text{diff}(H, S) + vX\text{diff}(H, X) + vY\text{diff}(H, Y)$
 $+ vT\text{diff}(H, T) + vZ\text{diff}(H, Z))$

end

Подпрограмма, генерирующая список мономов данной квазистепени от данных переменных с заданными весами:

```
> mons:=proc(vars,degs,d,q) local
> n,i,j,phi,psi,m,l,k;
> n:=nops(vars);
> phi:=array(0..d,[]); m:=array(0..d,[]);
> m[0]:=1; phi[0][1]:=1;
> for i from 1 to d do m[i]:=0 od:
> for i from 1 to n do
> for j from degs[i] to d do
> l:=m[j-degs[i]];
> if not l=0 then for k from 1 to l do
> phi[j][m[j]+k]:=phi[j-degs[i]][k]*vars[i] od
> fi; m[j]:=m[j]+l;
> od;
> od; psi:=array(1..m[d],[]);
> for i from 1 to m[d] do
> psi[i]:=sort(phi[d][i],vars) od; q:=m[d];
> RETURN(psi);
> end;
```

```

mons := proc(vars, degs, d, q)
  local n, i, j, phi, psi, m, l, k;
  n := nops(vars);
  phi := array(0..d, []);
  m := array(0..d, []);
  m_0 := 1;
  phi_01 := 1;
  for i to d do m_i := 0 od;
  for i to n do for j from degs_i to d do
    l := m_{j-degs_i};
    if not (l = 0) then for k to l do phi_{j+m_j+k} := phi_{j-degs_i k} vars_i od fi;
    m_j := m_j + l
  od
od;
psi := array(1..m_d, []);
for i to m_d do psi_i := sort(phi_{d_i}, vars) od;
q := m_d;
RETURN(psi)
end

```

Этап 1. Модельная система и её фронт

$H=0$ – уравнение световой гиперповерхности в новых переменных:

> $H := P^2/2 + (Q+T)^2/2 - (S-Y)^2/2;$

$$H := \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} (Q + T)^2 - \frac{1}{2} (S - Y)^2$$

Первые интегралы:

> $W[1] := Z - P*X/2 - Q*Y/2 - S*T/2;$

$$W_1 := Z - \frac{1}{2} P X - \frac{1}{2} Q Y - \frac{1}{2} S T$$

> $W[2] := Q*T + S*Y;$

$$W_2 := QT + SY$$

> L(H,H);

0

> expand(L(W[1],H)+H);

0

> L(W[2],H);

0

Лежандрово подмногообразие

> Leg:=[P=2*a*b*c,X=ln(a^2)*a*b*c,Q=(1+a^2)*(1-
> b^2)*c/2,Y=-(1-a^2)*(1-b^2)*c/2,S=-(1+a^2)*(1+b^2)*c/2,T=(a^2-1)*(b^2+
> 1)*c/2,Z=factor(a^2*b^2*c^2*ln(a^2)-1/2*a^4*c^2*b^2+1/2*b^2*c^2)];

$$\begin{aligned} Leg := [P = 2abc, X = \ln(a^2)abc, Q = \frac{1}{2}(1+a^2)(1-b^2)c, Y = -\frac{1}{2}(1-a^2)(1-b^2)c, \\ S = -\frac{1}{2}(1+a^2)(1+b^2)c, T = \frac{1}{2}(a^2-1)(1+b^2)c, Z = \frac{1}{2}b^2c^2(2a^2\ln(a^2) - a^4 + 1)] \end{aligned}$$

> factor(subs(Leg,S)-subs(Leg,S));

0

Проверка лежандровости относительно структуры $PdX + QdY + SdT - dZ = 0$

> tt:=b;

tt := b

> simplify(factor(subs(Leg,P)*diff(subs(Leg,X),
> tt)+subs(Leg,Q)*diff(subs(Leg,Y),tt)+subs(Leg,S)*diff(subs(Leg,T),tt)-
> diff(subs(Leg,Z),tt)));

0

> factor(subs(Leg,H));

0

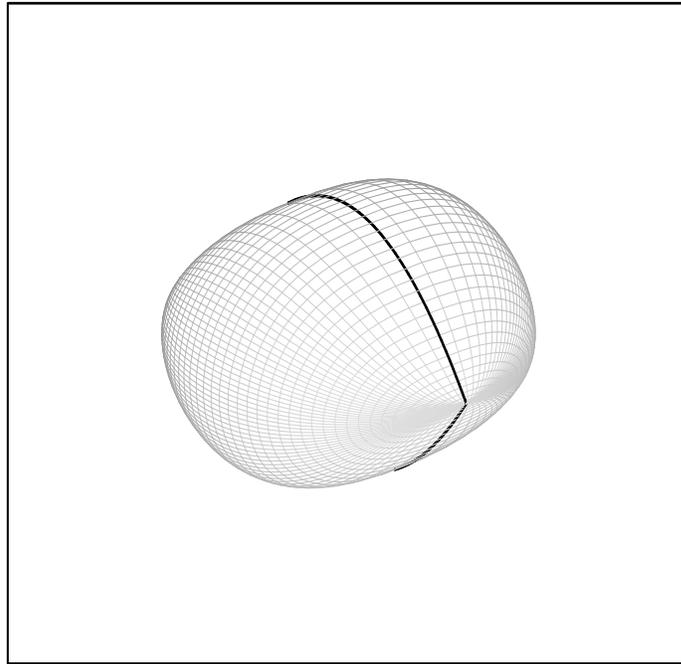
```
> factor(subs(Leg,W[1]));
```

0

```
> factor(subs(Leg,W[2]));
```

0

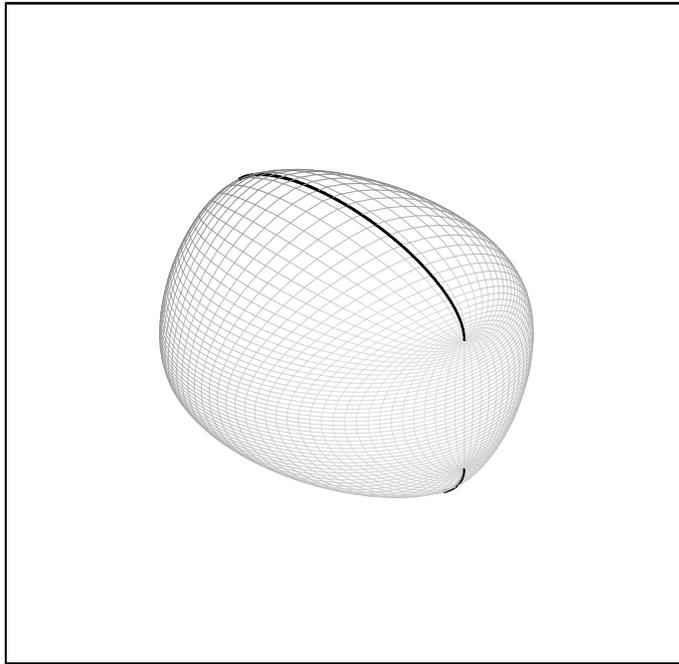
```
> Ltr:=subs({a=tan(a/2),b=tan(b/2)},subs(c=2/
> (a^2-1)/(b^2+1),Leg)):
> Fr := factor(subs(Ltr,[X,Y,Z])):
> frx:=plot3d(Fr,a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1),b=0..Pi,grid=[2*N+1,N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit,Fr,a=0),b=0..Pi,num
> points=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi/2),b=-Pi..P
> i,numpoints=80,color=brown,thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi),b=0..Pi,nu
> mpoints=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2,Fr),a=-Pi..Pi,num
> points=110,color=green,thickness=3):
> display({frx,sa0,saI},orientation=[51,55]);
```



```

> Fr := factor(subs(Ltr, [P/(P*X+Q*Y-Z),
> Q/(P*X+Q*Y-Z), -1/(P*X+Q*Y-Z)])):
> frx:=plot3d(Fr,a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1),b=0..Pi,grid=[2*N+1,N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit,Fr,a=0),b=0..Pi,num
> points=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi/2),b=-Pi..P
> i,numpoints=80,color=brown,thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi),b=0..Pi,nu
> mpoints=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2,Fr),a=-Pi..Pi,num
> points=110,color=green,thickness=3):
> display({frx,sa0,saI},orientation=[51,55]);

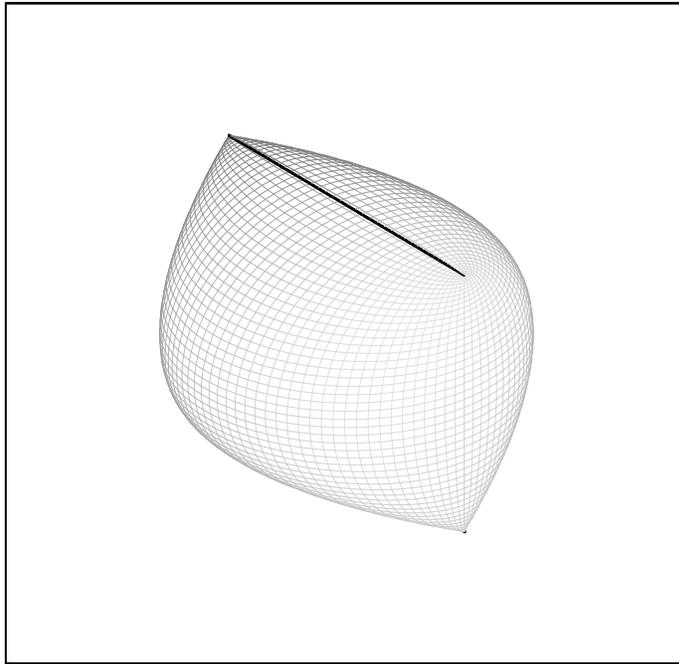
```



```

> Fr := subs(Ltr, [-P/S, Q/S, -1/S]):
> frx:=plot3d(Fr, a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1), b=0..Pi, grid=[2*N+1, N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit, Fr, a=0), b=0..Pi, num
> points=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi/2), b=-Pi..P
> i, numpoints=80, color=brown, thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi), b=0..Pi, nu
> mpoints=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2, Fr), a=-Pi..Pi, num
> points=110, color=green, thickness=3):
> display({frx, sa0, saI}, orientation=[51, 55]);

```



Этап 2. Контактные возмущения

> `d:=3;`

`d := 3`

> `vars:=[P,Q,S,X,Y,T,Z];`
 > `degs:=[1,1,1,1,1,1,2];`

`vars := [P, Q, S, X, Y, T, Z]`

`degs := [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2]`

> `mns:=mons(vars,degs,d,'m');`
 > список мономов данной квазистепени 3
 > `vfs:={seq(a[i],i=1..m)}:`
 > список неопределённых коэффициентов
 > `K:=sum(a[i]*mns[i],i=1..m):`
 > производящая функция с неопределёнными коэффициентами
 > `fbr:={X=0,Y=0,T=0,Z=0}:`
 > отмеченный слой
 > `cff:=coeffs(subs(fbr,K),vars):`
 > условие сохранения отмеченного слоя

```

> Rt1:=expand(rem(L(K,H),H,P)):
> первое возмущение световой гиперповерхности
> cfq:=coeffs(expand(Rt1-mtaylor(Rt1,[P,Q,S],3)
> ),vars):
> условие квадратичности первого возмущения по импульсам
> ci2p:=coeffs(expand(L(W[2],K)-2*K),vars):
> инвариантность возмущения (вторая квазиоднородность)
> ci2m:=coeffs(expand(L(W[2],K)+2*K),vars):
> инвариантность возмущения (вторая квазиоднородность)

> Kpi1:=subs(solve({cff,ci2p,cfq},{op(vfs)}
> ),K):
> factor(Kpi1-mtaylor(Kpi1,[P,Q,S],2));
> квадратичность производящей функции

```

$$a_{22} (Q - S) (-X Q + S X + P Y + P T)$$

```

> Kpi2:=subs(a[39]=1,Kpi1):
> Rt2:=expand(rem(L(Kpi2,L(Kpi2,H)),H,P)):
> второе возмущение световой гиперповерхности
> factor(Rt2-mtaylor(Rt2,[P,Q,S],3));
> квадратичность второго возмущения по импульсам

```

$$-2 a_{22} (Q - S)^3 (a_{28} + a_{31}) (Y + T)$$

```

> Kpi3:=subs(a[51]=a[44],Kpi2);

```

$$\begin{aligned}
Kpi3 := & a_{28} Q X Y + a_{22} P Q Y + a_{28} Q X T + a_{22} P Q T - a_{22} P Y S - a_{28} X Y S \\
& + 2 a_{34} X Y T + 2 a_{31} P Y T + a_{31} P Y^2 - a_{28} S X T + 2 a_{22} Q S X - a_{22} P S T + a_{34} X Y^2 \\
& + a_{34} X T^2 + a_{31} P T^2 - a_{22} S^2 X - a_{22} Q^2 X
\end{aligned}$$

Симметрии:

```

> s1:={X=-X,P=-P};

```

$$s1 := \{P = -P, X = -X\}$$

```

> s2:={P=-P,Q=-Q,S=-S,Z=-Z};

```

$$s2 := \{Z = -Z, S = -S, Q = -Q, P = -P\}$$

```

> s3:={Y=-Y,Q=-Q};

```

$$s3 := \{Y = -Y, Q = -Q\}$$

> expand(subs(s1,H)-H);

0

> expand(subs(s2,H)+2*W[2]-H);

0

> expand(subs(s3,H)+2*W[2]-H);

0

> factor(subs(s1,Kpi3)+Kpi3);

0

> factor(subs(s2,Kpi3)-Kpi3);

$$-2(Y + T)(a_{31}PY + a_{28}QX + a_{31}PT - a_{28}XS)$$

Итак, симметричные инвариантные производящие функции:

> Kpi:=subs(solve({cff,ci2p,cfq,a[39]=1,a[51]=
> 0,a[44]=0,a[54]=B},{op(vfs)}),K);

Kpi :=

$$S^2X + Q^2X - 2QSX + PSY - PQY + PST - PQT + 2BXYT + BXT^2 + BXY^2$$

> Kmi:=subs(s3,Kpi);

Kmi :=

$$S^2X + Q^2X + 2QSX - PSY - PQY + PST + PQT - 2BXYT + BXT^2 + BXY^2$$

Симметричные производящие функции в исходных координатах – базис алгебры \mathfrak{A} :

> kpi:=factor(subs({B=0,P=-p/r,Q=-q/r,S=1/r,X=
> x,Y=y,Z=z,T=t},-r*Kpi));

$$kpi := -\frac{(1+q)(qx+x-pt-py)}{r}$$

```
> kmi:=factor(subs({B=0,P=-p/r,Q=-q/r,S=1/r,X=
> x,Y=y,Z=z,T=t},-r*Kmi));
```

$$kmi := -\frac{(-1+q)(qx-x-py+pt)}{r}$$

Этап 3. Фронт возмущённой системы

```
> Kt := subs(B = 0, Kpi);
```

$$Kt := S^2 X + Q^2 X - 2Q S X + P S Y - P Q Y + P S T - P Q T$$

Подпрограмма для вычисления потока контактного векторного поля:

```
> Ex:=proc(K,F,N) local xl,yl,i; xl:=F; yl:=xl;
> for i to N do xl:=t*L(K,xl)/i; yl:=yl+xl od; RETURN(collect(yl,t));
> end;
```

```
Ex := proc(K, F, N)
```

```
local xl, yl, i;
```

```
xl := F; yl := xl; for i to N do xl := tL(K, xl)/i; yl := yl + xl od; RETURN(collect(yl, t))
```

```
end
```

```
> Flw:=[Pt=Ex(Kt,P,10), Qt=Ex(Kt,Q,10),
> St=Ex(Kt,S,10), Xt=Ex(Kt,X,10), Yt=Ex(Kt,Y,10), Tt=Ex(Kt,T,10),
> Zt=Ex(Kt,Z,10)];
```

$$Flw := [Pt = P + t(-S^2 - Q^2 + 2QS),$$

$$Qt = (\frac{1}{2}S^3 - \frac{3}{2}QS^2 + \frac{3}{2}Q^2S - \frac{1}{2}Q^3)t^2 + t(-PS + PQ) + Q,$$

$$St = (\frac{1}{2}S^3 - \frac{3}{2}QS^2 + \frac{3}{2}Q^2S - \frac{1}{2}Q^3)t^2 + t(-PS + PQ) + S,$$

$$Xt = X + t(SY - QY + ST - QT), Yt =$$

$$(-\frac{1}{2}S^2Y - \frac{1}{2}S^2T - \frac{1}{2}Q^2Y - \frac{1}{2}Q^2T + QSY + QST)t^2 + t(2QX - 2SX - PY - PT) + Y, Tt =$$

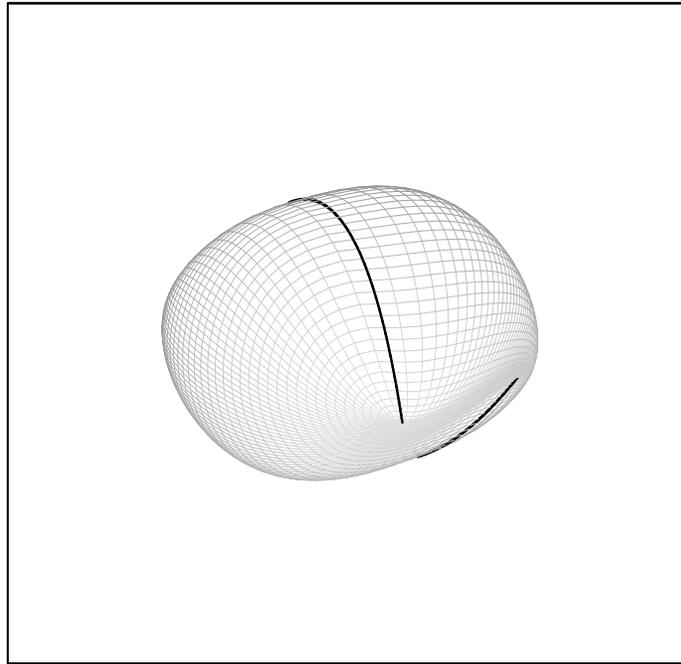
$$(\frac{1}{2}S^2Y + \frac{1}{2}S^2T + \frac{1}{2}Q^2Y + \frac{1}{2}Q^2T - QSY - QST)t^2 + t(2SX - 2QX + PY + PT) + T,$$

$$Zt = Z + t(S^2X + Q^2X - 2QSX + PSY - PQY + PST - PQT)]$$

```
> Lgt := simplify(subs(b = 2*a*c*t+b, subs(Leg,
> Flw)));
```

```
Lgt := [Pt = 2a^2c^2t + 2abc - tc^2 - tc^2a^4,
Qt = -1/2t^2c^3 + 1/2t^2c^3a^4 + 1/2t^2c^3a^2 - 1/2t^2c^3a^6 + 1/2c - 1/2cb^2 + 1/2ca^2 - 1/2ca^2b^2,
St = -1/2t^2c^3 + 1/2t^2c^3a^4 + 1/2t^2c^3a^2 - 1/2t^2c^3a^6 - 1/2c - 1/2cb^2 - 1/2ca^2 - 1/2ca^2b^2,
Xt = 2ln(a^2)a^2c^2t + ln(a^2)abc + tc^2 - tc^2a^4, Yt = 13/2t^2c^3a^2 + 1/2t^2c^3 - 13/2t^2c^3a^4
- 1/2t^2c^3a^6 + 2tc^2ln(a^2)ab + 2tc^2ln(a^2)a^3b + 4c^3ln(a^2)a^4t^2 + 4c^3ln(a^2)a^2t^2
+ 4ta^2c^2b - 4ta^3c^2b + 1/2ca^2 - 1/2ca^2b^2 - 1/2c + 1/2cb^2, Tt = -13/2t^2c^3a^2 - 1/2t^2c^3
+ 13/2t^2c^3a^4 + 1/2t^2c^3a^6 - 2tc^2ln(a^2)ab - 2tc^2ln(a^2)a^3b - 4c^3ln(a^2)a^4t^2
- 4c^3ln(a^2)a^2t^2 - 4ta^2c^2b + 4ta^3c^2b + 1/2ca^2 + 1/2ca^2b^2 - 1/2c - 1/2cb^2, Zt =
8c^4a^4t^2ln(a^2) - 6c^4a^6t^2 + 6c^4a^2t^2 + 6c^3a^3tbln(a^2) - 4c^3a^5tb + 4c^3atb
+ c^2b^2a^2ln(a^2) - 1/2c^2a^4b^2 + 1/2c^2b^2 + tc^3ln(a^2)a^5b + tc^3ln(a^2)ab + 2c^4ln(a^2)a^6t^2
+ 2c^4ln(a^2)a^2t^2]
```

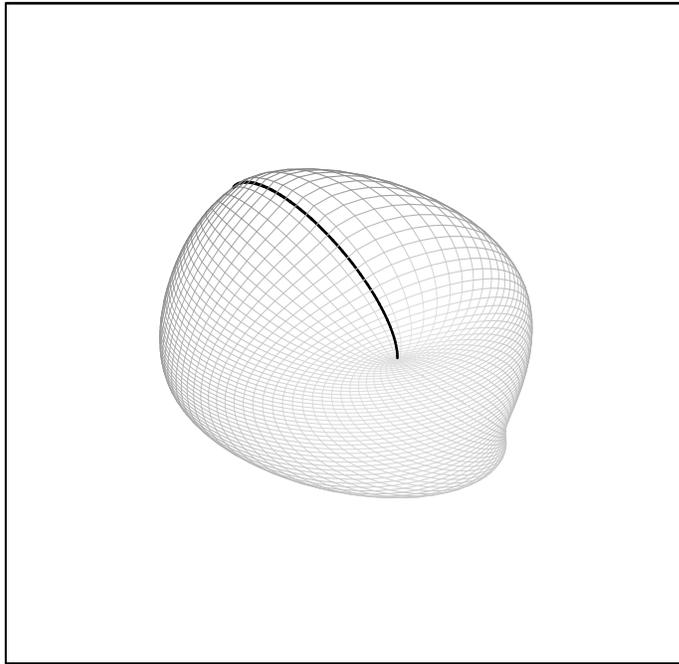
```
> Ltn := subs({a = tan((1/2)*a), b =
> tan((1/2)*b), t = 0.1}, subs(c = 2/((a^2-1)*(b^2+1)), Lgt));
> Fr := subs(Ltn, [Xt, Yt, Zt]):
> frx:=plot3d(Fr, a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1), b=0..Pi, grid=[2*N+1, N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit, Fr, a=0), b=0..Pi, num
> points=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi/2), b=-Pi..P
> i, numpoints=80, color=brown, thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi), b=0..Pi, nu
> mpoints=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2, Fr), a=-Pi..Pi, num
> points=110, color=green, thickness=3):
> display({frx, sa0, saI}, orientation=[51, 55]);
```



```

> Fr := subs(Ltn, [Pt/(Pt*Xt+Qt*Yt-Zt),
> Qt/(Pt*Xt+Qt*Yt-Zt), -1/(Pt*Xt+Qt*Yt-Zt)]):
> frx:=plot3d(Fr,a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1),b=0..Pi,grid=[2*N+1,N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit,Fr,a=0),b=0..Pi,num
> points=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi/2),b=-Pi..P
> i,numpoints=80,color=brown,thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit,Fr,a=Pi),b=0..Pi,nu
> mpoints=2*N+1,color=black,thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2,Fr),a=-Pi..Pi,num
> points=110,color=green,thickness=3):
> display({frx,sa0,saI},orientation=[51,55]);

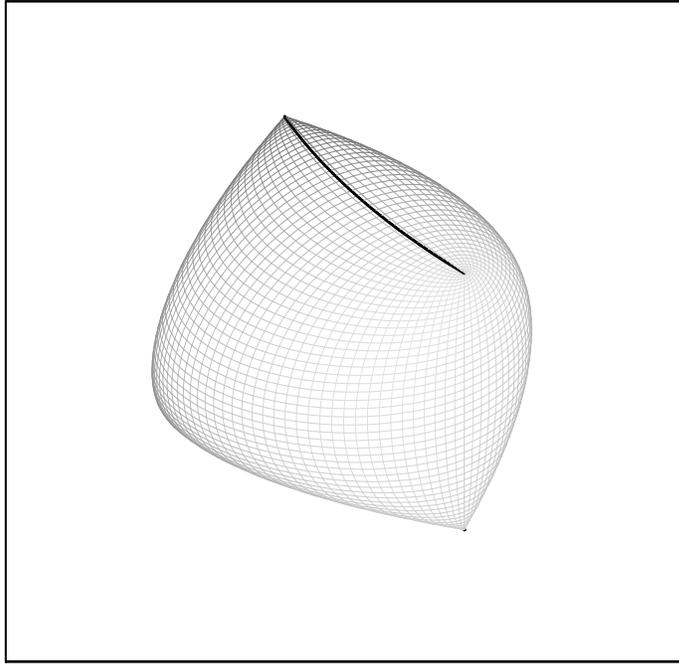
```



```

> Fr := subs(Ltn, [-Pt/St, Qt/St, -1/St]):
> frx:=plot3d(Fr, a=-Pi+1*Pi/(2*N+1)..Pi+1*Pi/(2
> *N+1), b=0..Pi, grid=[2*N+1, N+1]):
> sa0:=spacecurve(map(limit, Fr, a=0), b=0..Pi, num
> points=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sa1:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi/2), b=-Pi..P
> i, numpoints=80, color=brown, thickness=3):
> saI:=spacecurve(map(limit, Fr, a=Pi), b=0..Pi, nu
> mpoints=2*N+1, color=black, thickness=4):
> sb1:=spacecurve(subs(b=Pi/2, Fr), a=-Pi..Pi, num
> points=110, color=green, thickness=3):
> display({frx, sa0, saI}, orientation=[51, 55]);

```



Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. *Особенности каустик и волновых фронтов*. Фазис, Москва, 1996.
- [2] A. A. Agrachev. Exponential mappings for contact sub-riemannian structures. *J. Dynamical and Control Systems*, 2:321–358, 1996.
- [3] V. I. Arnold. On the interior scattering of waves, defined by hyperbolic variational principles. *J. Geom. Phys.*, 5(3):305–315, 1988.

Раздел 3.

Проблема Калаи о нижней оценке для общего числа граней в центральносимметричном многограннике

1 Изложение основных результатов

1.1 Основные определения и теоремы из теории параллелоэдров.

Понятие параллелоэдра и сам термин были введены кристаллографом Е.С. Фёдоровым [1] (1885) в случае трехмерного пространства как одно из основных понятий кристаллографии. В общем случае d -мерный *параллелоэдр* определяется как выпуклый d -мерный многогранник, который своими параллельными копиями разбивает пространство \mathbb{E}^d нормальным образом, иными словами, если пересечение двух многогранников не пусто, то оно является их общей целой гранью некоторой размерности.

Важный вклад в теорию параллелоэдров внес Г. Минковский [2]. Он доказал теорему, дающую необходимые условия того, что многогранник является параллелоэдром. Б.А. Венков [3] показал, что те же условия являются и достаточными. Позднее теорема Венкова была переоткрыта в работе МакМаллена [4]. В работах Долбилина и Макарова [5], [6] было доказано более общее утверждение из которого теорема Венкова легко следует.

Г.Ф. Вороной [7, 8] построил теорию параллелоэдров специального типа, которые теперь называют *параллелоэдрами Вороного*. Под *параллелоэдром Вороного* мы понимаем область в \mathbb{E}^d , построенную по некоторой d -мерной решетке $\Lambda \subset \mathbb{E}^d$ и состоящую из точек, для которых данная точка $p \in \Lambda$ является ближайшей среди всех точек решетки. Такая область является d -мерным многогранником в \mathbb{E}^d и действительно является параллелоэдром. В теории Вороного был построен алгоритм перечисления всех комбинаторных типов параллелоэдров Вороного. Тем не менее одна из основных задач теории параллелоэдров — нахождение алгоритма, перечисляющего для данной размерности все комбинаторные типы параллелоэдров — до сих пор остается нерешенной.

Вороной высказал гипотезу о том, что любой параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного. Он сам доказал свою гипотезу для примитивных параллелоэдров. О.К. Житомирский [9] усилил теорему Вороного, доказав гипотезу для очень широкого класса — для примитивных в $(d - 2)$ -мерных гранях (это эквивалентно тому, что в каждой $(d - 2)$ -мерной грани сходятся ровно 3 параллелоэдра). Позднее в работе Р. Эрдала [10] гипотеза Вороного была доказана

для параллелоэдров, которые являются зоноэдрами. Последние результаты в данной области, несколько обобщающие случай Житомирского, изложены в кандидатской диссертации А. Ордина [11].

В совместной работе Мишеля, Рышкова и Сенешаль [12] было доказано, что в случае примитивного параллелоэдра аффинно эквивалентный параллелоэдр Вороного будет единственным, что добавило к теореме Вороного существования теорему единственности. В работе [13] эта теорема была усилена, и Н.П. Долбилин поставил более общую задачу описания множества параллелоэдров Вороного, аффинно эквивалентных данному параллелоэдру общего вида (в случае, когда это множество не пусто). Описание таких множеств с точностью до движений всего пространства \mathbb{E}^d получено и представлено в данной работе.

В начале поясним некоторые уже встретившиеся термины. Пусть в d -мерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^d дан k -мерный многогранник M . Будем говорить, что многогранник M' является *параллельной копией* или *транслятом* M в том случае, когда существует параллельный перенос, переводящий M в M' . Разбиение пространства \mathbb{E}^d на многогранники — это семейство замкнутых d -многогранников $\{P_\alpha\} : \bigcup P_\alpha = \mathbb{E}^d, \text{Int}P_i \cap \text{Int}P_j = \emptyset$. Многогранники такого набора называются *ячейками* разбиения. В произвольном многограннике Q помимо *собственных* граней (размерности от 1 до $(\dim Q - 1)$) также будем выделять *несобственные*: *пустую*, которая является общей для всех многогранников, и *полную* — сам многогранник Q . Тогда разбиение \mathcal{T} будем называть *нормальным* или *грань-в-грань*, если для каждой пары его ячеек P_i и P_j их пересечение $P_i \cap P_j$ является гранью каждой из них. Нормальное разбиение, соответствующее параллелоэдру P мы будем обозначать как \mathcal{T}_P или просто \mathcal{T} . Через \mathcal{F}^n обозначим множество всех граней размерности ровно n , принадлежащих ячейкам разбиения \mathcal{T} .

Очень большое значение в теории параллелоэдров имеют следующие теоремы:

Теорема 1.1 (Минковский [2]). *Всякий d -мерный параллелоэдр P удовлетворяет следующим трем условиям.*

- 1.) *P центрально симметричен;*
- 2.) *все его гипергрani центрально симметричны;*
- 3.) *проекция P вдоль каждой его $(d - 2)$ -грani — либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник.*

Теорема 1.2 (Венков [3, 5]). *Выпуклый многогранник, удовлетворяющий условиям (1) - (3) теоремы Минковского является параллелоэдром.*

Примитивной гранью параллелоэдра называется любая грань F_n размерности n ($0 \leq n \leq d - 2$) параллелоэдра P , в которой сходятся ровно $(d - n + 1)$ параллелоэдров разбиения (минимальное число для данных d и n). Из соображений минимальности несложно выводится, что все грани, содержащие примитивную грань F_n как подгрань, также являются примитивными. Произвольная n -грань ($0 \leq n \leq d - 2$) параллелоэдра называется *стандартной* [14], если ее можно представить в виде пересечения некоторых двух параллелоэдров P_i, P_j разбиения \mathcal{T} .

Рассмотрим произвольную $(d - 2)$ -грань F_1^{d-2} параллелоэдра P : в ней сходятся ровно 2 гипергрani $P: F_1 \cap F_2 = F_1^{d-2}$. Согласно второму пункту теоремы Минковского каждая гипергрань параллелоэдра центрально симметрична. Значит,

отразив F_1^{d-2} в центре гиперграни F_2 , мы получим другую $(d-2)$ -грань F_2^{d-2} параллелеэдра P . В F_2^{d-2} сходятся гиперграни F_2, F_3 данного параллелеэдра. Значит мы можем отразить F_2^{d-2} в центре гиперграни F_3 и перейти к гиперграням F_4 и т.д. Множество гиперграней F_1, F_2, \dots , полученных при таком процессе, называется *пояском* $(d-2)$ -грани F_1^{d-2} (или любой из ее последующих образов). По третьему пункту теоремы Минковского, каждый поясок содержит либо 4, либо 6 гиперграней. В первом случае $(d-2)$ -грани $F_1^{d-2}, \dots, F_6^{d-2}$ будут примитивными, и в каждой из них будут сходитьсь ровно 3 гиперграни разбиения \mathcal{T}_P . Во втором случае $(d-2)$ -грани $F_1^{d-2}, \dots, F_4^{d-2}$ будут стандартными, и в каждой из них будут сходитьсь ровно 4 гиперграни данного разбиения.

Понятие пояса параллелеэдра позволяет ввести понятие поясного диаметра. *Поясным диаметром* параллелеэдра называется минимальное количество поясов, которое нужно использовать, чтобы попасть из любой его гиперграни до любой другой. При этом за один шаг разрешается перемещаться из гиперграни F в гипергрань, находящуюся с F в одном поясе. Другими словами, поясной диаметр это диаметр реберного графа многогранника, дуального параллелеэдру P , в котором отождествлены вершины, соответствующие противоположным гиперграням.

Поясной диаметр параллелеэдров может играть важную роль в доказательстве общего случая гипотезы Вороного, так как один из основных методов доказательства гипотезы Вороного — метод канонической нормировки, использованный в частности в [7, 9, 11], подразумевает однозначное распространение значений канонической нормировки по гиперграням из одного пояса из 6 гиперграней.

1.2 Многообразие аффинно эквивалентных параллелеэдров Вороного

Антиподальными будем называть пары граней параллелеэдра P симметричные относительно его центра. Тогда, согласно сказанному выше, каждый поясок параллелеэдра состоит из двух или трех пар антиподальных гиперграней. Для произвольного параллелеэдра P определим *граф Венкова* V_P (см. [11]). Вершины этого графа соответствуют парам антиподальных гиперграней, а ребра соединяют те и только те пары вершин, которые соответствуют гиперграням из одного пояса в P . Кроме того, определим покраску ребер графа V_P в два цвета: если ребро соответствует гиперграням из одного 6-пояска, то оно окрашено в *красный* цвет; иначе ребро соответствует гиперграням из одного 4-пояска и окрашено в *синий*. Из следующей более общей леммы следует, что смежным вершинам графа V_P соответствуют 4 гиперграни, для которых существует ровно один общий поясок, а значит покраска определяется корректно и однозначно.

Лемма 1.3. *Пусть все гиперграни выпуклого d -мерного многогранника центрально симметричны, тогда любые его два пояска (которые определяются дословно так же, как пояски параллелеэдра) либо не имеют общих гиперграней, либо содержат ровно одну пару — антиподальных.*

Доказательство. По теореме Александрова-Шепарда [15], такой многогранник M является центрально симметричным. Каждая гипергрань пояска параллельна аффинной оболочке $(d-2)$ -грани, задающей данный поясок. Рассматривая проекцию многогранника вдоль аффинной оболочки этой $(d-2)$ -грани, получаем, что

произвольный поясок симметричен относительно центра M . Рассмотрим пару поясков, у которых есть общие гиперграни. Каждая из этих гиперграней содержит образующие $(d - 2)$ -грани обоих поясков, значит сумма линейных оболочек этих образующих содержится в линейной оболочке всей гиперграни и имеет размерность не более $(d - 1)$. С другой стороны, слагаемые различны и имеют размерность $(d - 2)$, отсюда их сумма имеет размерность не менее $(d - 1)$, то есть в точности равна $(d - 1)$. Получаем, что все общие для поясков гиперграни имеют одинаковое $(d - 1)$ -мерное направление, значит таких гиперграней в M не более двух и они разбиваются на пары антиподальных. Лемма доказана. \square

Подграфом Венкова G_P параллелоэдра P будем называть подграф графа Венкова, содержащий все вершины и только красные ребра из V_P . Иными словами, две вершины G_P соединены ребром тогда и только тогда, когда им соответствуют гиперграни из одного 6-пояска.

Будем говорить, что 2 различные гиперграни F_1 и F_2 параллелоэдра P *смежны*, если у них есть общая $(d - 2)$ -грань. Будем говорить, что гиперграни F^1 и F^2 принадлежат одной *компоненте (комбинаторной) связности* на поверхности P , если для данных гиперграней $F^1, F^2 \subset P$ существует цепочка $F^1 = F_1, F_2, \dots, F_k = F^2$ гиперграней параллелоэдра P , в которой каждая пара соседних смежна по примитивной $(d - 2)$ -грани. Легко проверить, что таким образом корректно определяется разбиение множества гиперграней параллелоэдра на компоненты.

Лемма 1.4. *Если компонента связности параллелоэдра содержит более одной гиперграни, то она антиподальна самой себе.*

Доказательство. Предположим, что данная компонента содержит более одной гиперграни, и F — одна из них. Если все принадлежащие ей $(d - 2)$ -грани стандартны, то F составляет отдельную компоненту, что противоречит предположению. Иначе среди $(d - 2)$ -граней в F есть хотя бы одна примитивная. Эта $(d - 2)$ -грань порождает 6-поясок, все гиперграни которого, очевидно, принадлежат той же компоненте, что F . В частности, антиподальная F гипергрань также принадлежит данной компоненте. \square

Из этой несложной леммы вытекает, что *подграф Венкова* G_P *данного параллелоэдра* P *содержит ровно* k *компонент связности тогда и только тогда, когда множество гиперграней* P *распадается в точности на* k *классов, где каждый класс — либо антиподальная самой себе компонента, либо пара антиподальных изолированных гиперграней, каждая из которых составляет отдельную компоненту.*

Сформулируем основной в этой работе результат, отвечающий, с учетом последнего замечания, на поставленную ранее задачу ([13]):

Теорема 1.5 (Основной результат). *Пусть для параллелоэдра* P *имеется хотя бы один аффинно эквивалентный параллелоэдр Вороного, и подграф Венкова* G_P *имеет ровно* k *компонент связности. Тогда многообразие всех параллелоэдров Вороного аффинно эквивалентных* P *имеет размерность* k .

В работе также предлагается более подробное описание этого многообразия.

1.3 Критерий для параллелоэдров Вороного

Для каждой гиперграни F данного параллелоэдра P определим *фасетный вектор* $f = f(F)$ как направленный отрезок с началом в центре P и концом в центре параллелоэдра P_F (единственного) такого, что $P \cap P_F = F$. Множество всех фасетных векторов параллелоэдра P будем обозначать \mathcal{V} .

Рассмотрим произвольный d -мерный параллелоэдр Вороного P_V . По определению, он построен по некоторой решетке Λ^d . Не умаляя общности, точка $0 \in \Lambda^d$ и является центром P_V . Для произвольной пары различных точек $p, q \in \mathbb{E}^d$ обозначим через π_{pq} срединный перпендикуляр (гиперплоскость) к отрезку pq , а через H_{pq} — то из замкнутых полупространств в \mathbb{E}^d , ограниченных гиперплоскостью π_{pq} , что содержит точку p . Тогда для произвольных $p, q \in \mathbb{E}^d$, в частности, имеем $H_{pq} \cap H_{qp} = \pi_{pq}$, $H_{pq} \cup H_{qp} = \mathbb{E}^d$. Из определения следует, что

$$P_V = \bigcap_{p \in \Lambda, p \neq 0} H_{0p}$$

Отсюда легко выводится следующий полезный критерий для параллелоэдров Вороного:

Лемма 1.6 (Критерий). *Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждая его гипергрань F перпендикулярна соответствующему ей фасетному вектору $f(F)$.*

Доказательство. Если P является параллелоэдром Вороного, то каждая его гипергрань содержит середину соответствующего фасетного вектора и, очевидно, ортогональна ему. Обратно, если все фасетные вектора P ортогональны соответствующим гиперграням, то $P = \bigcap_{p \in M, p \neq 0} H_{0p}$, где M — множество центров параллелоэдров, смежных с P по общей гиперграни. Рассмотрим разбиение \mathcal{T} пространства \mathbb{E}^d на параллельные копии P и решетку Λ^d центров ячеек этого разбиения. Для данной решетки определен параллелоэдр Вороного $P_V = \bigcap_{p \in \Lambda, p \neq 0} H_{0p}$. Так как $M \subset \Lambda^d$, то $P_V \subset P$. Однако, и P , и P_V являются фундаментальными областями для Λ^d , а значит имеют равный объем. Отсюда следует, что $P = P_V$ и, значит, P также является параллелоэдром Вороного. \square

1.4 Разложения параллелоэдров

Суммой Минковского множеств $Q_1, Q_2, \dots, Q_k \subset \mathbb{R}^n$ называется множество точек $Q = \sum_{i=1}^k Q_i := \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^k q_i, q_i \in Q_i \right\}$. В данной работе нас будет интересовать исключительно случай, когда все Q_i — это выпуклые многогранники некоторых размерностей. Хорошо известно, что сумма Минковского выпуклых многогранников сама является выпуклым многогранником. В случае, когда все слагаемые центрально симметричны, их сумма также является центрально симметричной, при этом центр суммы является суммой центров слагаемых.

Будем рассматривать прямую сумму Минковского, то есть когда слагаемые расположены в трансверсальных пространствах¹. Нам потребуется², что в случае

¹под трансверсальностью аффинных подпространств в данной работе подразумевается нулевое пересечение линейных частей рассматриваемых подпространств

²см. произведение многогранников, [16]

прямой суммы $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^k Q_i \right) = \sum_{i=1}^k \dim Q_i$, а также, что каждая грань F суммы $Q := \bigoplus_{i=1}^k Q_i$ является прямой суммой некоторых граней слагаемых: $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. В частности, все гиперграни в Q имеют вид $Q_1 \oplus \dots \oplus F_i \oplus \dots \oplus Q_k$, где ровно одно из слагаемых Q_i заменено на свою гипергрань F_i .

Если параллелоэдр P можно представить в виде прямой суммы Минковского двух многогранников Q_1 и Q_2 : $P = Q_1 \oplus Q_2$, то он называется *разложимым*. Сформулируем нужный нам факт:

Предложение 1.7 (Свойства разложимости).

- 1.) Если параллелоэдр P разложим в сумму $P = Q_1 \oplus Q_2$, то многогранники Q_1 и Q_2 также являются параллелоэдрами некоторой размерности.
- 2.) Для всякого параллелоэдра P (с центром в начале координат \mathbb{E}^d) однозначно, с точностью до порядка слагаемых, определено неприводимое разложение в сумму неразложимых параллелоэдров

$$P = \bigoplus_{i=1}^k Q_i, \quad k \geq 1, \quad \text{Center}(Q_i) = 0$$

- 3.) Пусть задан набор параллелоэдров Q_i , все с центром в начале координат \mathbb{E}^d , лежащие в трансверсальных подпространствах \mathbb{E}^d . Обозначим через P прямую сумму $P := \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, а для каждого i через Λ_i — решетку центров нормального разбиения подпространства $\text{aff}(Q_i)$ на параллельные копии Q_i . Тогда множество $\Lambda := \bigoplus \Lambda_i$ является d -мерной решеткой в \mathbb{E}^d , а множество

$$\{P_s\} := \{P + \lambda_s \mid \lambda_s \in \Lambda\}$$

является нормальным разбиением пространства \mathbb{E}^d и, соответственно, P является параллелоэдром.

Доказательство. Этот факт достаточно известен специалистам, и в нашей работе мы докажем лишь первый пункт. Из определения прямой суммы следует, что сечение параллелоэдра P (или произвольной его параллельной копии) любой параллельной копией подпространства $\text{aff}(Q_1)$ либо пусто, либо конгруэнтно Q_1 . Отсюда, и из того, что P является выпуклым, следует, что выпуклыми являются и Q_i . Тогда, если пересечь разбиение \mathcal{T}_P подпространством $\text{aff}(Q_1)$, то получим нормальное разбиение этого подпространства на параллельные копии Q_1 . Значит, по определению, Q_1 (аналогично и Q_2) является параллелоэдром. Первый пункт доказан. \square

Отсюда, в частности, следует, что гиперграни параллелоэдра P с неприводимым разложением $\bigoplus_{i=1}^k P_i$ разбиваются на k семейств $\mathcal{F}_i = \{P_1 \oplus \dots \oplus F_i \oplus \dots \oplus P_k\}$. Множество фасетных векторов, соответствующих гиперграням из \mathcal{F}_i будем обозначать \mathcal{V}_i . Если также задан набор внешних нормалей к гиперграням из \mathcal{F}_i , то будем его обозначать \mathcal{N}_i . Для произвольного набора векторов \mathcal{S} будем обозначать его линейную оболочку через $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Лемма 1.8. Пусть параллелоэдр P разлагается в прямую сумму $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, тогда $P \cap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P_i$.

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что центры всех P_i и P совпадают с началом координат в \mathbb{E}^d . Тогда из определения прямой суммы имеем, что $P_i = P \cap \text{aff}(P_i)$. Из третьего свойства разложимости имеем, что \mathcal{V}_i как множество направленных отрезков совпадает с множеством фасетных векторов параллелоэдра P_i — множеством $\mathcal{V}(P_i)$. Тогда

$$P \cap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P \cap \langle \mathcal{V}(P_i) \rangle = P \cap \text{aff}(P_i) = P_i.$$

□

Лемма 1.9. Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, тогда для любой пары индексов $i \neq j$, $0 < i, j \leq k$ выполнено $\mathcal{N}_i \perp \mathcal{V}_j$ (каждый вектор первого множества ортогонален каждому вектору второго множества).

Доказательство. Рассмотрим некоторую нормаль $n_i \in \mathcal{N}_i$, соответствующую ей гипергрань $P_1 \oplus \dots \oplus F_i \oplus \dots \oplus P_k$ и любой индекс $j \neq i$, $0 < j \leq k$. Имеем $n_i \perp P_1 \oplus \dots \oplus F_i \oplus \dots \oplus P_k$, значит $n_i \perp P_j$, то есть $n_i \perp \text{aff}(P_j) = \langle \mathcal{V}_j \rangle$. В частности, $n_i \perp f_j$ для произвольного $f_j \in \mathcal{V}_j$. □

Следующая теорема связывает свойство разложимости параллелоэдра с его графом Венкова:

Теорема 1.10 (Ордин [11]). Пусть, P является прямой суммой параллелоэдров P_1 и P_2 . Будем считать, что 0 является центром каждого из параллелоэдров P, P_1, P_2 . Пусть V_1 и V_2 — подграфы графа Венкова $V(P)$ на вершинах вида $\pm F_1 \oplus P_2$ и $P_1 \oplus \pm F_2$ соответственно, где F_1 — произвольная гипергрань P_1 , F_2 — произвольная гипергрань P_2 . Тогда

- 1.) а.) Отображение из $V(P_i)$ в V_i , при котором вершина $\pm F_i$ переходит в $\pm F_i \oplus P_j$ является изоморфизмом графов при $\{i, j\} = \{1, 2\}$
- б.) Между вершинами подграфов V_1 и V_2 присутствуют все возможные ребра и все они имеют синий цвет.
- 2.) Если граф Венкова $V(P)$ не связан по красным ребрам, то параллелоэдр P разложим.

Из этой теоремы при помощи индукции можно получить более общее и удобное для нас утверждение.

Предложение 1.11.

- 1.) Подграф Венкова параллелоэдра P содержит ровно k компонент связности $G_P = \bigsqcup_{i=1}^k G_i$ тогда и только тогда, когда P представим в виде суммы k неразложимых параллелоэдров $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$.
- 2.) Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Отображение, переводящее вершину $\pm F_i$ подграфа Венкова G_{P_i} в вершину $P_1 \oplus \dots \oplus P_{i-1} \oplus \pm F_i \oplus P_{i+1} \oplus \dots \oplus P_k$ подграфа Венкова G_P , является изоморфизмом между графом G_{P_i} и подграфом G_i .

Из этого предложения, в частности следует, что для данного параллелоэдра такое разложение единственно (с точностью до порядка слагаемых). Следующая лемма говорит о том, что класс параллелоэдров Вороного замкнут относительно операции прямой суммы во вполне ортогональных подпространствах.

Лемма 1.12. *Пусть некоторый параллелоэдр P представляется в виде прямой суммы некоторых многогранников меньших размерностей $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждый из многогранников P_i является параллелоэдром Вороного, а аффинные оболочки слагаемых ортогональны.*

Доказательство. По первому свойству разложимости все слагаемые P_i данной прямой суммы являются параллелоэдрами. Будем считать, что центры всех P_i и P совпадают с точкой θ . Докажем лемму в случае $k = 2$, то есть $P = P_1 \oplus P_2$. Рассмотрим произвольную гипергрань F'_1 параллелоэдра P_1 и ее фасетный вектор f'_1 . Ей соответствует гипергрань $F_1 = F'_1 \oplus P_2$ параллелоэдра P с фасетным вектором f_1 . Из третьего свойства разложимости следует, что f_1 и f'_1 как направленные отрезки совпадают. Пусть P является параллелоэдром Вороного, тогда по критерию имеем, что все его фасетные вектора являются нормальными к соответствующим гиперграням, то есть $\mathcal{N}_1 = \mathcal{V}_1, \mathcal{N}_2 = \mathcal{V}_2$. Согласно лемме 6, нормали к гиперграням одной компоненты ортогональны фасетным векторам другой компоненты, то есть в данном случае $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$. Так как $\text{aff}(P_1) = \langle \mathcal{V}_1 \rangle, \text{aff}(P_2) = \langle \mathcal{V}_2 \rangle$, то $\text{aff}(P_1) \perp \text{aff}(P_2)$. Таким образом, ортогональность аффинных оболочек доказана. Так как $f_1 \perp F_1 = F'_1 \oplus P_2$ и $f'_1 = f_1$, то $f'_1 \perp F'_1$. В силу произвольности выбора фасетного вектора f'_1 , по критерию имеем, что P_1 является параллелоэдром Вороного. Аналогично доказывается, что P_2 — параллелоэдр Вороного.

Обратно, если P_1, P_2 — параллелоэдры Вороного и $\text{aff}(P_1) \perp \text{aff}(P_2)$, то $f'_1 \perp F'_1, f_1 \perp \langle \mathcal{V}_2 \rangle = \text{aff}(P_2)$, следовательно $f_1 = f'_1 \perp (F'_1 \oplus P_2) = F_1$, то есть $f_1 \perp F_1$. Таким образом все фасетные вектора параллелоэдра P ортогональны соответствующим гиперграням. Значит, по критерию, P — параллелоэдр Вороного. В случае $k = 2$ теорема доказана. Общее доказательство получается применением этого случая к суммам $P_1 \oplus P_2, (P_1 \oplus P_2) \oplus P_3, \dots, \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} P_i \right) \oplus P_k$. \square

1.5 Конструкция восстановления

Пусть P и P' — два d -мерных параллелоэдра Вороного и допустим существует аффинное преобразование φ , переводящее P в P' : $\varphi(P) = P'$. Пусть неприводимое разложением для P имеет вид $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$, тогда в силу невырожденности φ имеем:

$$P' = \varphi(P) = \varphi(P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_k) = \varphi(P_1) \oplus \varphi(P_2) \oplus \dots \oplus \varphi(P_k)$$

Согласно лемме 8 каждое слагаемое $\varphi(P_i)$ является параллелоэдром Вороного, и линейные оболочки любых двух слагаемых ортогональны. Из предложения 7 следует, что данное разложение P' неприводимо.

В работе [13] (см. также [12]) доказана следующая теорема об отображениях параллелоэдров:

Теорема 1.13 (Долбилин et al [13]). *Для произвольной размерности d всякий слабо примитивный d -параллелоэдр³ аффинно эквивалентен не более чем одному*

³то есть со связным подграфом Венкова

(с точностью до подобия) параллелоэдру Вороного.

Из этой теоремы следует, что каждое ограничение $\varphi_i := \varphi|_{\text{aff}(P_i)}$ отображения φ является преобразованием подобия. Можно действовать и в обратном направлении:

Конструкция восстановления. Пусть в \mathbb{E}^d задан набор параллелоэдров Вороного P_1, \dots, P_k , $\sum \dim P_i = d$, аффинные оболочки которых попарно трансверсальны. Также пусть в \mathbb{E}^d заданы вполне ортогональные аффинные подпространства π_1, \dots, π_k соответственной размерности $\dim \pi_i = \dim P_i$ и невырожденные преобразования подобия $\varphi_i : \text{aff}(P_i) \rightarrow \pi_i$. Рассмотрим

$$P_\varphi = P(P_i, \pi_i, \varphi_i) := \bigoplus_{i=1}^k \varphi_i(P_i)$$

по теореме 6 о разложимости параллелоэдров Вороного эта сумма является параллелоэдром Вороного. Нам понадобится следующее простое предложение, которое следует из d -мерной теоремы Пифагора.

Предложение 1.14. Пусть два параллелоэдра Вороного P и P' построены согласно конструкции восстановления. Если их слагаемые соответственно конгруэнтны (то есть $P_i = P'_i$), а соответствующие преобразования подобия φ_i и φ'_i имеют равные коэффициенты подобия, то P и P' конгруэнтны.

1.6 Доказательство основной теоремы

Теперь мы можем непосредственно приступить к доказательству основной теоремы. Так как подграф Венкова для P имеет k компонент связности, то согласно предложению 7 его неприводимое разложение имеет вид $P = \bigoplus_{i=1}^k P_i$. По условию теоремы аффинный класс данного параллелоэдра P содержит параллелоэдры Вороного. Каждый из них имеет вид $\bigoplus_{i=1}^k P'_i$, где $P'_i \cong P_i$ (аффинно эквивалентны). Рассмотрим произвольные два параллелоэдра Вороного P^1, P^2 из этого класса. Их соответствующие слагаемые P_i^1, P_i^2 аффинно эквивалентны P_i , а значит и друг другу. Отсюда, согласно приведенной выше теореме единственности, они подобны: $P_i^1 \sim P_i^2$. Однако могут существовать и другие аффинные отображения, переводящие P^1 в P^2 . При произвольном аффинном отображении φ слагаемое неприводимого разложения переходит в слагаемое неприводимого разложения, значит φ задает перестановку индексов σ по правилу $P_i^1 \rightarrow P_{\sigma(i)}^2$. Отсюда следует подобие $P_i^2 \sim P_{\sigma(i)}^2$ и аффинная эквивалентность $P_i \cong P_{\sigma(i)}$.

Наоборот — каждое преобразование φ однозначно задается набором ненулевых коэффициентов подобия для каждого слагаемого из разложения, перестановкой σ такой, что $P_i^1 \cong P_{\sigma(i)}^1$ и автоморфизмом параллелоэдра Вороного P_i^1 . По предложению 9 любые два таких отображения, отличающиеся только перестановкой σ и выбором автоморфизма для каждого из слагаемых, задают конгруэнтные параллелоэдры. И подгруппа перестановок, и группы автоморфизмов дискретны, значит многообразие всех параллелоэдров Вороного данного аффинного класса изоморфно \mathbb{R}_*^k/N , где \mathbb{R}_* — мультипликативная группа вещественных чисел, а N — некоторая дискретная группа. Значит размерность этого многообразия равна k . Теорема доказана.

2 Теорема о пяти типах граничных фигур

Пусть $P \subset \mathbb{R}^d$ – d -мерный параллеледр, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ – такая d -мерная решётка, что семейство

$$\{P + z : z \in \Lambda\}$$

образует нормальное разбиение \mathcal{T} пространства \mathbb{R}^d .

Через \mathcal{K} обозначим d -мерный геометрический полиэдральный комплекс, задаваемый разбиением \mathcal{T} . Пусть F произвольная $(d - k)$ -мерная грань \mathcal{K} . В относительной внутренности грани F выберем произвольную точку x и проведем через нее k -мерное аффинное подпространство α , трансверсальное подпространству $\text{aff } F$.

Легко видеть, что сечение \mathcal{K} подпространством α в некоторой достаточно малой окрестности точки x является коническим веером, разбивающим α на выпуклые полиэдральные конусы.

Известно, что для любого конического веера \mathcal{W} , разбивающего k -мерное пространство на выпуклые полиэдральные конусы, существует комбинаторно единственный двойственный клеточный комплекс W , гомеоморфный S^{k-1} . Под двойственностью подразумевается существование такой биекции $\varphi : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(W)$, что

$$F_1 \subset F_2 \text{ тогда и только тогда, когда } \varphi(F_1) \supset \varphi(F_2)$$

для любых двух граней F_1 и F_2 многогранника W . При этом каждая клетка W гомеоморфна евклидову диску, и пересечение любых двух клеток W либо пусто, либо является клеткой W .

Легко видеть, что при этом φ переводит m -мерную грань W в $(k - m)$ -мерный конус, где $m = 0, 1, 2, \dots, k - 1$.

К локальному в точке x сечению \mathcal{K} плоскостью α построим двойственный комплекс. Очевидно, что его комбинаторный тип не зависит от выбора x и α . Назовем полученный клеточный комплекс *гранной фигурой* комплекса \mathcal{K} в грани F . Для его обозначения будем использовать символ F° .

Замечание. Имеется естественная конструкция клеточного разбиения \mathbb{R}^d , двойственного разбиению на параллеледры. Клетки двойственного разбиения называются (абстрактными) *дуальными гранями*. Значимость этой конструкции заключается в том, что она позволяет описывать схождение параллеледров в фиксированной грани произвольной размерности. В сущности, граничная фигура представляет собой границу соответствующей дуальной грани.

Теорема 2.1. *Существует ровно 5 возможных граничных фигур комплекса \mathcal{K} в трехмерных гранях. Эти типы: тетраэдр, октаэдр, четырехугольная пирамида, треугольная призма и куб.*

В доказательстве теоремы 2.1 будут использованы следующие свойства параллеледров, установленные Г. Минковским:

1. Любой d -мерный параллеледр P имеет центр симметрии. Центр симметрии P является также центром симметрии разбиения \mathcal{T} пространства \mathbb{R}^d на равные и параллельные параллеледры, одной из ячеек которого является P .

2. Любая гипергрань d -мерного параллелоэдра P имеет центр симметрии. Центр симметрии гиперграней P является также центром симметрии разбиения \mathcal{T} .
3. Для любой $(d-2)$ -мерной грани F разбиения \mathcal{T} гранная фигура F° может быть либо треугольником, либо четырехугольником. Если F° — четырехугольник, то F имеет центр симметрии, являющийся центром симметрии \mathcal{T} .

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.2. Пусть дано разбиение \mathcal{T} пространства \mathbb{R}^d на равные и параллельные параллелоэдры, и пусть P и P' — две различные ячейки этого разбиения. Предположим, что $P \cap P' \neq \emptyset$. Тогда грань $F = P \cap P'$ имеет центр симметрии, и при этом центр симметрии F является центром симметрии \mathcal{T} .

Доказательство. Так как $F = P \cap P'$, то существует гиперплоскость Π , для которой

1. Π является опорной гиперплоскостью и для P , и для P' .
2. P и P' расположены в разных полупространствах относительно Π .
3. $\Pi \cap P = \Pi \cap P' = F$.

Поскольку P и P' обладают центральной симметрией и совмещаются параллельным переносом, существует центральная симметрия s , меняющая P и P' местами.

Очевидно, что P и P' расположены в разных полупространствах и относительно $s(\Pi)$. Следовательно $F \subset s(\Pi)$. Но Π и $s(\Pi)$ переходят друг в друга при центральной симметрии, поэтому они либо параллельны, либо совпадают. Но любая точка F принадлежит обеим этим гиперплоскостям, таким образом, $\Pi = s(\Pi)$.

Кроме того, $F = \Pi \cap P = \Pi \cap P' = s(\Pi) \cap s(P)$. Следовательно, $F = s(F)$. Это означает, что F имеет центр симметрии.

Центры параллелоэдров разбиения \mathcal{T} образуют некоторую решетку Λ . Поскольку s меняет местами два узла Λ — центры P и P' , — имеем $s(\Lambda) = \Lambda$. В силу того, что ячейки \mathcal{T} обладают центральной симметрией, $s(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.

Доказательство леммы завершено. □

Лемма 2.3. Пусть полиэдральный комплекс W на 6 вершинах обладает следующими свойствами:

1. W гомеоморфен S^2 .
2. Все двумерные грани W — треугольники или четырехугольники.
3. Для любых двух вершин W найдется грань, содержащая обе вершины.

Тогда W комбинаторно изоморфен поверхности треугольной призмы.

Доказательство. Доказательство. Известно, что симплициальный комплекс на v вершинах, изоморфный S^2 , имеет $3v - 6$ ребер и $2v - 4$ грани.

Подразделим каждую четырехугольную грань W диагональю на две треугольные грани. Получим симплициальный комплекс W_1 на 6 вершинах, имеющий 12 ребер и 8 граней. Заметим, что ребра, дополняющие 1-остов W_1 до полного графа — это

в точности непроведенные диагонали четырехугольных граней. Поскольку полный граф на 6 вершинах имеет 15 ребер, четырехугольных граней W ровно 3. Эти 3 грани подразделены в 6 треугольных граней комплекса W_1 . Следовательно, неподразделенных граней в W_1 ровно 2, и это в точности все треугольные грани W .

Легко видеть, что любые 2 четырехугольные грани комплекса на 6 вершинах пересекаются в точности по ребру. Покажем, что все 3 четырехугольные грани W не могут иметь общей вершины.

В самом деле, предположим противное — пусть x является общей вершиной всех трех четырехугольных граней. Но тогда в W вершина x смежна по ребру хотя бы с тремя вершинами, и, кроме того, не смежна по ребру ни с одной из вершин, противоположных x по какой-либо из трех четырехугольных граней. Все противоположные x по четырехугольным граням вершины, очевидно, различны. Таким образом, нашлось как минимум 7 различных вершин комплекса W . Противоречие.

Значит, в комплексе W имеются 3 ребра, попарно без общих вершин, и каждая из четырехугольных граней W содержит ровно 2 из этих трех ребер. Таким образом, эти четырехугольники склеены в цилиндрическую поверхность, поскольку склейка в ленту Мебиуса невозможна из-за ориентируемости S^2 .

Легко видеть, что дополнить эту поверхность до S^2 двумя треугольниками можно единственным способом построив комплекс, комбинаторно изоморфный поверхности треугольной призмы. Доказательство леммы завершено. \square

Лемма 2.4. Пусть симплициальный комплекс W гомеоморфен S^2 , и его 1-остов является полным графом. Тогда W комбинаторно изоморфен поверхности тетраэдра.

Доказательство. Пусть v — число вершин комплекса W . Тогда количество ребер в W равно с одной стороны $3v - 6$, а с другой стороны $\frac{v(v-1)}{2}$ как число ребер полного графа. Уравнение

$$\frac{v(v-1)}{2} = 3v - 6$$

имеет 2 корня — $v = 3$ и $v = 4$.

Поскольку у симплициального комплекса, гомеоморфного S^2 , не может быть менее 4 вершин, $v = 4$. Комплекс на 4 вершинах, гомеоморфный S^2 , единственен с точностью до изоморфизма и комбинаторно изоморфен поверхности тетраэдра. Лемма доказана. \square

Лемма 2.5. Пусть симплициальный комплекс W на v вершинах гомеоморфен S^2 , и дополнение его 1-остова до полного графа состоит в точности из $\frac{v}{2}$ попарно несмежных ребер. Тогда W комбинаторно изоморфен поверхности октаэдра.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3, получаем уравнение

$$\frac{v(v-1)}{2} - \frac{v}{2} = 3v - 6$$

корни которого — $v = 2$ и $v = 6$. Таким образом, W — комплекс на 6 вершинах. Кроме того, известна комбинаторика его 1-остова. Отсюда легко однозначно восстановить целиком комбинаторику W . \square

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство. Пусть \mathcal{K} комплекс, заданный разбиением R^d на равные и параллельные параллелоэдры, $F \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$ — произвольная $(d-3)$ -мерная грань. Возможен один из двух случаев:

1. Существует такая $(d-2)$ -мерная грань $A \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$, что $F \subset A$ и A° — четырехугольник.
2. Для каждой $(d-2)$ -мерная грань $A \in \mathcal{F}(\mathcal{K})$ такой, что $F \subset A$, гранная фигура A° является треугольником.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

Случай 1.

По свойству 3 параллелоэдров, грань A имеет центр симметрии y , являющийся центром симметрии \mathcal{T} . Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — центры параллелоэдров P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно, сходящихся в грани A , причем точка z_1 симметрична z_3 относительно y , а z_2 симметрична z_4 .

Легко видеть, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами параллелограмма, плоскость которого трансверсальна аффинному подпространству $\text{aff } A$.

Обозначим

$$B_{ij} = P_i \cap P_j, \text{ где } (i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4).$$

Очевидно, что каждая грань B_{ij} является $(d-1)$ -мерной гранью \mathcal{K} и имеет центр симметрии в точке $\frac{z_1+z_2}{2}$.

Пусть A_{ij} — грань, противоположная A в грани B_{ij} . В силу центральной симметрии грани A ,

$$\begin{aligned} A_{12} &= A + z_1 - z_4, & A_{34} &= A + z_4 - z_1, \\ A_{14} &= A + z_1 - z_2, & A_{23} &= A + z_2 - z_1. \end{aligned}$$

Через грань F проведем гиперплоскость Π , натянутую на F и векторы $z_2 - z_1$ и $z_4 - z_1$. Пусть Π^+ — то из двух замкнутых полупространств, разделяемых Π , которое содержит грань A ; Π^- — дополнительное к нему полупространство. Пусть x — произвольная внутренняя точка грани F .

Несложно видеть, что существует достаточно малая окрестность $O(x)$, для которой выполнено включение

$$\begin{aligned} O(x) \cap \Pi^+ &\subset \text{conv}(A \cup A_{12} \cup A_{14}) \cup \text{conv}(A \cup A_{12} \cup A_{23}) \cup \\ &\cup \text{conv}(A \cup A_{23} \cup A_{34}) \cup \text{conv}(A \cup A_{34} \cup A_{14}) \subset P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4. \end{aligned}$$

Следовательно, если P' — некоторый параллелоэдр \mathcal{T} , отличный от P_1, P_2, P_3, P_4 , и $F \subset P'$, то Π — опорная гиперплоскость к P' , причем $P' \subset \Pi^-$.

Кроме того, хотя бы один параллелоэдр P' , обладающий указанными свойствами, существует, поскольку F° — комплекс, гомеоморфный S^2 , имеющий хотя бы одну четырехугольную грань, следовательно, не менее 5 вершин.

Предположим, что такой параллелоэдр P' единственный. Существует единственный с точностью до изоморфизма гомеоморфный S^2 комплекс на 5 вершинах с четырехугольной гранью — поверхность четырехугольной пирамиды.

Следовательно, гранная фигура F° изоморфна поверхности четырехугольной пирамиды.

Пусть существуют два параллелоэдра разбиения P' и P'' , отличные от P_1, P_2, P_3, P_4 , каждый из которых содержит грань F . Пусть v — вектор параллельного переноса, переводящего P' в P'' . Вектор v параллелен Π , поскольку Π — общая опорная гиперплоскость к P' и P'' , лежащим относительно нее в одном полупространстве. Следовательно, F и $F + v$ являются гранями P'' , и при этом лежат в Π .

Таким образом, $F \subsetneq P \cup \Pi$, поэтому

$$\dim(P \cap \Pi) \in \{d - 2, d - 1\}.$$

Разберем отдельно обе возможности.

Пусть $\dim(P'' \cap \Pi) = d - 2$. Покажем, что в грани F сходится ровно 6 параллелоэдров, а именно $P_1, P_2, P_3, P_4, P', P''$.

Действительно, пусть существует еще один параллелоэдр P''' , подходящий к грани F . Обозначим через w вектор параллельного переноса, переводящего P в P' .

Аналогично показанному ранее, вектор w параллелен гиперплоскости Π . Следовательно, F , $F + v$ и $F + w$ являются гипергранями $(d - 2)$ -мерной грани $P \cap \Pi$. Получено противоречие, поскольку выпуклый $(d - 2)$ -мерный многогранник $P'' \cap \Pi$ не может иметь трех равных и параллельных гиперграней.

Покажем теперь, что никакой центр симметрии разбиения \mathcal{T} не может принадлежать внутренности F . В самом деле, пусть x_0 — такой центр симметрии. Тогда 6 параллелоэдров $P_1, P_2, P_3, P_4, P', P''$ разбиваются на 3 пары симметричных относительно x_0 .

Несложно видеть, что как минимум одна из пар состоит из параллелоэдров P_i и P_j , где $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i < j$. Однако, любая такая пара симметрична либо относительно центра B_{ij} , либо относительно центра A . Поскольку пара ограниченных многогранников не может иметь более одного центра симметрии, имеем противоречие.

Из доказанного, а также леммы 2.2 следует, что для любых двух различных параллелоэдров $Q_1, Q_2 \in \{P_1, P_2, P_3, P_4, P', P''\}$ выполнено $Q_1 \cap Q_2 \supsetneq F$, поэтому

$$\dim(Q_1 \cap Q_2) \geq d - 2.$$

Значит, для любых двух вершин F° найдется двумерная грань, содержащая обе эти вершины. В силу леммы 2.3, F° комбинаторно изоморфна поверхности треугольной призмы. Случай $\dim(P'' \cap \Pi) = d - 2$ полностью разобран.

Пусть теперь $\dim(P'' \cap \Pi) = d - 1$. Несложно показать, что в этом случае Π является опорной гиперплоскостью хотя бы к одному из параллелоэдров P_1, P_2, P_3, P_4 , а следовательно, и к каждому из них. Кроме того, очевидно, что гипергрань $C_i = P_i \cap \Pi$ — гипергрань параллелоэдра P_i при $i = 1, 2, 3, 4$.

Обозначим через A_i для $i = 1, 2, 3, 4$ грань, симметричную A относительно точки z_i . Из симметричности A относительно точки y следует, что каждая грань A_i является параллельным переносом грани A , а именно:

$$\begin{aligned} A_1 &= A + z_1 - z_3, & A_2 &= A + z_2 - z_4, \\ A_3 &= A + z_3 - z_1, & A_4 &= A + z_4 - z_2. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F_1 &= F + z_1 - z_3, & F_2 &= F + z_2 - z_4, \\ F_3 &= F + z_3 - z_1, & F_4 &= F + z_4 - z_2. \end{aligned}$$

Поскольку A_i является гранью \mathcal{K} при каждом $i = 1, 2, 3, 4$, то и F_i также является гранью \mathcal{K} . Кроме того, $F_i \subset \Pi$ при каждом $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно, F и F_i принадлежат гипергранице C_i параллеледра P_i .

Покажем, что F и F_i симметричны друг другу относительно центра C_i . Для этого проведем такую гиперплоскость Σ_i , опорную к P_i , что $P_i \cap \Sigma_i = A$.

Пусть Σ'_i – гиперплоскость, симметричная Σ_i относительно точки z_i . Очевидно, что $P_i \cap \Sigma_i = A_i$. Отсюда следует, что

$$C_i \cap (\Pi \cap \Sigma_i) = F \text{ и } C_i \cap (\Pi \cap \Sigma'_i) = F_i.$$

Итак, F и F_i – это пересечения $(d - 1)$ -мерного многогранника C_i , обладающего центральной симметрией, с двумя параллельными опорными $(d - 2)$ -мерными плоскостями. Следовательно F и F_i симметричны друг другу относительно центра C_i .

Далее, из того, что F и F_i совмещаются параллельным переносом следует, что F обладает центральной симметрией. Обозначим центр грани F через x_0 .

Пусть P'_i – параллеледр, симметричный P_i относительно центра грани C_i . Из свойства 2 параллеледров следует, что P'_i – также параллеледр разбиения. Кроме того, симметрия с центром x_0 , очевидно, переводит P_1, P_2, P_3, P_4 в P'_3, P'_4, P'_1, P'_2 соответственно.

Поскольку указанные 8 параллеледров полностью покрывают некоторую d -мерную окрестность $O(x_0)$, никакие другие параллеледры \mathcal{T} не подходят к грани F . Кроме того, структура \mathcal{T} в этой окрестности восстанавливается однозначно, и гранная фигура F° изоморфна кубу. Случай $\dim(P'' \cap \Pi) = d - 2$ полностью разобран. Тем самым завершено рассмотрение и всего случая 1.

Случай 2.

Все двумерные грани F° – это в точности гранные фигуры двумерных граней, сходящихся в F . Поскольку в рассматриваемом случае все такие гранные фигуры являются треугольниками, комплекс F° симплициальный.

Имеются 2 подслучая, в зависимости от того, есть ли центр симметрии разбиения \mathcal{T} , принадлежащий внутренности F .

Предположим, такого центра симметрии не существует. Тогда для любых двух различных параллеледров Q_1 и Q_2 разбиения \mathcal{T} , сходящихся в F , имеем $Q_1 \cap Q_2 \supsetneq F$. Действительно, включение очевидно по выбору Q_1 и Q_2 , а равенство противоречило бы определению рассматриваемого подслучая в силу леммы 2.2.

Следовательно, для любых двух вершин F° найдется двумерная грань, содержащая обе вершины. Поскольку комплекс F° симплициальный, любые 2 его вершины соединены ребром. По лемме 2.4, F° комбинаторно изоморфен поверхности правильного тетраэдра. Подслучай разобран.

Пусть в грани F нашлась внутренняя точка x_0 , являющаяся центром симметрии \mathcal{T} . В частности, легко показать, что x_0 является тогда центром симметрии F .

Пусть параллеледры Q_1 и Q_2 разбиения \mathcal{T} подходят к грани F и симметричны относительно x_0 . Проведем опорную к Q_1 плоскость Π так, что $Q_1 \cap \Pi = F$. В силу

центральной симметрии Π является опорной гиперплоскостью и к Q_2 , причем Q_1 и Q_2 лежат по разные стороны от Π . Следовательно, $Q_1 \cap Q_2 = F$. Таким образом, вершины F° , соответствующие Q_1 и Q_2 , ребром не соединены.

Пусть параллелеэдры Q_1 и Q_2 разбиения \mathcal{T} подходят к грани F , но не симметричны относительно x_0 . Тогда, аналогично предыдущему, $Q_1 \cap Q_2 \supsetneq F$. Отсюда следует, что вершины F° , соответствующие Q_1 и Q_2 , смежны по ребру.

Таким образом, все вершины F° разбиваются на пары так, что любые две вершины из разных пар смежны по ребру, а вершины из одной пары по ребру не смежны. Согласно лемме 2.5, гранная фигура F° комбинаторно изоморфна поверхности октаэдра. Тем самым и второй подслучай случая 2 разобран.

Итак, разобраны все возможные случаи, следовательно, теорема 2.1 полностью доказана. \square

3 Верхняя оценка числа вершин дуальной k -грани

Теорема 3.1. *Число вершин k -мерной дуальной грани не превосходит 2^k .*

Доказательство. В разбиении \mathbb{R}^d на параллелеэдры рассмотрим произвольную $(d-k)$ -грань F_0 . Пусть P_0, P_1, \dots, P_m — все параллелеэдры разбиения \mathcal{T} , содержащие F_0 . Тогда количество вершин $(F_0)^\circ$ равно $m+1$.

Обозначим t_i — d -мерный вектор, удовлетворяющий условию $P_0 + t_i = P_i$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

Рассмотрим проекцию π вдоль $\text{lin}(F_0)$ на дополнительное подпространство \mathbb{R}^k . Очевидно, что $\pi(F_i)$ — точка, которую мы будем обозначать w_i для $i = 0, 1, \dots, m$. Рассмотрим выпуклую оболочку:

$$W = \text{conv}\{w_0, w_1, \dots, w_m\}.$$

Пусть H_x^a — гомотетия с центром x и коэффициентом a .

Ключевой в доказательстве является следующая лемма:

Лемма 3.2. *Для любого $a \in (0, \frac{1}{2})$ и каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ множества $H_{w_0}^a$ и $H_{w_i}^a$ не пересекаются.*

Прежде чем доказывать лемму, введём несколько новых понятий.

Определим $F'_i = s(F_i)$, где s — центральная симметрия, сохраняющая P_0 . Другими словами, F'_i — грань, противоположная F_i в P_0 .

Грань $P_0 \cap P_i$ для каждого — центрально-симметрична для любого $i = 1, 2, \dots, m$. Так как $F_0 \subset P_0 \cap P_i$, то можно определить грань, противоположную F_0 относительно $P_0 \cap P_i$. Обозначим её F''_i .

Предложение 3.3. *Имеет место равенство $F'_i = F''_i$.*

Доказательство. Пусть s_i — такая центральная симметрия, что $s_i P_0 = P_i$. Очевидно, что $F''_i = s_i(F_0)$.

По определению: $F'_i = s(F_0 - t_i)$. Таким образом достаточно доказать, что $s_i(x) = s(x - t_i)$. Последнее утверждение очевидно, так как в обеих частях равенства стоят центральные симметрии, сохраняющие точку $c + \frac{1}{2}t_i$, где c — центр P_0 . \square

Теперь докажем лемму 3.2

Доказательство. Пусть Π_i — опорная гиперплоскость P_0 , содержащая грань $P_0 \cap P_i$. Очевидно, что $s(\Pi_i)$ — противоположная опорная гиперплоскость P_0 .

Из предложения 3.3 следует, что $F'_i \subset \Pi_i$. Таким образом $F_i \subset s(\Pi_i)$.

Так как Π_i параллельна $\text{lin}(F_0)$, проекции $\pi(\Pi_i)$ и $\pi(s(\Pi_i))$ — гиперплоскости в \mathbb{R}^k . Более того, они различны, так как $\pi(c)$ не лежит ни в одной из них и лежит между ними.

Теперь очевидно, то $w_0 \in \pi(\Pi_i)$, $w_i \in \pi(s(\Pi_i))$ и W лежит между $\pi(\Pi_i)$ и $\pi(s(\Pi_i))$. Таким образом множества $H_{w_0}^a(W)$ и $H_{w_i}^a(W)$ лежат в разных открытых полупространствах, ограниченных гиперплоскостью, проходящей через $\pi(c)$ и параллельной $\pi(\Pi_i)$. Значит, эти множества не пересекаются. Лемма доказана. \square

Предложение 3.4. *Множество всех параллелоэдров разбиения \mathcal{T} , содержащих F_i — это в точности следующее множество:*

$$\{P_0, P_0 - t_i, P_0 - t_i + t_1, \dots, P_0 - t_i + t_{i-1}, P_0 - t_i + t_{i+1}, \dots, P_0 - t_i + t_m\}.$$

Доказательство. В самом деле, множество всех параллелоэдров, которые содержат F_0 может быть явно записано

$$\{P_0, P_0 + t_1, P_0 + t_2, \dots, P_0 + t_m\}.$$

Но множество всех параллелоэдров \mathcal{T} , содержащих F_i — это параллельный перенос на вектор $(-t_i)$ множества всех параллелоэдров, содержащих F_0 . Это и утверждается в предложении. \square

С помощью предложения 3.4 лемму 3.2 можно усилить следующим образом:

Предложение 3.5. *Для любого $a \in (0, \frac{1}{2})$ и каждой пары различных $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ множества $H_{w_i}^a(W)$ и $H_{w_j}^a(W)$ не пересекаются.*

Доказательство. Повторим рассуждение из доказательства леммы 3.2 с единственным изменением: F_0 заменим на F_i .

Действительно, из предложения 3.4 следует то, что множество W не зависит от выбора начальной $(d - k)$ -границы из множества $\{F_0, F_1, \dots, F_m\}$. \square

Теперь перейдём к доказательству теоремы.

Пусть $k' < k$ — аффинная размерность W . Из того, что $H_{w_i}^a(W) \in W$ и множества $H_{w_i}^a(W)$ не пересекаются, получаем:

$$\text{vol}_{k'}(W) \geq \sum_{i=0}^m \text{vol}_{k'}(H_{w_i}^a(W)) = (m + 1)a^{k'} \text{vol}_{k'}(W).$$

Значит, $m + 1 \leq a^{-k'}$, так как $\text{vol}_{k'}(W) > 0$. По определению a — произвольное действительное число из $(0, \frac{1}{2})$. Следовательно:

$$m + 1 \leq 2^{k'} \leq 2^k.$$

Таким образом теорема доказана. \square

Следствие 3.6. *Число комбинаторных типов дуальных k -граней не может превышать некоторой константы $N(k)$, не зависящей от размерности d .*

Замечание. Предположим, что центры параллелоэдров, сходящихся в F_0 принадлежат одной и той же $(d - k)$ -мерной плоскости. Тогда теорема 3.1 легко доказывается при помощи техники Делоне – Сандаковой (см. [18]). Сделанное предположение верно, в частности, для параллелоэдров Вороного. Тем не менее, для случая произвольного параллелоэдра подобный факт установить не удастся, и доказательство теоремы 3.1 основано на других идеях, а именно примененных в работе [19].

4 Поясные диаметры зонотопов, являющихся параллелоэдрами

4.1 Зонотопы, являющиеся параллелоэдрами

Более подробное изложение результатов данного раздела может быть найдено в препринте [21]

Многогранник P размерности d называется *зонотопом*, если он может быть представлен в качестве проекции куба размерности C^n некоторой размерности $n \geq d$. Эквивалентно, любой зонотоп является суммой Минковского конечно набора отрезков. Данные отрезки могут записаны в виде $[0, \mathbf{v}_i], i = 1, \dots, n$, при этом векторы \mathbf{v}_i называются *векторами зон* зонотопа. Зонотоп с множеством векторов зон $V = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ в дальнейшем будет обозначаться $Z(V)$.

Ряд результатов о зонотопах, являющихся параллелоэдрами были получены ранее. Кроме уже упоминавшегося доказательства гипотезы Вороного для зонотопов, являющихся параллелоэдрами [10], в работе МакМаллена [20] доказан необходимое и достаточное условие на множество векторов зон V , чтобы зонотоп $Z(V)$ являлся параллелоэдром.

Теорема 4.1 (МакМаллен, 1975, [20]). *Зонотоп $Z(V)$ размерности d является параллелоэдром в том и только том случае, когда проекция множества V вдоль любого его $(d-2)$ -мерного подмножества состоит из векторов 2 или 3 направлений.*

Одним из самых известных зонотопов, которые также являются параллелоэдрами, является перестановочный многогранник.

Перестановочный многогранник Π_d это выпуклая оболочка $(d + 1)!$ точек \mathbb{R}^{d+1} , чьи координаты являются всеми возможными перестановками чисел $1, 2, \dots, d + 1$. Перестановочный многогранник является зонотопом с $\frac{d(d+1)}{2}$ векторами зон вида $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ для всех пар $i < j$, где \mathbf{e}_k — k -й вектор стандартного базиса \mathbb{R}^{d+1} . Известно, что перестановочный многогранник Π_d является параллелоэдром [22].

Обозначим множество векторов зон d -мерного перестановочного многогранника через $E(d)$.

В том случае если множество V является подмножеством $E(d)$, то зонотоп $Z(V)$ называется *Pi-зонотопом*. Легко видеть, что любой Π -зонотоп является параллелоэдром. В рамках данного раздела мы сформулируем результаты о поясных диаметрах Π -зонотопов, полученные в рамках данного проекта. При этом будет рассматриваться только случай $d \geq 3$, так как случаи меньшей размерности тривиальны. Также мы не будем приводить доказательств некоторых вспомогательных утверждений и основных теорем.

4.2 Представление Π -зонотопов в виде графов

Рассмотрим произвольный Π -зонотоп $Z = Z(V)$, где V является подмножеством $E(d)$. Также рассмотрим некоторый граф G с $d + 1$ вершинами и множеством ребер E . Мы будем говорить, что G — *граф зонотопа* $Z(V)$ и обозначать его G_Z if если вершины G могут быть пронумерованы числами от 1 до $d + 1$ таким образом, что пара (i, j) задает ребро из E если и только если один из пары векторов $\pm(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$ входит в множество векторов зон V . Например графом перестановочного многогранника Π_d является полный граф на $d + 1$ вершине.

С другой стороны, по любому графу G с $d + 1$ пронумерованной вершиной мы можем построить Π -зонотоп $Z = Z_G$ с множеством векторов зон $\{\mathbf{e}_{ij}\}$, соответствующим ребрам G .

Далее мы сформулируем несколько комбинаторных свойств Π -зонотопов, использующих их представление в виде графов.

Лемма 4.2. *Для данного графа G с $d + 1$ вершиной и k компонентами связности размерность соответствующего Pi -зонотопа равна $d + 1 - k$.*

Лемма 4.3. *Проекция Pi -зонотопа с графом G , вершины которого пронумерованы, вдоль вектора \mathbf{e}_{ij} комбинаторна эквивалентна зонотопу с графом G' , который может быть получен из графа G склеиванием пары вершин с номерами i и j .*

Лемма 4.4. *Рассмотрим Pi -зонотоп Z с связным графом G . Любая грань F коразмерности k зонотопа Z определяется разбиение множества вершин графа G на $k + 1$ непустое подмножество $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ таким образом, что любой индуцированный подграф $G(A_i)$ связан и в этом случае $F = Z_{G(\mathcal{A})}$, где $G(\mathcal{A})$ обозначает граф $G(A_0) \cup \dots \cup G(A_k)$. К тому же верно обратное, что любое разбиение $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_k\}$ с связанными индуцированными подграфами $G(A_i)$ определяет семейство параллельных граней Z коразмерности k , каждая из которых равна $Z_{G(\mathcal{A})}$.*

Лемма 4.5. *Два разбиения \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 множества вершин связного графа G определяют две неинцидентные грани F_1 и F_2 Π -зонотопа Z_G , соответствующие этим разбиениям, если и только если одно из разбиений является подразбиением второго, а также каждое множество X из любого из разбиений \mathcal{A}_1 или \mathcal{A}_2 индуцирует связный подграф $G(X)$.*

Лемма 4.6. *Рассмотрим Π -зонотоп Z с связным G и две гиперграни F и H многогранника Z , определяемые разбиениями множества вершин G на подмножества X_1, X_2 и Y_1, Y_2 соответственно. Если грани F и H лежат в одном поясе Z , то одно из множества X_1 или X_2 является подмножеством Y_1 или Y_2 . И обратно, если все подмножества $X_i \cap Y_j$ индуцируют связные подграфы (одно из множеств должно быть пустым), то соответствующие грани находятся в одном поясе Z .*

4.3 Симметрические Π -зонотопы и их представление

Рассмотрим два $(d - 1)$ -мерных множества векторов V_1 и V_2 в \mathbb{R}^d из $d - 1$ вектора каждое. Мы будем называть эти множества *сопряженными* если для любых векторов $\mathbf{e}_1 \in V_1$ и $\mathbf{e}_2 \in V_2$ выполнено $\dim\{\mathbf{e}_1 \cup V_2\} = \dim\{\mathbf{e}_2 \cup V_1\} = d$. Соответствующий зонотоп $Z(V_1 \cup V_2)$ называется *симметрическим* зонотопом.

Лемма 4.7. Если $\xi_{\Pi}(d)$ обозначает максимальный поясной диаметр d -мерного симметрического Π -зонотопа, то поясной диаметр любого d -мерного Π -зонотопа не превосходит $\max_{1 \leq i \leq d} \xi_{\Pi}(i)$. Более того, этот максимум будет достигаться на сопряженных гранях Π -зонотопа.

Далее мы опишем некоторые свойства графов с $d+1$ вершиной, представляющих d -мерные Π -зонотопы. Мы будем считать, что сопряженные грани окрашены в красный и синий цвета так же как и соответствующие множества ребер графов V_R и V_B соответственно.

Лемма 4.8. Оба графа $G_R(Z)$ и $G_B(Z)$ являются лесами с двумя деревьями каждый и для любого синего ребра e_b и любого красного ребра e_r графы $G_R \cup \{e_b\}$ и $G_B \cup \{e_r\}$ являются деревьями, то есть любое красное ребро соединяет вершины из разных синих компонент, а любое синее ребро соединяет вершины из разных красных компонент.

Следствие 4.9. В графе G не существует цикла, в котором не более одного красного или не более одного синего ребра.

Следствие 4.10. Две вершины из одной красной (синей) компоненты связности лежат в одной синей (красной) компоненте в том и только том случае, когда расстояние между ним в красном (синем) подграфе четно.

Множества вершин в красных и синих деревьях в дальнейшем будут обозначаться как R_1, R_2 и B_1, B_2 соответственно.

Лемма 4.11. Если красная компонента связности R_1 состоит из одной вершины r , то синий подграф также содержит изолированную вершину b и все красные ребра соединяют b с оставшейся $d-1$ вершиной G_Z кроме r , а все синие ребра соединяют r со всеми остальными вершинами кроме b .

4.4 Поясные диаметры Π -зонотопов

Лемма 4.12. В условиях леммы 4.11 поясное расстояние между синей и красной гипергранями зонотопа Z равно 2.

Лемма 4.13. Поясное расстояние между красной и синей гипергранями Π -зонотопа $Z(V_R \cup V_B)$ равно 2 если и только если найдется вершина A , которая является листом в обоих красном и синем подграфах G_R и G_B .

Теорема 4.14. Поясное расстояние между синей и красной гипергранями d -мерного симметрического Π -зонотопа не более 2 если $d \leq 6$ или $d = 8$ и не более 3 в остальных случаях. Данные оценки являются точными. То есть, в обозначениях леммы 4.7

$$\xi_{\Pi}(d) = \begin{cases} 2, & \text{если } d \leq 6 \text{ или } d = 8, \\ 3, & \text{если } d = 7 \text{ или } d \geq 9. \end{cases}$$

Теорема 4.15. Максимальный поясной диаметр d -мерного Π -зонотопа не превосходит 2 если $d \leq 6$ и не превосходит 3 если $d \geq 7$, данные оценки являются точными в любой размерности.

Также установлена связь между поясным диаметром параллелоэдра и его комбинаторным диаметром, то есть диаметром реберного остова дуального многогранника.

Теорема 4.16. *Если поясной диаметр d -мерного параллелоэдра P равен k , то его поясной диаметр не превосходит $k + 1$.*

Следствие 4.17. *Комбинаторный диаметр d -мерного Π -зонотопа не превосходит 3 при $d \leq 6$ и не превосходит 4 при $d \geq 7$.*

5 Совершенные призмoids

В 1989 году Дж.Калаи сформулировал гипотезу об оценке числа граней выпуклого центрально-симметричного многогранника, известную как “ 3^d - гипотеза”.

Гипотеза. *У любого центрально-симметричного d -многогранника P число всех непустых граней, включая сам многогранник, не меньше 3^d .*

В случае $d \leq 3$ доказательство гипотезы хорошо известно. Для $d = 4$ гипотеза была доказана в 2007 г. Г.Циглером, Р.Санялом и А.Вернером в [17]. Верна ли 3^d -гипотеза при $d \geq 5$ неизвестно.

Нижняя оценка 3^d является точной и достигается, например, на классе многогранников Ханнера. Существуют ли другие многогранники, у которых ровно 3^d граней, неизвестно.

Для того, чтобы определить класс многогранников Ханнера, необходимы понятия прямого произведения и кросса двух многогранников.

Определение. Пусть \mathbb{R}^{d_1} и \mathbb{R}^{d_2} – трансверсальные подпространства в $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$, то есть $\mathbb{R}^{d_1} \cap \mathbb{R}^{d_2} = \{O\}$. Рассмотрим центрально-симметричные d_1 -мерный многогранник $P_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ и d_2 -мерный многогранник $P_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$ такие, что O – их общий центр симметрии. Тогда $P = \text{conv}\{P_1, P_2\}$ называется кроссом P_1 и P_2 .

Определение. *Многогранники Ханнера.* Любой отрезок считается одномерным многогранником Ханнера, пусть $d \geq 2$, тогда d -мерный многогранник является многогранником Ханнера, если его можно представить, как прямое произведение или как кросс двух многогранников Ханнера меньшей размерности

Грани центрально-симметричного многогранника, симметричные друг другу относительно центра симметрии, будем называть *антиподальными*.

Определим некоторые другие важные классы центрально-симметричных многогранников.

Определение. Выпуклый d -мерный многогранник P называется *призмoidом*, если все его вершины содержатся в паре параллельных $(d - 1)$ -мерных плоскостей.

Любой d -мерный призмoid P есть выпуклая оболочка $\text{conv}(F \cup F')$ двух многогранников F и F' , каждый из которых лежит в одной из двух параллельных гиперплоскостей. При этом размерности $\dim F$ и $\dim F'$ не превышают $d - 1$, но $\dim \text{conv}(F \cup F') = d$.

Рассмотрим центрально-симметричный многогранник P и его гипергрань F . Будем называть P *призмойдом над F* , если $P = \text{conv}(F \cup F')$, где F' – антиподальная к F . *Боковыми гранями* будем называть все грани, не содержащиеся полностью ни в F , ни в F' .

Определение. Центрально-симметричный выпуклый многогранник P называется *совершенным призмойдом*, если он является призмойдом над любой своей гипергранью, то есть для любых его антиподальных гиперграней F и F' выполняется $P = \text{conv}(F \cup F')$.

Замечание. Это определение эквивалентно тому, что любая пара антиподальных гиперграней содержит все вершины многогранника P .

Для изучения призмойдов важно знать комбинаторную структуру его граней. Для этого докажем теорему, которая описывает боковые грани призмойда через его основание.

Теорема 5.1 (Структура боковых граней центрально-симметричного призмойда). Пусть P – призмойдом над своей гипергранью F , то есть $P = \text{conv}(F \cup F')$, где F и F' – антиподальные гипергранни. Пусть Q_i и Q'_i – грани F , которые можно заключить в параллельные опорные плоскости к F . Пусть Q'_i грань P , антиподальная Q''_i . Тогда для любой пары Q_i, Q'_i , построенной указанным образом, $\text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$ является гранью P , и любая собственная грань P , не принадлежащая F и F' , может быть представлена как $\text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$.

Доказательство. Необходимость. Докажем, что любая собственная грань P , не принадлежащая F и F' , может быть представлена как $\text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$.

Рассмотрим какую-то собственную грань R многогранника P , которая полностью не содержится ни в F , ни в F' . Тогда, так как все вершины многогранника принадлежат F и F' , грань R пересекается с F и F' по некоторым граням Q_i и Q'_i . Рассмотрим опорную гиперплоскость \mathcal{L} многогранника P , которая пересекает его по R . Пусть \mathcal{L} пересекает гиперплоскость грани F по $(d - 2)$ -мерной плоскости \mathcal{L}_1 , а гиперплоскость грани F' по $(d - 2)$ -мерной плоскости \mathcal{L}_2 . Тогда \mathcal{L}_1 – опорная гиперплоскость F , пересекающая его по Q_i , а \mathcal{L}_2 – опорная гиперплоскость F' , пересекающая его по Q'_i . При этом \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 параллельны, так как получены пересечением гиперплоскостью пары параллельных гиперплоскостей. При симметрии относительно центра многогранника P гипергранни F и F' переходят друг в друга, соответственно Q'_i и \mathcal{L}_2 перейдут в некоторую грань Q''_i многогранника F и его опорную гиперплоскость \mathcal{L}_3 . Из транзитивности параллельности следует, что \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_3 параллельны. Следовательно, Q_i и Q'_i такие, как требует условие, а так как все вершины R являются вершинами Q_i и Q'_i , поскольку в P нет вершин вне F и F' , получаем, что $R = \text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Докажем, что $\text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$ является гранью P . Рассмотрим параллельные опорные гиперплоскости \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_3 к многограннику F , которые пересекают его по Q_i и Q''_i . Также рассмотрим опорную гиперплоскость \mathcal{L}_2 к F' , содержащую Q'_i . Из симметрии и транзитивности получаем, что \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 – параллельные $(d - 2)$ -мерные плоскости. Следовательно, существует $(d - 1)$ -мерная плоскость \mathcal{L} , которая их содержит. Заметим, что \mathcal{L} является опорной к многограннику P , следовательно пересекает его по некоторой грани R . Все вершины

P , содержащиеся в \mathcal{L} , являются вершинами Q_i или Q'_i . Следовательно, $R = \text{conv}(Q_i \cup Q'_i)$. Достаточность доказана. \square

Исследуем связь совершенных призмoids и многогранников Ханнера. Докажем, что оба этих класса замкнуты относительно операций взятия дуального, прямого произведения и кросс-операции, при этом класс совершенных призмoids содержит класс многогранников Ханнера, но не совпадает с ним.

Теорема 5.2. *Для любого d -мерного совершенного призмoида существует аффинно эквивалентный ему $(0,1)$ -многогранник, то есть многогранник множество вершин которого является подмножеством множества вершин d -мерного единичного куба.*

Доказательство. Выберем $2d$ гиперплоскостей следующим образом: возьмем d линейно независимых гиперграней, которые пересекаются по вершине призмoида, и антиподальные к ним. Выбранные гиперплоскости образуют d -мерный параллелепипед. Докажем, что вершиной призмoида может быть только какая-то из вершин параллелепипеда. Рассмотрим произвольную вершину призмoида v . Покажем, что она также является вершиной параллелепипеда. Из выбранных $2d$ гиперплоскостей любая пара параллельных содержит вершину v . Поэтому v лежит в каких-то d линейно независимых гиперплоскостях, следовательно v – вершина параллелепипеда. Таким образом множество вершин совершенного призмoида является подмножеством вершин некоторого d -мерного параллелепипеда. А любой параллелепипед является аффинно эквивалентным единичному кубу. \square

Теорема 5.3. *Класс совершенных призмoидов замкнут относительно прямого произведения, кросс-операции и взятия дуального.*

Доказательство. Докажем, что для любых совершенных призмoидов P_1 и P_2 многогранник $P = P_1 \times P_2$ является совершенным призмoидом. Рассмотрим любую гипергрань F многогранника P , тогда $F = F_1 \times P_2$ или $F = P_1 \times F_2$, где F_1 и F_2 – какие-то гиперграницы многогранников P_1 и P_2 . Без ограничения общности можно считать, что выполняется первая возможность. Пусть F' – гипергрань P , антиподальная F , F'_1 – гипергрань P_1 , антиподальная F_1 . Многогранники P_1 является совершенными призмoидом, следовательно все вершины P_1 содержатся в F_1 и F'_1 . Вершины P – это прямое произведение всех вершин P_1 и P_2 , вершины F – это прямое произведение вершин F_1 и P_2 , вершины F' – это прямое произведение вершин F'_1 и P_2 . Следовательно, все вершины P содержатся в F и F' .

Докажем, что для любых совершенных призмoидов P_1 и P_2 многогранник $P = \text{cross}(P_1, P_2)$ является совершенным призмoидом. Любая гипергрань F многогранника P является выпуклой оболочкой каких-то гиперграней F_1 и F_2 многогранников P_1 и P_2 . Пусть F' – гипергрань P , антиподальная F , F'_1 и F'_2 – гиперграницы P_1 и P_2 , антиподальные F_1 и F_2 . Многогранники P_1 и P_2 являются совершенными призмoидами, следовательно все вершины P_1 содержатся в F_1 и F'_1 , все вершины P_2 содержатся в F_2 и F'_2 . Вершины P – это объединение вершин P_1 и P_2 , вершины F – это объединение вершин F_1 и F_2 , вершины F' – это объединение вершин F'_1 и F'_2 . Следовательно, все вершины P содержатся в F и F' .

Докажем, что если P является совершенным призмoидом, то и многогранник, дуальный P , является совершенным призмoидом. Заметим, что определение совершенного призмoида эквивалентно следующему:

Для любой вершины v и любых параллельных гиперграней F и F' выполнено либо $v \in F$, либо $v \in F'$, то есть любая пара антиподальных вершин содержится в каждой паре антиподальных гиперграней.

Если в многограннике любая пара антиподальных гиперграней содержит все вершины, то в дуальном для любой пары антиподальных вершин каждая гипергрань будет содержать одну из этих вершин. Соответственно, дуальный многогранник к совершенному призмюиду является совершенным призмюидом. \square

Из теоремы 5.3 вытекает важное следствие:

Теорема 5.4. *Любой многогранник Ханнера является совершенным призмюидом.*

Доказательство. В одномерном случае утверждение очевидно, так как любой отрезок является и совершенным призмюидом, и многогранником Ханнера. Пусть утверждение верно для всех многогранников Ханнера размерностей $1, 2, \dots, d$. Докажем, что для $(d + 1)$ -мерных многогранников Ханнера утверждение тоже верно. По определению любой многогранник Ханнера есть прямое произведение или кросс многогранников Ханнера меньшей размерности, которые по предположению индукции являются совершенными призмюидами. По теореме 5.3 прямое произведение и кросс совершенных призмюидов также является совершенным призмюидом, следовательно любой $(d + 1)$ -мерный многогранник Ханнера есть совершенный призмюид. \square

Список литературы

- [1] Е. С. Федоров, Начала учения о фигурах, Санкт-Петербург, 1885
- [2] Н. Minkowski, Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder, Nach. Ges. Wiss., Göttingen, 1897, 198–219
- [3] Б. А. Венков, Об одном классе эвклидовых многогранников, Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954, 9, 11–31
- [4] Р. McMullen, Convex bodies which tile space by translation, Mathematika, 27, 1980, 113–121
- [5] N. P. Dolbilin, The extension theorem, Discrete mathematics, 221, No 1–3, 2000, 43–60
- [6] Н. П. Долбилин, В. С. Макаров, Теорема о продолжении в теории правильных разбиений и ее приложения, Труды МИАН, 239, 2002, 146–169
- [7] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus á la theorie des formes quadratiques, II Mémoire: Recherches sur les paralléloédres primitifs, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 136, 1909, 67–179
- [8] Г. Ф. Вороной, Новые приложения непрерывных параметров к теории квадратичных форм. Мемуар второй: Исследования о примитивных параллелоэдрах, Собрание сочинений, 2, 1952, 239–368

- [9] O. K. Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Woronoi, *Zh. Leningr. fiz.-mat. Obshch.*, 2, 1929, 131–151
- [10] R. Erdahl, Zonotopes, Dicings, and Voronoi’s Conjecture on Parallelehedra, *European Journal of Combinatorics*, 20(6), 1999, 527–549
- [11] A. Ordine, Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case, Queen’s University, Kingston, 2005
- [12] L. Michel, S. S. Ryshkov, M. Senechal, An extension of Voronoi’s Theorem on Primitive Parallelotopes, *European Journal of Combinatorics*, 1995, 16, 59–63
- [13] N. Dolbilin, J.-I. Itoh, C. Nara, Affine Equivalent Classes of Parallelehedra (в печати), 2011
- [14] Н. П. Долбилин, Свойства граней параллелоэдров, *Труды МИАН*, 266, 2009, 112–126
- [15] G. C. Shephard, Polytopes with centrally symmetric faces, *Canadian Journal of Mathematics*, 19, 1967, 1206–1213
- [16] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New-York, 1995, 2006
- [17] R. Sanyal, A. Werner, G. M. Ziegler, On Kalai’s conjectures concerning centrally symmetric polytopes, *Discrete Comput. Geometry* 41 (2009), 183 – 198.
- [18] Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова, Теория стереоэдров, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его семидесятилетию, *Тр. МИАН СССР*, 64 (1961), 28 – 51.
- [19] L. Danzer, B. Grünbaum, Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körpern von P. Erdős und von V. L. Klee, *Math. Z.*, 79 (1962), 95 – 99.
- [20] P. McMullen, Space tiling zonotopes, *Mathematika*, Vol. 22, 1975, pp 202-211.
- [21] A. Garber, Belt diameter of zonotopes obtained from permutahedron by deleting zone vectors, preprint, 2011, <http://arxiv.org/abs/1111.2932>.
- [22] А. Гарбер, А. Поярков, О перестановочных многогранниках, *Вестник МГУ*, сер. 1, 2006, N 2, сс. 3-8.

Раздел 4.

Исследование комбинаторных свойств разбиений евклидова пространства на параллелоэдры

В данном разделе нами проведено исследование комбинаторных свойств разбиений евклидова пространства на параллелоэдры. Найдены все возможные 5 типов схождения параллелоэдров в гранях коразмерности 3, установлены дополнительные геометрические свойства этих схождений. Получено ограничение сверху на число параллелоэдров, сходящихся в грани фиксированной коразмерности.

Параллелоэдром называется такой выпуклый многогранник в \mathbb{R}^d , что некоторое семейство его параллельных переносов образует нормальное, т.е. грань-в-грань, разбиение T пространства \mathbb{R}^d . Впервые термин «параллелоэдр» использовал Е. С. Фёдоров в работе [1].

Г. Минковский (см. [2]) в 1897 году установил следующие фундаментальные свойства параллелоэдров.

1. Любой параллелоэдр имеет центр симметрии.
2. Любая гипергрань параллелоэдра имеет центр симметрии.
3. Определим *поясок* как последовательность гиперграней F_1, F_2, \dots, F_n параллелоэдра такую, что $F_i \cap F_{i+1}$ — $(d-2)$ -мерная грань, и грань $F_{i-1} \cap F_i$ симметрична грани $F_i \cap F_{i+1}$ относительно центра F_i при $i = 1, 2, \dots, n$ (по определению, полагается $F_0 = F_n$ и $F_{n+1} = F_1$). Тогда любой поясок параллелоэдра состоит либо из 4, либо из 6 граней.

Как показал Б. А. Венков в работе [3], любой многогранник, обладающий этими свойствами, является параллелоэдром.

Важнейшей открытой проблемой теории параллелоэдров является гипотеза Г. Ф. Вороного.

Гипотеза. *Любой d -мерный параллелоэдр аффинно изоморфен области Дирихле-Вороного для некоторой d -мерной решетки.*

В общем случае эта гипотеза по настоящее время остаётся недоказанной. Сам Вороной (см. [4]) доказал её для случая *примитивного* параллелоэдра, т.е. такого, что в каждой вершине соответствующего разбиения T сходится ровно $d+1$ ячейка.

В 1929 году О. К. Житомирский в работе [5] усилил этот результат, доказав гипотезу Вороного для параллелоэдров, образующих такие разбиения, что в каждой $(d-2)$ -мерной грани разбиения сходится ровно 3 ячейки. Данная работа существенно использует результат [6] Б. Н. Делоне того же года о классификации схождений параллелоэдров в $(d-3)$ -мерных гранях.

Пусть F — некоторая фиксированная $(d - k)$ -мерная грань T . Рассмотрим k -мерную плоскость, трансверсально пересекающую грань F в некоторой её внутренней точке. Сечение T этой плоскостью локально устроено как полный конический веер, состоящий из полиэдральных конусов. Комбинаторное строение полученного веера не зависит от выбора сечения. Данный (комбинаторный) веер $W(F)$ и называется *схождением* параллелоэдров в грани F .

В дальнейшем в диссертации А. Ордина [7] был намечен путь исследований по гипотезе Вороного, связанный с классификацией схождений параллелоэдров в гранях заданной коразмерности.

Схождения параллелоэдров в гранях можно изучать с помощью описанной ниже конструкции. Пусть K — подиэдральный комплекс, образованный разбиением T . Через K' обозначим барицентрическое подразделение K . Очевидно, что

$$v(K') = \{c(F) \mid F \in K\},$$

где $c(F)$ обозначает барицентр грани F .

Для каждой грани $F \in K$ положим

$$F^\Delta = \bigcup_{F_1 \supset F} \text{conv} \{c(F_2) \mid F \subseteq F_2 \subseteq F_1\}.$$

Несложно проверить, что F^Δ — конечный полиэдр.

Лемма 1. Пусть $F \in K$, и $\dim F = d - k$. Тогда F^Δ PL-гомеоморфно шару B^k .

Действительно, пусть π — проекция в направлении $\text{lin } F$ на трансверсальную плоскость. Тогда легко видеть, что $\pi|_{F^\Delta}$ — PL-гомеоморфизм. Кроме того, $\pi(F^\Delta)$ — ограниченное звездное k -мерное множество, все точки границы которого видны из точки $\pi(F)$. Следовательно, $\pi(F^\Delta)$ гомеоморфно B^k при помощи, например, радиального гомеоморфизма (см. [8]). \square

Пусть $M(F_1, F_2)$ — множество всех таких граней $F \in K$, что $F \supset F_1 \cup F_2$. Если $M(F_1, F_2)$ пусто, то выполняется утверждение 1.

Минимальный элемент множества $M(F_1, F_2)$, если он существует, обозначим $\Phi(F_1, F_2)$. Несложно доказать, что в таком случае выбор $\Phi(F_1, F_2)$ определен однозначно. Если же $M(F_1, F_2) = \emptyset$, то функцию $\Phi(F_1, F_2)$ будем считать неопределенной.

Лемма 2. Если $\Phi(F_1, F_2)$ определена, то

$$F_1^\Delta \cap F_2^\Delta = (\Phi(F_1, F_2))^\Delta.$$

Иначе $F_1^\Delta \cap F_2^\Delta = \emptyset$.

Утверждение леммы легко выводится из определения операции $(\cdot)^\Delta$ и того факта, что K' образует симплициальное разбиение \mathbb{R}^d . \square

Таким образом, совокупность $F^\Delta \mid F \in K$ образует клеточный комплекс. Обозначим его K^Δ .

Лемма 3. Для каждой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует ровно одна клетка $F^\Delta \in K^\Delta$, для которой $x \in \text{rel int } F^\Delta$.

Поскольку K' образует симплициальное разбиение \mathbb{R}^d , можно взять максимальный симплекс $\sigma \in K'$, для которого $x \in \text{relint } \sigma$. Из свойств барицентрического подразделения следует, что

$$\sigma = \text{conv} \{c(F_0), c(F_1), \dots, c(F_d)\},$$

причем $\dim F_i = i$ и $F_i \subset F_{i+1}$.

Кроме того, существует единственный минимальный симплекс $\sigma_{\min} \in K'$, для которого $x \in \sigma_{\min}$. Очевидно, $\sigma_{\min} \subset \sigma$, следовательно,

$$\sigma_{\min} = \text{conv} \{c(F_{i_1}), c(F_{i_2}), \dots, c(F_{i_m})\}, \quad \text{где } i_1 < i_2 < \dots < i_m.$$

Несложно проверить, что единственная клетка комплекса K^Δ , содержащая x в относительной внутренней — это $F_{i_1}^\Delta$. \square

Таким образом, K^Δ образует клеточное разбиение пространства \mathbb{R}^d . В случае, если d -мерные грани K являются параллелоэдрами Вороного, то K^Δ изоморфно двойственному разбиению Делоне. Неизвестно, однако, всегда ли K^Δ изоморфно какому-либо полиэдральному комплексу (в частности, может случиться, что граница какой-либо клетки не будет полиэдральной сферой).

Клетку F^Δ вместе с клеточной структурой ее границы будем называть *абстрактной дуальной гранью* к F и обозначать полученный клеточный комплекс через F° .

Нетрудно показать, что между конусами веера схождения в грани $W(F)$ и клетками F° имеется отношение двойственности, т.е. биекция, обращающая отношение включения.

Рассмотрим для грани $F \in K$ можно также рассмотреть множество

$$F^* = \text{conv} \{c(P) \mid P \in K, \dim P = d \text{ и } F \subset P\}.$$

F^* назовем *геометрической дуальной гранью* к F .

Если рассматривается разбиение на параллелоэдры Вороного, то F^* — соответствующая дуальная грань разбиения Делоне. Для произвольных параллелоэдров неизвестно, задает ли совокупность дуальных граней полиэдральный комплекс. Неизвестно даже, верно ли равенство

$$\dim F^* = d - \dim F,$$

которое в случае параллелоэдров Вороного, безусловно, выполняется.

Очевидно, что множество $\Lambda = \{c(P) \mid P \in K \text{ и } \dim P = d\}$ является решеткой. Через $\Lambda(F)$ обозначим минимальную решетку, содержащую множество

$$\{c(P) \mid P \in K, \dim P = d \text{ и } F \subset P\}.$$

В рамках описанного подхода получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть $F \in K$ и $\dim F = d - 3$. Тогда

1. Абстрактная дуальная грань F° комбинаторно изоморфна одному из пяти многогранников: тетраэдру, пирамиде над четырехугольником, октаэдру, треугольной призме или кубу.

2. F° комбинаторно изоморфна F^* .

3. $\Lambda \cap \text{aff } \Lambda(F) = \Lambda(F)$.

Замечание 1. Первый пункт Теоремы 1 является переформулировкой теоремы Б. Н. Делоне о схождениях параллелоэдров в $(d - 3)$ -мерных гранях (см. [6]).

Схема доказательства. Рассуждение основано на понятии стандартной грани комплекса K , введенном Н. П. Долбилиным в работе [9]. Грань $F \in K$ называется *стандартной*, если она обладает центральной симметрией, и ее центр $c(F)$ является также центром симметрии T . Известно, что грань F является стандартной тогда и только тогда, когда существуют такие ячейки P_1 и P_2 разбиения T , что $F = P_1 \cap P_2$.

Теперь рассмотрим множество ячеек K , сходящихся в фиксированной грани $F^{d-3} \in K$. Для любых двух ячеек $P_1, P_2 \supset F^{d-3}$ имеется стандартная грань $P_1 \cap P_2 \supset F^{d-3}$. Далее рассматриваем 2 случая.

Случай 1. F^{d-3} не является стандартной. Тогда каждая пара ячеек $P_1, P_2 \supset F^{d-3}$ удовлетворяет неравенству

$$\dim (P_1 \cap P_2)^\Delta \leq 2.$$

Это означает, что в двумерном комплексе $(F^{d-3})^\circ$ любая пара вершин содержится в некоторой общей гиперграни. Из [2] немедленно следует, что все гиперграни $(F^{d-3})^\circ$ суть треугольники или четырехугольники. Это делает возможным применение формулы Эйлера, из которой следует оценка

$$f_0((F^{d-3})^\circ) \leq 6.$$

Случай 2. F^{d-3} является стандартной. Тогда пара ячеек $P_1, P_2 \supset F^{d-3}$ не удовлетворяет неравенству

$$\dim (P_1 \cap P_2)^\Delta \leq 2$$

в том и только в том случае, если P_1 и P_2 центрально симметричны друг другу относительно $c(F^{d-3})$.

Это означает, что в двумерном комплексе $(F^{d-3})^\circ$ вершины разбиваются на пары, и две вершины содержатся в некоторой общей гиперграни тогда и только тогда, когда они не из одной пары.

Аналогично случаю 1, можно воспользоваться формулой Эйлера, дающей оценку

$$f_0((F^{d-3})^\circ) \leq 8.$$

Дальнейшее рассмотрение случаев 1 и 2 сводится к изучению комплексов, гомеоморфных S^2 , не более чем на 6 и 8 вершинах соответственно. Перебор таких комплексов несложен, и завершает доказательство пункта 1.

Пункты 2 и 3 Теоремы 1 выводятся из пункта 1 с помощью несложных геометрических рассуждений. □

Теорема 2. Для каждой грани $F \in K$ коразмерности k (т.е. $\dim F = d - k$) выполняется неравенство

$$f_0(F^\circ) \leq 2^k. \tag{1}$$

Идея доказательства. Сформулируем ключевое утверждение для доказательства Теоремы 2.

Пусть $F_0 = F^{d-k}$ — фиксированная грань K , пусть P_0, P_1, \dots, P_m — все параллелепедры, сходящиеся в F_0 . Для $i = 1, 2, \dots, m$ через t_i обозначим такой параллельный перенос, что $P_0 + t_i = P_i$. Легко видеть, что $F_i = F_0 - t_i$ — грань параллелепедра P_0 .

Дальнейшее рассуждение основывается на том факте, что для любой пары различных $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ через F_i и F_j можно провести пару параллельных гиперплоскостей, заключающих между собой P_0 . Это позволяет применить технику из работы [11].

□

Замечание 2. В предположении $\dim F^* = k$, неравенство (1) легко доказывается при помощи техники Делоне – Сандаковой (см. [10]). Поскольку для случая произвольного параллелепедра размерность F^* установить не удастся, доказательство Теоремы 2 основано на идеях, примененных в работе [11].

Замечание 3. Из Теоремы 2 сразу следует, что при фиксированном k существует лишь конечное число различных комбинаторных типов k -мерных абстрактных дуальных граней.

Список литературы

- [1] Е. С. Федоров, Начала учения о фигурах, Санкт-Петербург, 1885.
- [2] H. Minkowski, Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder, Gött. Nachr., 1897, 198–219.
- [3] Б. А. Венков, Об одном классе эвклидовых многогранников, Вест. Лен. Унив., сер. мат., физ., хим., 9 (1954), 11–31.
- [4] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire. Recherches sur les paralléloèdres primitifs, J. für Math., 136 (1909), 67–178.
- [5] О. К. Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Voronoi, Журнал ЛМО, 2 (1929), 131–151.
- [6] Б. Н. Делоне, Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions, Изв. Акад. наук СССР. VII серия. Отд. физ.-мат. наук, 1 – 2 (1929), 79 – 100, 147 – 164.
- [7] A. Ordine, Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case, Ph.D. Thesis, Queen's University, Ontario, 2005.
- [8] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, Introduction to Piecewise Linear Topology, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1972.
- [9] Н. П. Долбилин, Свойства граней параллелоэдров, Тр. МИАН, 266 (2009), 112 – 126.
- [10] Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова, Теория стереоэдров, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР, 64 (1961), 28 – 51.
- [11] L. Danzer, B. Grünbaum, Über zwei Probleme bezüglich konvexer Körpern von P. Erdős und von V. L. Klee, Math. Z., 79 (1962), 95 – 99.

Раздел 5.

Коммутативные кольца дифференциальных операторов и топологическая структура гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий

В данном направлении исследований получены следующие результаты:

Найдены достаточные условия на спектральные данные для самосопряженности оператора четвертого порядка, входящего в коммутативное кольцо обыкновенных дифференциальных операторов ранга 2. Доказано, что эти условия являются необходимыми в случае спектральных кривых родов 2,3,4. Найдены коммутирующие операторы ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, отвечающие спектральным кривым произвольного рода. Эти операторы задают коммутативные подалгебры алгебры Вейля A_1 .

Найден индекс n -кратного самопересечения "бесконечно удаленного" дивизора спектрального многообразия коммутативного кольца дифференциальных операторов в частных производных.

Доказано, что в эллиптической области полиномиальные интегралы по импульсам третьей и четвертой степени геодезического потока на двумерном торе сводятся к интегралам первой или второй степени.

Доказано, что система квазилинейных уравнений, эквивалентная существованию полиномиального интеграла по импульсам магнитного геодезического потока на двумерном торе, является полугамильтоновой.

Исследована топологическая структура гамильтоново минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^n , связанных с пересечением вещественных квадрик.

1. Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы и коммутативные подалгебры алгебры Вейля A_1 .

Условие коммутации дифференциальных операторов

$$L_1 = \partial_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} u_i(x) \partial_x^i, \quad L_2 = \partial_x^m + \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x) \partial_x^i,$$

эквивалентно системе нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты $u_i(x), v_i(x)$. Имеет место

Лемма (Бурхналл, Чаунди) Если $L_1 L_2 = L_2 L_1$, то существует нетривиальный полином $R(z, w)$, такой, что $R(L_1, L_2) = 0$.

Рассмотрим совместную собственную функцию ψ коммутирующих операторов L_1 и L_2 :

$$L_1\psi = z\psi, \quad L_2\psi = w\psi.$$

Собственные числа z и w не могут быть произвольными, они удовлетворяют алгебраическому уравнению $R(z, w) = 0$. *Спектральной кривой* называется алгебраическая кривая, заданная уравнением $R(z, w) = 0$:

$$\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, Q(z, w) = 0\} \subset \mathbb{C}^2.$$

Ниже под спектральной кривой мы будем понимать гладкое пополнение Γ . Таким образом спектральная кривая параметризует совместные собственные функции операторов L_1 и L_2 . Функция $\psi(x, P), P \in \Gamma$ называется функцией Бейкера–Ахиезера. Рангом l пары L_1 и L_2 называется размерность пространства совместных собственных функций при фиксированных z и w . Эти числа совпадают для общих точек $P = (z, w) \in \Gamma$.

При $l = 1$ в случае гладкой спектральной кривой функция ψ выражается через тэта-функцию многообразия Якоби кривой Γ по формуле И.М. Кричевера, при этом коэффициенты операторов восстанавливаются по ψ .

В случае операторов ранга $l > 1$ вектор-функция Бейкера–Ахиезера $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{l-1})$ отвечает следующим спектральным данным (И.М. Кричевер)

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, \alpha, \omega(x)\},$$

где q — выделенная точка на Γ , k^{-1} — локальный параметр на Γ в окрестности q , $k^{-1}(q) = 0$, $\omega(x) = (\omega_0(x), \dots, \omega_{l-1}(x))$ — произвольный набор гладких функций, (γ, α) — параметры Тюринга, γ — набор точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg} \in \Gamma$, α — набор векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_{lg}$, $\alpha_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{li})$. Параметры Тюринга определяют стабильное голоморфное векторное расслоение на Γ ранга l степени lg вместе с голоморфными сечениями η_1, \dots, η_l , которые линейно зависимы в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$:

$$\eta_l(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_{ij} \eta_j(\gamma_i).$$

Вектор-функция Бейкера–Ахиезера обладает следующими свойствами:

1. в окрестности точки q функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, P)$ имеет следующее разложение

$$\psi(x, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) k^{-s} \right) \Psi_0(x, k),$$

где $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$, матрица Ψ_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Psi_0}{dx} = A\Psi_0, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k + \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{l-1} \end{pmatrix},$$

2. на $\Gamma \setminus \{q\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{lg}$, причем должны выполняться следующие соотношения на вычеты

$$\text{Res}_{\gamma_i} \psi_j = \alpha_{ij} \text{Res}_{\gamma_i} \psi_{l-1}.$$

Для спектральных данных в общем положении функция Бейкера–Ахиезера существует и единственна.

Для произвольной рациональной функции $f(P)$ на Γ с единственным полюсом порядка n в точке q существует единственный линейный дифференциальный оператор $L(f)$ порядка ln такой, что

$$L(f)\psi(x, P) = f(P)\psi(x, P).$$

Для любых двух рациональных функции $f(P)$ и $g(P)$ с полюсом в q , операторы $L(f)$ и $L(g)$ коммутируют. Основной трудностью при построении коммутирующих дифференциальных операторов ранга l является то, что функцию Бейкера–Ахиезера нельзя найти в явном виде. Тем не менее сами операторы можно находить методом деформации параметров Тюринга (метод Кричевера–Новикова), который также применим к задаче построения решений высокого ранга уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Он заключается в следующем. Введем функции $\chi_0(x, P), \dots, \chi_{l-1}(x, P)$ из равенства

$$\psi^{(l)}(x, P) = \chi_0(x, P)\psi(x, P) + \dots + \chi_{l-1}(x, P)\psi^{(l-1)}(x, P).$$

В отличие от функции Бейкера–Ахиезера, функции χ_i рациональны на Γ , они имеют простые полюса в точках $P_1(x), \dots, P_{lg}(x)$, χ_0 имеет также простой полюс в точке q . Коэффициенты разложений в ряд Лорана функций χ_i в точках $P_i(x)$ удовлетворяют нелинейным уравнениям специального вида. Коэффициенты операторов находятся по χ_i . Методом деформации параметров Тюринга И.М. Кричевер и С.П. Новиков нашли все операторы ранга 2, отвечающие эллиптическим спектральным кривым.

Теорема (Кричевер, Новиков) При $l = 2, g = 1$ оператор, отвечающий \wp -функции Вейерштрасса, имеет вид

$$L_{KN} = (\partial_x^2 + u)^2 + 2c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1))\partial_x + (c_x(\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)))_x - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1),$$

$$\gamma_1(x) = \gamma_0 + c(x), \quad \gamma_2(x) = \gamma_0 - c(x),$$

$$u(x) = -\frac{1}{4c_x^2} + \frac{1}{2} \frac{c_{xx}^2}{c_x^2} + 2\Phi(\gamma_1, \gamma_2)c_x - \frac{c_{xxx}}{2c_x} + c_x^2(\Phi_c(\gamma_0 + c, \gamma_0 - c) - \Phi^2(\gamma_1, \gamma_2)),$$

$$\Phi(\gamma_1, \gamma_2) = \zeta(\gamma_2 - \gamma_1) + \zeta(\gamma_1) - \zeta(\gamma_2),$$

$c(x)$ — произвольная гладкая функция, γ_0 — некоторое число.

Оператор \tilde{L}_{KN} , коммутирующий с L_{KN} находится из равенства

$$\tilde{L}_{KN}^2 = P(L_{KN}) = 4L_{KN}^3 + g_2L_{KN} + g_3.$$

Диксмье нашел примеры коммутативных подалгебр алгебры Вейля A_1 . Алгебра Вейля A_1 над полем k характеристики ноль задается двумя порождающими p, q и одним соотношением

$$[p, q] = 1.$$

Справедлива

Теорема (Диксмье) В A_1 существует максимальная коммутативная подалгебра D_1 , поле частных которой не является чисто трансцендентным расширением поля k : элементы

$$X = (p^3 + q^2 + h)^2 + 2p, \quad Y = (p^3 + q^2 + h)^3 + \frac{3}{2} (p(p^3 + q^2 + h) + (p^3 + q^2 + h)p)$$

коммутируют, $h \in k$, при этом

$$Y^3 = X^2 - h.$$

Алгебру Вейля над \mathbb{C} можно рассматривать как кольцо дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами:

$$p = x, \quad q = \partial_x.$$

Подалгебра Диксмье задается двумя коммутирующими операторами с полиномиальными коэффициентами

$$L_D = \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^3 + h \right)^2 + 2x,$$

$$\tilde{L}_D = \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^3 + h \right)^3 + \frac{3}{2} \left(x \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^3 + h \right) + \left(\frac{d^2}{dx^2} + x^3 + h \right) x \right).$$

При этом

$$L_D^3 = \tilde{L}_D^2 - h.$$

Отметим, что $\text{Spec} D_1$ — эллиптическая кривая.

Возникает естественный вопрос, сформулированный И.М. Гельфандом. Как получить операторы Диксмье из операторов Кричевера–Новикова? Справедлива

Теорема (Гриневич) Коммутирующие дифференциальные операторы, отвечающие эллиптической спектральной кривой, имеют рациональные коэффициенты тогда и только тогда, когда

$$c(x) = \int_{q(x)}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{P(t)}},$$

где $q(x)$ — рациональная функция. Если $\gamma_0 = 0$ и $q(x) = x$, то оператор L_{KN} совпадает с оператором Диксмье L_D .

Анализ явных формул для оператора L_{KN} позволяет найти необходимые и достаточные условия для его самосопряженности.

Теорема (Гриневич, Новиков) Оператор L_{KN} формально самосопряжен тогда и только тогда, когда $\wp(\gamma_1) = \wp(\gamma_2)$.

Перейдем к формулировке наших результатов. Предположим, что коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2 содержит оператор четвертого порядка.

Такой оператор отвечает рациональной функции на гиперэллиптической спектральной кривой с полюсом в точке ветвления.

Мы будем предполагать, что спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0, \quad (1)$$

выделенная точка находится на бесконечности $q = \infty \in \Gamma$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \sigma(z, w) = (z, -w).$$

Как уже отмечалось на Γ существуют рациональные функции $\chi_0(x, P)$, $\chi_1(x, P)$, $P \in \Gamma$ такие, что

$$\psi'' = \chi_0\psi + \chi_1\psi'.$$

Имеет место

Теорема 1 *Если*

$$\chi_1(x, P) = \chi_1(x, \sigma(P)), \quad (2)$$

то оператор четвертого порядка, отвечающий рациональной функции z на Γ с полюсом второго порядка в $q = \infty \in \Gamma$, самосопряжен

$$L = L^* = (\partial_x^2 + V(x))^2 + W(x).$$

При $g = 2, 3, 4$, если L самосопряжен, то выполнено (2).

Укажем самосопряженный дифференциальный оператор ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, коммутирующий с оператором порядка $4g + 2$.

Теорема 2 *Существует коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2 с полиномиальными коэффициентами, изоморфное кольцу рациональных функций с полюсом в q на спектральной кривой, заданной уравнением вида (1) и которое содержит оператор*

$$L^\sharp = (\partial_x^2 + x^3 + h)^2 + g(g+1)x.$$

При $g = 1$ оператор L совпадает с оператором Диксмье. Оператор L_{4g+2} порядка $4g + 2$, коммутирующий с L , легко находится из условия коммутации $L^\sharp L_{4g+2}^\sharp = L_{4g+2}^\sharp L^\sharp$. Приведем примеры операторов L_{4g+2}^\sharp и уравнений спектральных кривых при $g = 2, 3$. Введем обозначение

$$L^\vee = \partial_x^2 + x^3 + h.$$

Примеры.

а) $g = 2$:

$$L_{10}^\sharp = (L^\vee)^5 + \frac{15x}{2}(L^\vee)^3 + (L^\vee)^3 \frac{15x}{2} + 45x^2 L^\vee + L^\vee 45x^2,$$

$$F_2(z) = z^5 + 27hz^2 + 81.$$

b) $g = 3$:

$$\begin{aligned} L_{14}^\# &= (L^\vee)^7 + 21x(L^\vee)^5 + (L^\vee)^5 21x + \frac{945x^2}{2}(L^\vee)^3 + (L^\vee)^3 \frac{945x^2}{2} - 2709(L^\vee)^2 \\ &\quad - (L^\vee)^2 2709 + \left(\frac{5085h}{2} + \frac{12915x^3}{2} \right) L^\vee + L^\vee \left(\frac{5085h}{2} + \frac{12915x^3}{2} \right) - 486x, \\ F_3 &= z^7 + 594hz^4 - 2025z^2 + 91125h^2z. \end{aligned}$$

2. Коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных (результаты получены совместно с А.Б. Жегловым).

Пусть

$$L_i = \sum_{|\alpha| \leq m_i} f_{i\alpha}(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad i = 0, \dots, n,$$

— дифференциальные операторы по переменным x_1, \dots, x_n со скалярными коэффициентами, где

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Мы будем предполагать, что старшие коэффициенты операторов постоянны. Мы также будем предполагать, что старшие символы операторов L_1, \dots, L_n алгебраически независимы и что множества их нулей в P^{n-1} не имеют общих точек.

Имеет место

Теорема (Кричевер) Существует ненулевой полином $Q(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ такой, что

$$Q(L_0, \dots, L_n) = 0.$$

Многообразию $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n+1}$, заданное уравнением

$$Q(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = 0$$

называется *спектральным многообразием* операторов L_0, \dots, L_n . Спектральное многообразие параметризует совместные собственные функции и собственные значения операторов L_i :

$$L_i(x, \lambda)\psi(x, \lambda) = \lambda_i\psi(x, \lambda), \quad \lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \Gamma.$$

В дальнейшем мы для простоты будем рассматривать операторы ранга 1, когда для точки $\lambda \in \Gamma$ общего положения существует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция ψ операторов L_i .

Обозначим через $P_i(k)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$ старшие символы операторов L_i , $i = 1, \dots, n$. Справедлива

Теорема (Кричевер) *Существует единственное решение системы уравнений*

$$L_i \psi(x, k) = P_i(k) \psi(x, k), (i = 1, \dots, n),$$

имеющее вид

$$\psi(x, k) = e^{k_1 x_1 + \dots + k_n x_n} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x, k) \right),$$

где $\xi_s(x, k)$ — однородные по k рациональные функции степени $-s$. Кольцо операторов, коммутирующих с $L_i, 1 \leq i \leq n$, коммутативно. Функция $\psi(x, k)$ является собственной для всего кольца.

Существуют интересные примеры n -мерных коммутативных колец дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами, построенные А.П. Веселовым, О.А. Чалых, М.В. Фейгиным, В.М. Бухштабером и С.Ю. Шориной, но эффективной классификации таких колец пока не получено. Более того, не ясно какие алгебраические многообразия могут отвечать коммутативным кольцам дифференциальных операторов.

Далее мы введем пучки Кричевера на проективных многообразиях, связанные с коммутирующими операторами. Пусть X — проективное алгебраическое многообразие размерности n , Y — \mathbb{Q} -Картье дивизор на X . Напомним, что для любого \mathbb{Q} -Картье дивизора Y найдется минимальное натуральное число d , такое что $Y' = dY$ — дивизор Картье, т.е. локально Y' задается одним неприводимым уравнением в каждой точке.

Пучок \mathcal{F} на X назовем *пучком Кричевера (K-пучком)*, если он является когерентным пучком без кручения и обладает следующим свойством:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \mathcal{F}(mY')) = \dim_{\mathbb{C}} \{ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (x_1, \dots, x_n)^{md+1} \},$$

т.е. размерность пространства глобальных сечений пучка $\mathcal{F} \otimes [mY']$ должна совпадать с размерностью пространства полиномов от n переменных степени не выше чем md .

Простейший пример K-пучка — это тривиальный пучок на $\mathbb{C}P^n$, при этом Y — гиперплоскость. Наличие K-пучка — это сильное ограничение на X и Y . Можно, например, показать что, если X и Y гладкие, то пучки Кричевера существуют только в случае $X = \mathbb{C}P^n$ и Y — гиперплоскость.

Напомним, что индекс n -кратного самопересечения эффективного дивизора Картье C на X определяется как $(n-1)!a_0$, где a_0 — старший коэффициент числового многочлена $P(k) = \chi(\mathcal{O}_X(kC))$. В случае неособых многообразий это определение совпадает с одним из общепринятых.

Справедлива

Теорема 3 *Предположим, что на проективном многообразии X существует пучок Кричевера ранга 1, тогда для индекса n -кратного самопересечения дивизора Картье Y' имеем*

$$(Y', \dots, Y') = d^n,$$

в частности, если Y является дивизором Картье, то индекс n -кратного самопересечения Y равен 1.

Например, если $X = \mathbb{C}P^n$, а Y — гиперплоскость, то Y — дивизор Картье, при этом индекс n -кратного самопересечения Y равен 1.

Пусть R — коммутативное кольцо n -мерных дифференциальных операторов ранга 1 со скалярными коэффициентами, старшие символы которых имеют постоянные коэффициенты. Справедлива

Теорема 4 Для кольца R существует проективное многообразие X и неприводимый обильный \mathbb{Q} -Картъев дивизор $Y \subset X$ такие, что кольцо рациональных функций A_Y на X с полюсом в Y изоморфно R .

На X существует семейство пучков Кричевера. Более точно, на $X \times U$, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — некоторая область, существует пучок \mathcal{F}_x , такой что $\mathcal{F}_x|_{X \times x}$ является пучком Кричевера ранга 1. Кроме того определены операторы ковариантного дифференцирования $\nabla_1, \dots, \nabla_n$

$$\nabla_i : H^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m}) \rightarrow H^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m+1}), \quad \nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i,$$

где $\mathcal{F}_{x,m} = \mathcal{F}_x(m(Y' \times U))$. Множество глобальных сечений

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} H^0(X \times U, \mathcal{F}_{x,m})$$

является свободным модулем ранга 1 над $\mathbb{C}[\nabla_1, \dots, \nabla_n]$.

Отметим, что спектральное многообразие X строится по кольцу R каноническим образом без выбора представителей $L_i \in R$. В случае, когда кольцо R порождено операторами L_0, \dots, L_n , как в теореме Кричевера, многообразие X совпадает с многообразием $\hat{\Gamma}$. При этом Y — рациональное многообразие. В общем случае, как указал Н. Курке, этот дивизор унирационален (таким образом, в размерности 1 и 2 он рационален по теореме Люрота). Мы строим компактификацию аффинной части $X \setminus Y$ с помощью естественной фильтрации на кольце R : фильтрации, заданной порядками операторов. Семейство пучков Кричевера строится с помощью функции ψ , определенной в теореме Кричевера.

А. Накаяшики ввел модули Бейкера–Ахиезера (БА-модули) на алгебраических многообразиях. БА-модуль M состоит из функций $\psi(x, P)$, $x \in \mathbb{C}^n$, $P \in X$, где X — n -мерное проективное алгебраическое многообразие. При фиксированном x ψ является сечением пучка на X , кроме того ψ имеет существенную особенность на дивизоре $Y \subset X$. Элементы $\psi \in M$ обладают следующими свойствами:

- $\partial_{x_j} \psi \in M$ и $f(x)\psi \in M$, где $f(x)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 ;
- $\lambda\psi \in M$ для любой рациональной функции λ на X с полюсом в Y .

Эти свойства означают, что M является модулем над кольцом дифференциальных операторов $\mathcal{D}_n = \mathcal{O}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$, где \mathcal{O} — кольцо аналитических функций в окрестности x_0 , а также модулем над кольцом рациональных функций A_Y на X с полюсом в Y . Особый интерес представляют конечнопорожденные свободные БА-модули над \mathcal{D}_n , поскольку в этом случае эта конструкция позволяет строить коммутативные кольца дифференциальных операторов. Выберем базис $\psi_1(x, P), \dots, \psi_N(x, P)$ в M . Тогда для $\lambda \in A_Y$ существует единственный дифференциальный оператор $D(\lambda)$ с матричными коэффициентами такой, что

$$D(\lambda)\Psi(x, P) = \lambda(P)\Psi(x, P),$$

где $\Psi(x, P) = (\psi_1(x, P), \dots, \psi_N(x, P))^\top$. Аналогично для другой функции $\mu \in A_Y$

$$D(\mu)\Psi(x, P) = \mu(P)\Psi(x, P),$$

откуда вытекает $(D(\lambda)D(\mu) - D(\mu)D(\lambda))\Psi = 0$. Из свободности \mathcal{D}_n -модуля M следует, что оператор $D(\lambda)D(\mu) - D(\mu)D(\lambda)$ нулевой, т.е. $D(\lambda)$ и $D(\mu)$ коммутируют.

С.П. Новиков сформулировал вопрос о существовании модуля Бейкера–Ахиезера, которому отвечает заданное кольцо дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами. Ниже мы формулируем теорему о существовании такого модуля, связанного с сечениями пучков Кривевера.

Пусть R — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, X — спектральное многообразие. Тогда справедлива

Теорема 5 *На X существует свободный модуль Бейкера–Ахиезера ранга 1, порожденный*

$$\psi(x, k) = \xi(x, k)e^{x_1k_1 + \dots + x_nk_n},$$

где $\xi(x, k)$ — сечение пучка Кривевера на X , такой, что образом соответствующего морфизма

$$A_Y \rightarrow \mathcal{D}_n$$

является кольцо R .

3. Полиномиальные интегралы геодезического потока на двумерном торе (результаты получены совместно с М. Бялым).

Геодезический поток на двумерном торе с метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ называется интегрируемым, если существует интеграл движения, почти всюду независимый с гамильтонианом $H = g^{ij}p_i p_j$. Выберем на торе конформные координаты

$$ds^2 = \Lambda(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2),$$

Здесь Λ — положительная периодическая функция с некоторой решеткой периодов. Известны следующие интегрируемые случаи. Если $\Lambda = \Lambda(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$, то существует интеграл первой степени по импульсам. Если $\Lambda = \Lambda_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + \Lambda_2(\alpha_2 x + \beta_2 y)$, то существует интеграл второй степени по импульсам. Вопрос о существовании метрик с полиномиальными интегралами (которые не сводимы к интегралам меньшей степени) является открытым. Козлов и Денисова доказали, что если Λ — тригонометрический полином, то дополнительный интеграл сводится к интегралам первой или второй степени.

Ранее нами было показано, что если геодезический поток интегрируем, то на торе существуют глобальные полугеодезические координаты

$$ds^2 = g^2(t, x)dt^2 + dx^2, \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{g^2} + p_2^2 \right).$$

В этих координатах полиномиальный интеграл записывается в следующем виде

$$F_n = \sum_{k=0}^n a_k(t, x) \frac{p_1^{n-k}}{g^{n-k}} p_2^k.$$

Коэффициенты удовлетворяют следующей системе уравнений

$$U_t + A(U)U_x = 0,$$

где $a_{n-1} \equiv g, a_n \equiv 1, U = (a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})^T$, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a_2 - na_0 \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 3a_3 - (n-1)a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 & (n-1)a_{n-1} - 3a_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & na_n - 2a_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Ранее нами было доказано, что система квазилинейных уравнений на коэффициенты интеграла является полугамильтоновой, т.е. в гиперболической области (где все собственные числа матрицы A различны и вещественны) эта система записывается в инвариантах Римана, а также в виде законов сохранения. В гиперболической области к полугамильтоновым системам применим обобщенный метод Царева.

Рассмотрим эллиптическую область Ω_e , где матрица $A(U)$ имеет все различные собственные числа и два из них комплексно сопряжены. Справедливы

Теорема 6 Пусть $n = 3$, тогда в области Ω_e метрика плоская или F_3 сводим к интегралу первой степени

$$F_3 = k_1 F_1^3 + 2k_2 H F_1$$

для некоторых констант k_1, k_2 .

Теорема 7 Пусть $n = 4$, тогда в области Ω_e метрика плоская или F_4 представим в виде

$$F_4 = k_1 F_2^2 + 2k_2 H F_2 + 4k_3 H^2$$

где F_2 — полиномиальный интеграл второй степени, k_i — константы.

Как следствие этих теорем получаем, что при $n = 3, 4$ если метрика и интеграл аналитичны и существует эллиптическая область на торе, то интеграл сводится к интегралам первой или второй степени.

4. Полиномиальные интегралы магнитного геодезического потока на двумерном торе (результаты получены совместно с М.Бялым).

Геодезический поток на торе \mathbb{T}^2 с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ задается гамильтоновой системой на $T^*\mathbb{T}^2$

$$\dot{x}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x^j}, \quad j = 1, 2,$$

где $H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j$. Функция $F : T^*\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ является первым интегралом геодезического потока, если

$$\dot{F} = \{F, H\}_g = 0,$$

где $\{F, H\}_g$ — скобка Пуассона

$$\{F, H\}_g = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right).$$

В случае магнитного геодезического потока скобка Пуассона принимает вид

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) + \Omega \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right),$$

где Ω — магнитное поле. Магнитный геодезический поток задается гамильтоновой системой

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{mg}.$$

Выберем конформные координаты (x, y) на торе. Метрика принимает вид $ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

Мы рассматриваем задачу существования полиномиального интеграла по импульсам степени N на одном уровне энергии $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda} = \frac{1}{2}$. Параметризуем каждый слой над \mathbb{T}^2 следующим образом

$$p_1 = \sqrt{\Lambda} \cos \varphi, \quad p_2 = \sqrt{\Lambda} \sin \varphi.$$

Интеграл F на одном уровне энергии имеет вид

$$F = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k e^{ik\varphi},$$

где $a_k = u_k(x, y) + iv_k(x, y)$, $a_{-k} = \bar{a}_k$.

Условие $\dot{F} = 0$ задает систему квазилинейных уравнений на коэффициенты интеграла F . Справедлива

Теорема 7 Система квазилинейных уравнений $\dot{F} = 0$ на коэффициенты интеграла F является полугамильтоновой, т.е. в гиперболической области она записывается в инвариантах Римана и в виде законов сохранения.

5. Гамильтоново минимальные лагранжевы подмногообразия в \mathbb{C}^n (результаты получены совместно с Т.Е. Пановым).

Мы изучаем топологию класса гамильтоново-минимальных (H -минимальных) лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^m , получаемых из пересечений вещественных квадратик.

Пусть M — кэлерово многообразие. Лагранжево подмногообразие $N \subset M$ называется H -минимальным, если его объем принимает критическое значение относительно гамильтоновых деформаций. Простейшим примером H -минимального лагранжева подмногообразия является клиффордов тор

$$S^1(r_1) \times \dots \times S^1(r_m) \subset \mathbb{C}^m,$$

где $S^1(r_k) \subset \mathbb{C}$ — окружность радиуса r_k . Ранее нами был предложен универсальный метод построения H -минимальных лагранжевых погружений N в \mathbb{C}^m на основе пересечений вещественных квадратик \mathcal{R} . При помощи этого метода строятся H -минимальные лагранжевы погружения в \mathbb{C}^m бутылки Клейна \mathcal{K}^m , $S^{m-1} \times S^1$, $\mathcal{K}^{m-1} \times S^1$ и других многообразий.

Мы получаем эффективные критерии того, что отображение $N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является вложением. Для этого мы исследуем взаимосвязи между пересечениями квадратик, простыми многогранниками и момент-угол-многообразиями, используя методы

торической топологии. Оказывается, что $N \rightarrow \mathbb{C}^m$ является H -минимальным лагранжевым вложением тогда и только тогда, когда многогранник, соответствующий пересечению квадратик *дельзантов*, что устанавливает взаимосвязь нашей конструкции с известной конструкцией Дельзанта гамильтоновых торических многообразий; в этом случае пересечение квадратик является множеством уровня для отображения моментов, используемого в конструкции торических многообразий при помощи симплектической редукции. Мы показываем, что N вкладывается в момент-угол-многообразие \mathcal{Z} , и что N является тотальным пространством двух различных расслоений: над тором со слоем пересечение квадратик \mathcal{R} и главного расслоения со слоем тор над факторпространством \mathcal{R} по действию конечной группы. Это факторпространство известно под названием *малого накрытия* над простым многогранником. Мы также даём топологическую классификацию многообразий N в случае, когда R является пересечением двух квадратик.

Естественно задаться вопросом, какие замкнутые многообразия могут быть вложены в \mathbb{C}^m в качестве лагранжевых подмногообразий. Имеются различные топологические ограничения на существование таких вложений. Например, многообразие M с $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$ не может быть вложено в качестве лагранжева подмногообразия в \mathbb{C}^m . Не существует лагранжевых вложений чётномерной бутылки Клейна в \mathbb{C}^{2m} . Наша конструкция даёт широкий класс лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^m с достаточно сложной топологией. Например, имеется лагранжево подмногообразие в \mathbb{C}^5 , которое является тотальным пространством расслоения над T^3 со слоем поверхность рода 5.

При помощи модификации конструкции H -минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^m можно получить H -минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^{m-1}$. А именно, если N является H -минимальным лагранжевым конусом, то взяв пересечение N с единичной сферой и профакторизовав по диагональному действию окружности, мы получаем H -минимальное лагранжево подмногообразие в $\mathbb{C}P^{m-1}$. При помощи этой процедуры может быть получен широкий класс новых явных примеров. Заметим, что, как и в случае \mathbb{C}^m , имеются топологические ограничения на лагранжевы вложения в $\mathbb{C}P^{m-1}$.

Список литературы

- [1] A.Mironov. *Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra*. arXiv:1107.3356.
- [2] А.Б. Жеглов, А.Е. Миронов. *Модули Бейкера–Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных*. Дальневосточный матем. журнал. 2012 (принята к печати).
- [3] M. Bialy, A.Mironov. *Cubic and quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via system of hydrodynamic type*. Nonlinearity. 2011, vol. **24**, 3541–3554.
- [4] M. Bialy, A.Mironov. *New Semi-Hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces*. arXiv:1112.1232.

- [5] Т.Е. Панов, А.Е. Миронов. *Пересечения квадрик, момент-угол-многообразия и гамильтоново-минимальные лагранжесвы вложения*. Функциональный анализ и его прилож. (принята к печати).

Раздел 6.

Полный набор операторов разрезания и склейки в теории Гурвица-Концевича

1 Введение и резюме

1.1 Числа Гурвица и характеры

Числа Гурвица $\text{Cov}_q(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ считают определенным образом взвешенное число разветвленных q -листных накрытий римановой сферы с фиксированным положением m точек ветвления заданного типа $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Типы отмечаются упорядоченными целыми разбиениями числа q , т.е. диаграммами Юнга Δ с числом клеток $|\Delta| = q$. Эта кажущаяся формальной проблема оказывается связанной с многочисленными направлениями исследований в физике и математике и привлекает растущее внимание в литературе, см. некоторые ссылки в [1]-[24]. После аккуратного определения, см. гл.2.1 ниже, проблема становится задачей теории представлений симметрических групп и сводится к знаменитой формуле [3] (наша нормировка $\varphi_R(\Delta)$ отличается от использованной в учебниках множителем):

$$\text{Cov}_q(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) = \sum_{|R|=q} d_R^2 \varphi_R(\Delta_1) \varphi_R(\Delta_2) \dots \varphi_R(\Delta_m) \quad (1)$$

Правая часть является суммой по всем представлениям (диаграммам Юнга) R с $|R| = q$, и $\varphi_R(\Delta)$ коэффициенты разложения (в действительности, они пропорциональны характерам симметрических групп [25]) характеров GL (функций Шура) $\chi_R(t)$ [25] по временным переменным $p_k = kt_k$:

$$\chi_R(t) = \sum_{|\Delta|=|R|} d_R \varphi_R(\Delta) p(\Delta) = \sum_{\Delta} d_R \varphi_R(\Delta) p(\Delta) \delta_{|\Delta|, |R|} \quad (2)$$

Для целых разбиений $\Delta = [\mu_1, \dots] : \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$ с $\sum_j \mu_j = |\Delta|$ моном $p(\Delta) \equiv \prod_i p_{\mu_i} = \prod_j p_j^{m_j}$. Далее мы также используем моном, нормированный иным образом: если $p(\Delta) = \prod_k p_k^{m_k}$, то $\widetilde{p}(\Delta) \equiv \prod_k \frac{1}{m_k!} \left(\frac{p_k}{k}\right)^{m_k} = (\prod_k m_k! k^{m_k})^{-1} p(\Delta)$. В дальнейшем мы пользуемся тем же определением $Y(\Delta)$, чтобы определить мономы для произвольной цепочки переменных $\{y_k\}$. Определения $\chi_R(t)$ и $d_R = \chi_R(t_k = \delta_{k,1})$ являются стандартными, см. гл.2.6 ниже.

Можно расширить определение $\varphi_R(\Delta)$ на большие диаграммы R с $|R| > |\Delta|$ следующим образом:

$$\varphi_R([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } |\Delta| + k > |R| \\ \varphi_R([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]) C_{|R|-|\Delta|}^k & \text{при } |\Delta| + k \leq |R| \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $C_b^a = \frac{b!}{a!(b-a)!}$ – биномиальные коэффициенты, и Δ – диаграмма Юнга, которая не содержит единиц, $1 \notin \Delta$. При таком расширении определения можно снять ограничение, что все $|\Delta_\alpha| = q$ в (1).

1.2 Гурвицевские статсуммы

Имеется два разных способа определять производящие функции чисел Гурвица (см. также в [26] другие производящие функции, связанные с разбиениями). Во-первых, $\varphi_R(\Delta)$ в (1) можно свернуть с $p(\Delta)$ и конвертировать в $\chi_R(t)$ при помощи (2). Во-вторых, $\varphi_R(\Delta)$ может быть экспоненцирована. Это подразумевает следующее определение гурвицевской статсуммы [23]:

$$\mathcal{Z}(t, t', t'', \dots | \beta) \equiv \sum_R d_R^2 \frac{\chi_R(t)}{d_R} \frac{\chi_R(t')}{d_R} \frac{\chi_R(t'')}{d_R} \dots \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \varphi_R(\Delta) \right) \quad (4)$$

где сумма теперь идет по всем представлениям (диаграммам Юнга) R произвольного размера $|R|$. Здесь β – набор констант, зависящих от диаграмм Юнга. Если только $\beta_{[2]}$, соответствующая диаграмме $\Delta = [2]$, не равна нулю, это выражение сводится к производящей функции \mathcal{N} -чисел Гурвица. В частности, [8, 9]

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = 1: \quad Z(t|\beta) &= \sum_R d_R \chi_R(t) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} \quad \longrightarrow \quad Z(t|0) = \sum_R d_R \chi_R(t) = e^{t^1}, \\ \mathcal{N} = 2: \quad Z(t, \bar{t}|\beta) &= \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} \quad \longrightarrow \quad Z(t, \bar{t}|0) = \sum_R \chi_R(t) \chi_R(\bar{t}) = \exp \left(\sum_k k t_k \bar{t}_k \right) \end{aligned} \quad (5)$$

являются соответственно τ -функциями КП и Тоды по временам t и t, \bar{t} [27, 9, 19, 22], однако интегрируемость разрушается для $\mathcal{N} \geq 3$ [23]. Она также разрушается включением старших β_{Δ} с $|\Delta| \geq 3$ [16, 20, 23]: чтобы сохранить интегрируемость, нужно экспоненцировать казимировские собственные значения $C_R(|\Delta|)$ [27] вместо $\varphi_R(\Delta) \neq C_R(|\Delta|)$. Замена φ_R посредством C_R в определении статсумм была названа в [16, 20] переходом к пополненным циклам, и \mathcal{Z} получается из так определенной τ -функции [27] действием весьма замысловатых операторов \mathcal{B}_{Δ} , см. [23].

На самом деле, τ -функция КП $Z(t|\beta)$ связывается [10, 19, 22] при помощи техники эквивалентных иерархий [28] с τ -функцией Концевича [29], и, следуя [22], мы называем ее и ее дальнейшие обобщения (4) статсуммой Гурвица-Концевича. Это замечательное соответствие позволяет применить хорошо развитую технику матричных моделей [29]–[35] к изучению чисел Гурвица. Настоящая статья далее развивает частный пример [24] такого применения.

1.3 Общие РС-операторы

Альтернативным образом, можно ввести β -деформации в статсумму с помощью операторов разрезания и склейки (РС) $\hat{\mathcal{W}}$, которые являются дифференциальными операторами, действующими на временные переменные $\{t_k\}$ (или, альтернативно, на $\{t'_k\}$ или $\{t''_k\}$), причем характеры $\chi_R(t)$ являются их собственными значениями, а $\varphi_R(\Delta)$ – соответствующими собственными функциями:

$$\boxed{\hat{\mathcal{W}}(\Delta) \chi_R(t) = \varphi_R(\Delta) \chi_R(t)} \quad (6)$$

Тогда, как прямое следствие (6) и (4),

$$\mathcal{Z}(t, t', \dots | \beta) = \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \hat{\mathcal{W}}(\Delta) \right) \mathcal{Z}(t, t', \dots | 0) \quad (7)$$

В простейшем случае $\Delta = [2]$ мы получаем стандартный РС-оператор [8]

$$\hat{\mathcal{W}}([2]) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left((a+b)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + a b p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left(a b t_a t_b \frac{\partial}{\partial t_{a+b}} + (a+b)t_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} \right) \quad (8)$$

который является генератором W_3 -алгебры, отвечающим нулевой моде [36]: $\hat{\mathcal{W}}([2]) = \hat{W}_0^{(3)}$. W_3 -алгебра является частью универсальной обертывающей алгебры $GL(\infty)$ и является симметрией универсального грассманиана [37, 38]. Следовательно, действие этого оператора сохраняет интегрируемость КП [37, 39, 28] и деформирует интегрируемость Тоды [40] простым образом [27, 9].

Оператор (8) удобно переписывается [24] в терминах матричных переменных Мивы X (X назывался ψ в [24]),

$$p_k = k t_k = \text{tr } X^k, \quad (9)$$

где X – это $N \times N$ матрица,

$$\hat{\mathcal{W}}([2]) = \frac{1}{2} \left(\text{tr } \hat{D}^2 - N \text{tr } \hat{D} \right) = \frac{1}{2} : \text{tr } \hat{D}^2 : \quad (10)$$

Здесь мы использовали матричный оператор $\hat{D} = X \frac{\partial}{\partial X}$ (включающий транспонированную матрицу \tilde{X} , что является стандартным в теории матричных моделей [29]-[35]; здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

$$\hat{D}_{ab} \equiv X_{ac} \frac{\partial}{\partial X_{bc}} \quad (11)$$

т.е. семейство операторов $[\hat{D}_{ab}, \hat{D}_{cd}] = \hat{D}_{ad} \delta_{bc} - \hat{D}_{bc} \delta_{ad}$ действующих на алгебру функций, генерированных X_{ab} : $\hat{D}_{ab} X_{cd} \equiv X_{ad} \delta_{bc}$. Нормальное упорядочивание подразумевает, что производные по X не действуют на X , которые стоят между двух двоеточий. Это эквивалентно взятию символа оператора.

Основная цель в настоящей статье – объяснить, что существует прямое обобщение (10) на все остальные операторы $\hat{\mathcal{W}}(\Delta)$:

$$\boxed{\hat{\mathcal{W}}(\Delta) = : \widetilde{D(\Delta)} :} \quad (12)$$

где $\widetilde{D(\Delta)}$ сделан из операторов $\hat{D}_k \equiv \text{tr } \hat{D}^k$ в точности так же, как $p(\Delta)$ сделан из временных переменных $p_k = k t_k$: $\widetilde{D(\Delta)} \equiv \left(\prod_k m_k! k^{m_k} \right)^{-1} \hat{D}_k^{m_k}$. Заметим, что операторы \hat{D}_{ab} , (11) реализуют регулярное представление алгебры gl . (Коммутирующие) операторы Казимира, которые лежат в универсальной обертывающей алгебре gl , могут быть реализованы как \hat{D}_k , причем характеры $\chi_R(t)$ группы GL являются их собственными функциями [41, 42]. Поскольку все \hat{D}_k коммутируют друг с другом, также коммутируют и все $\hat{D}(\Delta)$ и $\hat{\mathcal{W}}(\Delta)$ (и их общая система собственных функций по-прежнему задается характерами). Это позволяет выразить $\mathcal{Z}(t|\beta)$ через тривиальную τ -функцию $Z(t|0) = e^{t_1}$:

$$\boxed{\mathcal{Z}(t|\beta) = \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} : \widetilde{D(\Delta)} : \right) Z(t|0)} \quad (13)$$

Более того, с помощью тех же операторов могут быть введены дополнительные наборы временных переменных, к примеру,

$$\mathcal{Z}(t, \bar{t}|\beta) \approx: e^{\sum_k \bar{t}_k \text{tr } \hat{D}^k} : \mathcal{Z}(t|\beta) \quad (14)$$

(Более аккуратное определение того, что обозначает \approx в этом уравнении, см. гл.2.8 ниже.) Это открывает возможность естественно включить гурвицевские статсуммы в М-теорию матричных моделей [35].

Кроме случая диаграммы $\Delta = [2]$, нормальное упорядочивание делает четные операторы $\hat{W}([k])$ с однострочечной диаграммой Юнга $\Delta = [k]$ нелинейной комбинацией операторов Казимира, что выводит $\hat{W}(\Delta)$ из универсального грассманиана [37, 38] и ведет к нарушению интегрируемости, обнаруженному в [16, 20, 23].

Ограничивая набор $\{\beta_\Delta\}$ β -переменных в (13) на единственную $\beta_{[2]} = \beta$, мы получаем представление для τ -функции Гурвица-Концевича $Z(t|\beta)$, которое являлось стартовой точкой в [24] для вывода многообещающего матрично-модельного представления для этой функции. Она в действительности выражается (все еще плохо понятым, но хорошо обоснованным способом [10, 19, 22]) через стандартную τ -функцию кубической модели Концевича [29, 34].

РС-операторы \hat{W} образуют коммутативную ассоциативную алгебру, см. гл.2.4.3:

$$\boxed{\hat{W}(\Delta_1)\hat{W}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \hat{W}(\Delta)} \quad (15)$$

со структурными константами, связанными с тройными числами Гурвица $\text{Cov}(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)$, см. следующий параграф 1.4. Соответственно, эти $\text{Cov}(\Delta_1\Delta_2\Delta_3)$ могут альтернативно изучаться в теории *детских рисунков* и функций Белого [43]. При $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$ эти числа являются структурными константами $c_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta}$ центра групповой алгебры симметрической группы $S_{|\Delta|}$.

Уравнения (13) и (2.4.3) должны иметь интересное неабелево обобщение на случай открытых чисел Гурвица [13, 14, 44], считающих накрытия римановых поверхностей с границами, которые должны быть открытым струнным аналогом формулы (13) из теории замкнутых струн.

1.4 Универсальные числа Гурвица и универсальная алгебра Гурвица

Структурные константы $C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta}$ позволяют ввести универсальные числа Гурвица, определенные для произвольных наборов диаграмм Юнга, не ограниченных условием $|\Delta_1| = \dots = |\Delta_m|$.

Рассмотрим векторное пространство Y , генерированное всеми диаграммами Юнга. Соответствие $\Delta \mapsto \hat{W}(\Delta)$ задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры на Y , соответствующее умножение диаграмм Юнга мы обозначаем $*$. Рассмотрим линейную форму $l : Y \rightarrow \mathbb{R}$, где $l(\Delta) = \frac{1}{|\Delta|!}$ для $\Delta = [1, 1, \dots, 1]$ и $l(\Delta) = 0$ для любых других диаграмм Юнга. Это определение мотивировано уравнением (72) из теории характеров, см. гл.2.7 ниже. Мы называем *числом Гурвица* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ число

$$\text{Cov}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) = l(\Delta_1 * \Delta_2 * \dots * \Delta_m) \quad (16)$$

Такие обобщенные числа Гурвица совпадают с классическими для $|\Delta_1| = |\Delta_2| = \dots = |\Delta_m|$, когда ограничение $*$ -операции воспроизводит композицию \circ сопряженных классов перестановок, рассмотренную в гл.2.2.

Симметрическая билинейная форма $\langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle = l(\Delta_1 * \Delta_2)$ невырождена и инвариантна,

$$\langle \Delta_1 * \Delta, \Delta_2 \rangle = \langle \Delta_1, \Delta_2 * \Delta \rangle \quad \forall \Delta \quad (17)$$

как следствие коммутативности и ассоциативности. Более того,

$$\sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \langle \Delta, \Delta_3 \rangle = l(\Delta_1 * \Delta_2 * \Delta_3) \quad (18)$$

т.е.

$$C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} = \sum_{\Delta_3} G^{\Delta \Delta_3} l(\Delta_1 * \Delta_2 * \Delta_3), \quad (19)$$

где $G^{\Delta_2 \Delta_3}$ – матрица, обратная к $G_{\Delta_1 \Delta_2} = \langle \Delta_1, \Delta_2 \rangle$.

Наконец, наша универсальная алгебра Гурвица РС-операторов свободно порождается набором операторов Казимира и, на самом деле, совпадает как векторное пространство с центром универсальной обертывающей алгебры $gl(\infty)$, см. дальнейшие подробности в гл.2.5 ниже и в [23, 42].

2 Комментарии

2.1 Числа Гурвица и счет накрытий

q -листное накрытие Σ римановой поверхности Σ_0 является проекцией $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$, где почти все точки Σ_0 имеют в точности q прообразов. Число прообразов уменьшается в конечном числе сингулярных точек (ветвления) $x_1, \dots, x_m \in \Sigma_0$. В действительности, $\pi^{-1}(x_\alpha)$ является набором точек $y_i^{(\alpha)} \in \Sigma$ таких, что в окрестности каждой $y_i^{(\alpha)}$ проекция π имеет вид

$$\pi : (x - x_\alpha) = (y - y_i^{(\alpha)})^{\mu_i^{(\alpha)}} \quad (20)$$

Тогда с каждой сингулярной точкой ассоциируется целое разбиение q , которое может быть упорядочено: $\Delta_\alpha : \mu_1^{(\alpha)} \geq \mu_2^{(\alpha)} \geq \dots \geq 0$, т.е. на самом деле является диаграммой Юнга. Эта диаграмма Δ_α называется *тип* точки ветвления x_α .

Если взять несингулярную точку $x_* \in \Sigma_0$ и рассмотреть замкнутый путь C_* в Σ_0 , который начинается и кончается в x_* , тогда q прообразов x_* в Σ как-то переставляются при движении вдоль C_* . Таким образом, с путем C_* ассоциируется перестановка q переменных, т.е. накрытие определяет отображение из фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_0, x_*)$ в симметрическую группу (перестановок) S_q . Изменение x_* приводит к общему сопряжению всех перестановок, ассоциированных с различными контурами, и само накрытие ассоциируется с сопряженными классами отображений $\pi_1(\Sigma_0, x_*)$ в S_q . В действительности, обратное также почти верно: если задано такое отображение, можно восстановить накрытие. Таким образом, перечисление разветвленных накрытий становится чистой теоретико-групповой проблемой и дает определение чисел Гурвица для римановой поверхности произвольного рода g :

$$\text{Cov}_q^g(\Delta_1, \dots, \Delta_m) = \sum \frac{1}{|\text{Aut}(\pi)|} \quad (21)$$

– это число накрытий π с фиксированным набором сингулярных точек x_1, \dots, x_m типов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, деленной на порядок группы автоморфизмов. Для краткости мы полагаем $\text{Cov}_q^0 = \text{Cov}_q$. Сумма в (21) идет по всем возможным классам эквивалентности накрытий, и эквивалентность устанавливается наличием би-голоморфного отображения $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ такого, что $\pi' = f \circ \pi$.

Поскольку $\text{Cov}_q(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ является одновременно теоретико-групповым объектом, оно может быть также выражено в терминах симметрических групп, и такой подход

приводит к формуле (1). Обобщение на поверхность Σ_0 произвольного рода следует из топологической теории поля [45, 46, 3, 13]. Некоторое нетривиальное обобщение на Σ_0 с границами может быть найдено в [13, 14].

2.2 Перестановки, циклы и их композиции

РС-операторы выходят на сцену, когда изучается слияние двух точек ветвления x_α и x_β типов Δ_α и Δ_β . В результате такого слияния возникает единственная сингулярная точка вместо двух, но ее тип Δ не определен однозначно типами Δ_α и Δ_β . Он зависит от действительного распределения прообразов $y_i^{(\alpha)}$ и $y_j^{(\beta)}$ между листами накрытия, и по этому распределению в определении чисел Гурвица идет суммирование.

Диаграмма Юнга Δ отмечает элемент монодромии критического значения и сопряженный класс симметрической группы S_q . Когда две критические точки сливаются, результирующая монодромия является произведением двух первоначальных монодромий.

До рассмотрения умножения классов давайте посмотрим на умножение перестановок. Любая перестановка может быть представлена как произведение циклов. К примеру, S_3 состоит из шести элементов:

$$\{123\} \longrightarrow \{123\}, \{132\}, \{213\}, \{321\}, \{231\}, \{312\},$$

которые могут быть выражены через циклы как

$$123, 1(23), (12)3, (13)2, (132), (123)$$

соответственно. Обозначение (132) для цикла означает, что $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Для краткости мы пишем 123 вместо (1)(2)(3).

Диаграмма Юнга Δ описывает класс сопряжения элементов группы. Мы обозначаем тем же символом Δ элемент групповой алгебры, равный сумме всех элементов класса сопряжения (с единичными коэффициентами).

К примеру, диаграммы Юнга с 3 клетками отвечают трем классам сопряжения этих перестановок следующим образом:

$$\Delta = [1, 1, 1] = 123; \quad \Delta = [2, 1] = 1(23), (12)3, (13)2; \quad \Delta = [3] = (132), (123)$$

Соответствующие элементы групповой алгебры – это

$$\Delta = [1, 1, 1] = 123; \quad \Delta = [2, 1] = 1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2; \quad \Delta = [3] = (132) \oplus (123)$$

Удобно определить $||\Delta||$ как число различных перестановок в классе сопряжения Δ , т.е. $||3|| = 2$, $||2, 1|| = 3$, $||1, 1, 1|| = 1$.

Подобным образом, для S_4 будет пять классов сопряжения, и соответствующие элементы групповой алгебры:

$$\Delta = [4] = (1234) \oplus (1243) \oplus (1324) \oplus (1342) \oplus (1423) \oplus (1432), \quad ||4|| = 3! = 6,$$

$$\Delta = [3, 1] = (123)4 \oplus (124)3 \oplus (132)4 \oplus (134)2 \oplus (142)3 \oplus (143)2 \oplus 1(234) \oplus 1(243), \quad ||3, 1|| = 8,$$

$$\Delta = [2, 2] = (12)(34) \oplus (13)(24) \oplus (14)(23), \quad ||2, 2|| = 3,$$

$$\Delta = [2, 1, 1] = (12)34 \oplus (13)24 \oplus (14)23 \oplus 1(23)4 \oplus 1(24)3 \oplus 12(34), \quad ||2, 1, 1|| = 6,$$

и

$$\Delta = [1, 1, 1, 1] = 1234, \quad ||1, 1, 1, 1|| = 1.$$

Если мы теперь рассмотрим слияние двух точек ветвления, скажем, с $\Delta = [2, 1]$ и $\Delta' = [3]$, мы должны будем увидеть, что получается, когда любая их трех перестановок из класса сопряжения $\Delta = [2, 1]$ умножается на любую из двух из $\Delta' = [3]$. Это описывается таблицей 3×2

$$[2, 1] \circ [3] = \begin{array}{|c|c|} \hline 1(23) \circ (132) & 1(23) \circ (123) \\ \hline (12)3 \circ (132) & (12)3 \circ (123) \\ \hline (13)2 \circ (132) & (13)2 \circ (123) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline (13)2 & (12)3 \\ \hline 1(23) & (13)2 \\ \hline (12)3 & 1(23) \\ \hline \end{array} = 2 \cdot [2, 1] \quad (22)$$

или просто

$$[2, 1] \circ [3] = \left(1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2 \right) \circ \left((132) \oplus (123) \right) = 2 \cdot \left(1(23) \oplus (12)3 \oplus (13)2 \right) = 2 \cdot [2, 1] \quad (23)$$

Мы обозначаем композицию перестановок при помощи \circ . Как обычно, вторая перестановка действует первой, например, $\{123\} \xrightarrow{(132)} \{132\} \xrightarrow{1(23)} \{321\}$ и результат такой же как $\{123\} \xrightarrow{(13)^2} \{321\}$. Числа в обозначении перестановки отсылают с *позициям*, не к *элементам*: (12) переставляет объекты, стоящие на первой и второй позициях, а не элементы "1" и "2".

Имея композицию перестановок, можно использовать соответствующие структурные константы $c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''}$,

$$\Delta \circ \Delta' = \sum_{\Delta''} c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''} \Delta'' \quad (24)$$

чтобы определить РС-операторы по следующему правилу:

$$\hat{\mathcal{W}}(\Delta)_p(\Delta') = \sum_{\Delta''} c_{\Delta\Delta'}^{\Delta''} \hat{\mathcal{W}}(\Delta'')_p \quad (25)$$

Уравнение (22) подразумевает, что так определенный оператор $\hat{\mathcal{W}}([2, 1])$ содержит член вида

$$\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) = 2 \cdot \widehat{p([2, 1])} \frac{\partial}{\partial p([3])} + \dots = 3p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + \dots \quad (26)$$

где точки отвечают членам, зануляющим p_3 .

Подобным образом, таблица умножения

$$[3] \circ [2, 1] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (132) \circ 1(23) & (132) \circ (12)3 & (123) \circ (13)2 \\ \hline (123) \circ 1(23) & (123) \circ (12)3 & (123) \circ (13)2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (12)3 & (13)2 & 1(23) \\ \hline (13)2 & 1(23) & (12)3 \\ \hline \end{array} = 2 \cdot [2, 1] \quad (27)$$

подразумевает, что

$$\hat{\mathcal{W}}([3]) = 2p_1p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} + \dots \quad (28)$$

где на этот раз точки обозначают некоторые члены из аннигилятора p_1p_2 .⁴

Элементы групповой алгебры, которые соответствуют диаграммам Юнга, генерируют центр групповой алгебры. В нашем примере можно видеть, что правые стороны (27) и (22) одинаковы, как подразумевается коммутативностью центра.

Таким же образом можно проанализировать композицию любой другой пары классов сопряжений и восстановить все члены в операторах $\hat{\mathcal{W}}(\Delta)$. Таким образом можно проверить, что любое продолжение первого столбца в диаграмме Юнга не влияет на РС-оператор:

$$\hat{\mathcal{W}}([\Delta, 1, 1, \dots, 1]) \cong \hat{\mathcal{W}}(\Delta) \quad \text{если действует на подходящую величину} \quad (29)$$

в соответствии с (3), см. детали в гл.2.4.2. Мы вкратце рассмотрим только еще один пример:

$$[2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}] \circ [3, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-3}] = \begin{array}{|c|c|} \hline (12)3456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \dots \\ \hline (13)2456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline 1(23)456 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline (14)2356 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline 123(45)6 \dots q \circ (123)456 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline (13)2456 \dots q & \dots \\ \hline 1(23)456 \dots q & \\ \hline (12)3456 \dots q & \\ \hline (1423)56 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline (123)(45)6 \dots q & \\ \hline \dots & \\ \hline \end{array} \quad (30)$$

Имеются $\| [3, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-3}] \| = 2C_q^3 = \frac{q(q-1)(q-2)}{3}$ столбцов и $\| [2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}] \| = C_q^2 = \frac{q(q-1)}{2}$ строк

в таблицах. Очевидно, каждый столбец второй, результирующей таблицы содержит 3 элемента из класса $[2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-2}]$ плюс $3(q-3)$ элементов из класса $[4, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-4}]$ плюс $\frac{(q-3)(q-4)}{2}$ элементов из класса $[3, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{q-5}]$. Таким образом,

$$[2, 1, \dots, 1] \circ \frac{[3, 1, \dots, 1]}{\| [3, 1, \dots, 1] \|} = 3 \cdot \frac{[2, 1, \dots, 1]}{\| [2, 1, \dots, 1] \|} + 3(q-3) \cdot \frac{[4, 1, \dots, 1]}{\| [4, 1, \dots, 1] \|} + \frac{(q-3)(q-4)}{2} \cdot \frac{[3, 2, 1, \dots, 1]}{\| [3, 2, 1, \dots, 1] \|}$$

или

$$[2, 1, \dots, 1] \circ [3, 1, \dots, 1] = 2(q-2) \cdot [2, 1, \dots, 1] + 4 \cdot [4, 1, \dots, 1] + [3, 2, 1, \dots, 1] \quad (31)$$

⁴Можно сравнить эту формулу с полным выражением в уравнении (53). Коэффициент 2 в (28) возникает из второго члена в (53) с $abcd = 1212, 1221, 2112, 2121$, и только два из этих четырех членов дают вклад из-за фактора $(1 - \delta_{ac}\delta_{bd})$.

Так как в этом примере $\hat{W}(\underbrace{[2, 1, \dots, 1]}_{q-2})$ действует на $p_3 p_1^{q-3}$, мы имеем:

$$\hat{W}(\underbrace{[2, 1, \dots, 1]}_{q-2}) p_3 p_1^{q-3} = \frac{1}{2} \left(6p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3} + 6p_4 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_3} + p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1^2} + \dots \right) p_3 p_1^{q-3} \quad (32)$$

Мы видим, что коэффициент перед членом $p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial p_3}$ такой же, как в (26), в полном согласии с (29). Оба представления в (31) подразумевают тот же результат для $\hat{W}(\underbrace{[2, 1, \dots, 1]}_{q-2})$, поскольку

$$\widetilde{p(\Delta)} = \frac{||\Delta||}{|\Delta|!} p(\Delta) = \frac{p(\Delta)}{\text{Aut}(\Delta)}$$

и обе формулы умножения могут быть использованы чтобы выделить РС-оператор из (25).

В общем, для композиции классов сопряжения получается

$$\Delta_1 \circ \Delta_2 = \sum_{|\Delta|=|\Delta_1|=|\Delta_2|} c_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \cdot \Delta \quad (33)$$

где маленькая буква c используется, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с композицией перестановок в группе $S_{|\Delta|}$, т.е. $|\Delta| = |\Delta_1| = |\Delta_2|$. Вышеприведенные примеры демонстрируют, что даже в этом случае РС-оператор – это *не в точности* $\sum_{|\Delta_1|=|\Delta_2|} c_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta} \widetilde{p(\Delta_1)} \partial / \partial \widetilde{p(\Delta_2)}$, настоящая степень дифференциального оператора, который удовлетворяет (25), может быть много меньше чем та, что подразумевается этой формулой.

В действительности, ограничение, что $|\Delta'| = |\Delta|$ в (25) может быть легко убрано: можно расширить Δ до диаграммы $[\Delta, 1^{|\Delta'|-|\Delta|}]$, удлиняя первый столбец до подходящей длины и определяя

$$\hat{W}(\Delta) \widetilde{p(\Delta')} = \tilde{p}([\Delta, 1^{|\Delta'|-|\Delta|}] \circ \Delta') = \sum_{|\Delta''|=|\Delta'|} c_{[\Delta, 1^{|\Delta'|-|\Delta|}] \Delta'}^{\Delta''} \widetilde{p(\Delta'')} \quad \text{при } 1 \notin \Delta \quad (34)$$

и

$$\hat{W}([\Delta, 1^s]) \widetilde{p(\Delta')} = \sum_{|\Delta''|=|\Delta'|} \frac{(|\Delta'| - |\Delta|)!}{s!(|\Delta'| - |\Delta| - s)!} c_{[\Delta, 1^{|\Delta'|-|\Delta|}] \Delta'}^{\Delta''} \widetilde{p(\Delta'')} \quad \text{при } 1 \notin \Delta \quad (35)$$

Таким образом, РС-операторы могут быть определены как действующие на временные переменные произвольного уровня полностью в терминах структурных констант универсальной симметрической группы $S(\infty)$. Уравнение (12), однако, обеспечивает гораздо более явное и прозрачное альтернативное представление этих операторов, которое позволяет также расширить набор структурных констант $S(\infty)$, снимая остающееся ограничение $|\Delta''| = |\Delta'|$, все еще имеющееся в (34) и (35). Расширенные структурные константы $C_{\Delta \Delta'}^{\Delta''}$ описывают умножение универсальных операторов, определенных либо в (35), либо в (12).

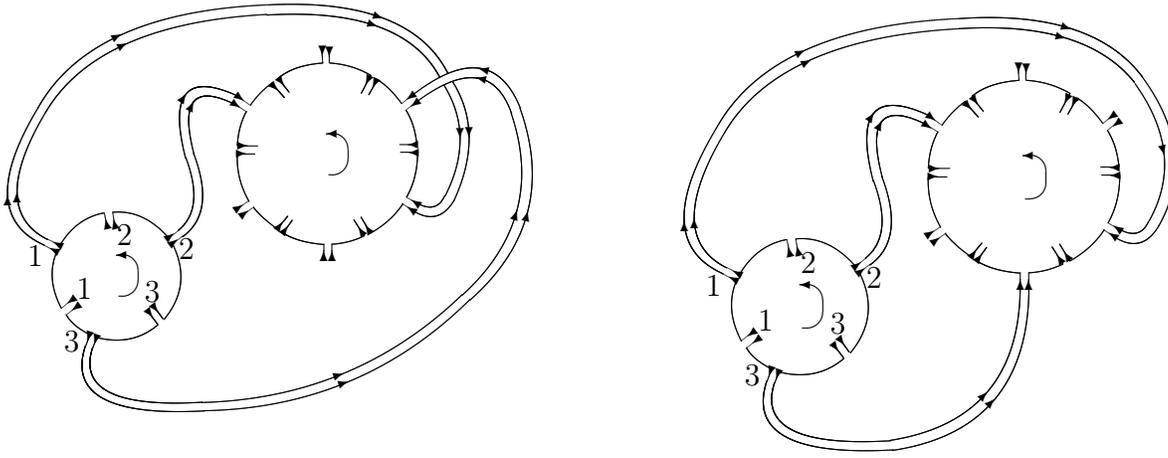


Рис. 1: Композиция двух перестановок – цикла (123) с циклом шестого порядка. В то же время, эти диаграммы Фейнмана дают вклад в умножение нормально упорядоченных матричных дифференциальных операторов $\mathcal{W}([3])$ и $\mathcal{W}([6])$.

2.3 Композиция перестановок и фейнмановская диаграммная техника

Композиция перестановок может вычисляться удобным образом при помощи простой фейнмановской диаграммной техники. Она, с одной стороны, буквально отражает геометрическое определение чисел Гурвица, а, с другой стороны, эквивалентна описанию при помощи дифференциальных операторов. Представим цикл (132) длины 3 ориентированным кругом в левой части Рис.1, а цикл длины 6 – другим ориентированным кругом в его правой части. Само умножение представляется линиями, связывающими все выходящие линии левого круга с произвольно выбранными 3 входящими линиями правого круга. В результате формируются новые циклы - в точности один длины 6 для связывающих линий как на левом рисунке и три с длинами 1, 2 и 3, если одна из связывающих линий изменена как на правом рисунке.

На этом рисунке мы имеем дело с ситуацией типа $(123) \circ (123456)$, когда первый цикл является подмножеством второго. Нужно только помнить, что вместе с (123456) необходимо рассмотреть все $5!$ разных циклов, образованных теми же 6 элементами – и только два из этих $5!$ возможностей показаны на рисунке. Чтобы получить наши операторы, нужно просуммировать по всем этим возможностям. Нужно также добавить все остальные циклы: каждая Δ является набором нескольких циклов данной длины.

Преимущество такого графического представления в том, что можно дальше представлять такие рисунки – фейнмановские диаграммы – операторами. Это – простейший путь получить (12), что сразу воспроизводит уравнения (26) и (28). Нормальное упорядочивание появляется, поскольку одна связывающая линия не может действовать на другую связывающую линию.

Эта фейнмановская диаграммная техника связывает вместе геометрическую интерпретацию чисел Гурвица, их комбинаторные выражения и нормально упорядоченные дифференциальные матричные операторы.

2.4 Алгебра РС-операторов

2.4.1 Примеры нормального упорядочивания

Начнем с нескольких примеров, иллюстрирующих роль нормального упорядочивания:

$$: \text{tr } \hat{D}^2 : = \text{tr } \hat{D}^2 - N \text{tr } \hat{D} = \text{tr} (\hat{D} - N) \hat{D}$$

или

$$\text{tr } \hat{D}^2 = : \text{tr } \hat{D}^2 : + N \text{tr } \hat{D},$$

$$\text{tr } \hat{D}^3 = : \text{tr } \hat{D}^3 : + 2N : \text{tr } \hat{D}^2 : + : (\text{tr } \hat{D})^2 : + N^2 \text{tr } \hat{D},$$

$$\text{tr } \hat{D}^4 = : \text{tr } \hat{D}^4 : + 3N : \text{tr } \hat{D}^3 : + 3 : \text{tr } \hat{D} \text{tr } \hat{D}^2 : + (3N^2 + 1) : \text{tr } \hat{D}^2 : + 3N : (\text{tr } \hat{D})^2 : + N^3 : \text{tr } \hat{D} :,$$

...

Подобным образом,

$$(\text{tr } \hat{D})^2 = : (\text{tr } \hat{D})^2 : + \text{tr } \hat{D}, \quad (36)$$

$$(\text{tr } \hat{D}^2)^2 = : (\text{tr } \hat{D}^2)^2 : + 2N : \text{tr } \hat{D} \text{tr } \hat{D}^2 : + 4 : \text{tr } \hat{D}^3 : + 4N : \text{tr } \hat{D}^2 : + (N^2 + 2) : (\text{tr } \hat{D})^2 : + N^2 \text{tr } \hat{D} \quad (37)$$

и т.д.

2.4.2 Вставка дополнительного \hat{D}_1 , (29)

Далее мы даем полное описание нормального упорядочивания для небольшого, но важного класса операторов, которые содержат степени $\hat{D}_1 = \text{tr } \hat{D} = \sum_a a p_a \frac{\partial}{\partial p_a}$,

$$\hat{\mathcal{W}}([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]) = \frac{1}{k!} : \widetilde{D(\Delta)} \hat{D}_1^k : \quad (38)$$

(предполагается, что Δ больше не содержит единиц). Более систематическое описание см. в [42].

Следующие соотношения следуют прямо из определения нормального упорядочивания:

$$\begin{aligned} : \widetilde{D(\Delta)} \hat{D}_1 : &= : \widetilde{D(\Delta)} : \hat{D}_1 - |\Delta| : \widetilde{D(\Delta)} : = : \widetilde{D(\Delta)} : (\hat{D}_1 - |\Delta|), \\ : \widetilde{D(\Delta)} (\hat{D}_1)^2 : &= : \widetilde{D(\Delta)} \hat{D}_1 : \hat{D}_1 - (|\Delta| + 1) : \widetilde{D(\Delta)} \hat{D}_1 : = : \widetilde{D(\Delta)} \hat{D}_1 : (\hat{D}_1 - |\Delta| - 1) = \\ &= : \widetilde{D(\Delta)} : (\hat{D}_1 - |\Delta|) (\hat{D}_1 - |\Delta| - 1), \\ &\dots \\ : \widetilde{D(\Delta)} (\hat{D}_1)^k : &= : \widetilde{D(\Delta)} : \prod_{i=0}^{k-1} (\hat{D}_1 - |\Delta| - i) \end{aligned} \quad (39)$$

Это подразумевает, что при действии $: \widetilde{D(\Delta)} :$ на некоторую величину веса $|R|$, к примеру, на $: \widetilde{D(R)} :$, \hat{D}_1 действует умножением на $|R|$, и можно всегда подставить вместо $: \widetilde{D(\Delta)} :$

$$\frac{1}{(|R| - |\Delta|)!} : \widetilde{D(\Delta)} (\hat{D}_1)^{|R| - |\Delta|} : = : D(\underbrace{[\Delta, 1, \dots, 1]}_{|R| - |\Delta|}) : , \quad \text{при условии } 1 \notin \Delta \quad (40)$$

без изменения результата, в согласии с правилом (3) и с формулой (29).

Если $\hat{\mathcal{W}}(\Delta)$ содержит \hat{D}_1 -факторы, это правило должно быть скорректировано численным фактором: к примеру, вместо $\widetilde{D([1])}$: можно подставить

$$\frac{1}{(|R|-1)!} : \widetilde{D([1])(\hat{D}_1)^{|R|-1}} : = \frac{1}{(|R|-1)!} : (\hat{D}_1)^{|R|} : = |R| : (\hat{D}_1)^{|R|} : = |R| : D(\underbrace{[1, \dots, 1]}_{|R|}) : \quad (41)$$

что содержит дополнительный фактор $|R|$, снова в согласии с (3).

2.4.3 Мультипликативная алгебра $\hat{\mathcal{W}}$ -операторов

Используя соотношения из гл.2.4.1, мы можем теперь умножать разные РС-операторы:

$$\boxed{\hat{\mathcal{W}}(\Delta_1)\hat{\mathcal{W}}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \hat{\mathcal{W}}(\Delta)} \quad (42)$$

Заметим, что, в отличие от (33), нет ограничения на размеры диаграмм Юнга Δ_1, Δ_2 и Δ , на самом деле, имеется только правило отбора

$$\max(|\Delta_1|, |\Delta_2|) \leq |\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| \quad (43)$$

Тем не менее, эти новые структурные константы при $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$ совпадают со структурными константами алгебры классов сопряженности (33). Техника фейнмановских диаграмм гл.2.3 может рассматриваться как графическое представление (42), в то время как выражение (25) для $\hat{\mathcal{W}}$ -оператора через временные переменные – как следствие (42), спроектированное на подмножество $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$. В этом случае оно подразумевает, что

$$\hat{\mathcal{W}}(\Delta_1)\widetilde{p}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \widetilde{p}(\Delta) = \hat{\mathcal{W}}(\Delta_2)\widetilde{p}(\Delta_1), \quad |\Delta_1| = |\Delta_2| \quad (44)$$

Более того, в согласии с (6) собственные значения $\varphi_R(\Delta)$ удовлетворяют той же алгебре (42):

$$\boxed{\varphi_R(\Delta_1)\varphi_R(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \varphi_R(\Delta)} \quad (45)$$

Структурные константы в этом соотношении не зависят от R , что не так очевидно, если находить $\varphi_R(\Delta)$ из разложения характеров (2). Можно это явно проверить для первых нескольких $\varphi_R(\Delta)$, используя следующую таблицу для них ($\varphi_R(\Delta)$ отличается множителем от характера симметрической группы [25]):

$R \setminus \Delta$	1	2	11	3	21	111	4	31	22	211	1111	5	41	32	311	221	2111	11111	
1	1																		
2	2	1	1																
11	2	-1	1																
3	3	3	3	2	3	1													
21	3	0	3	-1	0	1													
111	3	-3	3	2	-3	1													
4	4	6	6	8	12	4	6	8	3	6	1								
31	4	2	6	0	4	4	-2	0	-1	2	1								
22	4	0	6	-4	0	4	0	-4	3	0	1								
211	4	-2	6	0	-4	4	2	0	-1	-2	1								
1111	4	-6	6	8	-12	4	-6	8	3	-6	1								
5	5	10	10	20	30	10	30	40	15	30	5	24	30	20	20	15	10	1	
41	5	5	10	5	15	10	0	10	0	15	5	-6	0	-5	5	0	5	1	
32	5	2	10	-4	6	10	-6	-8	3	6	5	0	-6	4	-4	3	2	1	
311	5	0	10	0	0	10	0	0	-5	0	5	4	0	0	0	-5	0	1	
221	5	-2	10	-4	-6	10	6	-8	3	-6	5	0	6	-4	-4	3	-2	1	
2111	5	-5	10	5	-15	10	0	10	0	-15	5	-6	0	5	5	0	-5	1	
11111	5	-10	10	20	-30	10	-30	40	15	-30	5	24	-30	-20	20	15	-10	1	

2.4.4 Примеры структурных констант

Теперь мы дадим несколько явных примеров (42) – таблицу умножения, ограниченную на случай, когда $|\Delta| \leq 4$. Многие из них – прямые следствия соотношений из

гл.2.4.2. Заметим, что явная зависимость от N , которая появлялась в нормально упорядоченных произведениях в гл.2.4.1, исчезает при рассмотрении произведений нормально упорядоченных операторов $\hat{\mathcal{W}}$.

Подчеркнуты компоненты, удовлетворяющие условиям $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta|$, которые диктуются композициями перестановок (формула (33)):

$$\underline{\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([1])} = \underline{\hat{\mathcal{W}}([1])} + 2\hat{\mathcal{W}}([1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([2]) = 2\hat{\mathcal{W}}([2]) + \hat{\mathcal{W}}([2, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([1, 1]) = 2\hat{\mathcal{W}}([1, 1]) + 3\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([3]) = 3\hat{\mathcal{W}}([3]) + \hat{\mathcal{W}}([3, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) = 3\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 2\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) = 3\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 4\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([4]) = 4\hat{\mathcal{W}}([4]) + \hat{\mathcal{W}}([4, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([3, 1]) = 4\hat{\mathcal{W}}([3, 1]) + 2\hat{\mathcal{W}}([3, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([2, 2]) = 4\hat{\mathcal{W}}([2, 2]) + \hat{\mathcal{W}}([2, 2, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) = 4\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + 3\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1])\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) = 4\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) + 5\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1, 1]),$$

$$\underline{\hat{\mathcal{W}}([1, 1])\hat{\mathcal{W}}([2])} = \underline{\hat{\mathcal{W}}([2])} + 2\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) + \hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]),$$

$$\underline{\hat{\mathcal{W}}([1, 1])\hat{\mathcal{W}}([1, 1])} = \underline{\hat{\mathcal{W}}([1, 1])} + 6\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 6\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]),$$

$$\underline{\hat{\mathcal{W}}([2])\hat{\mathcal{W}}([2])} = \underline{\hat{\mathcal{W}}([1, 1])} + 3\hat{\mathcal{W}}([3]) + 2\hat{\mathcal{W}}([2, 2]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1, 1])\hat{\mathcal{W}}([3]) = 3\hat{\mathcal{W}}([3]) + 3\hat{\mathcal{W}}([3, 1]) + \hat{\mathcal{W}}([3, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1, 1])\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) = 3\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 6\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + \hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([1, 1])\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) = 3\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) + 12\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1]) + 10\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1, 1, 1]),$$

$$\hat{\mathcal{W}}([2])\hat{\mathcal{W}}([3]) = \hat{\mathcal{W}}([3, 2]) + 4\hat{\mathcal{W}}([4]) + 2\hat{\mathcal{W}}([2, 1])$$

$$\hat{\mathcal{W}}([2])\hat{\mathcal{W}}([2, 1]) = 2\hat{\mathcal{W}}([2, 2, 1]) + 3\hat{\mathcal{W}}([3, 1]) + 4\hat{\mathcal{W}}([2, 2]) + 3\hat{\mathcal{W}}([3]) + 3\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1])$$

$$\hat{\mathcal{W}}([2])\hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) = \hat{\mathcal{W}}([2, 1]) + 2\hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1]) + \hat{\mathcal{W}}([2, 1, 1, 1]),$$

...

2.5 От \hat{D} к дифференциальным операторам во временных переменных

Один путь выразить операторы \hat{W} через временные переменные уже дан в уравнении (12). Однако много проще выделить такие выражения прямо из (25), т.е. делая преобразование Мивы обратно от матричной X -переменной к временам $p_k = \text{tr } X^k$. Это делается по простому правилу – при действии на функцию временных переменных производные по X дают

$$\hat{D}_{ab}F(p) = X_{ac} \frac{\partial}{\partial X_{bc}} F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k (X^k)_{ab} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} \quad (46)$$

Далее операторы \hat{D} действуют как на X , который появился на первом шаге, так и на остающуюся функцию временных переменных:

$$\hat{D}_{a'b'} \hat{D}_{ab} F(p) = \sum_{k,l=1}^{\infty} kl (X^l)_{a'b'} (X^k)_{ab} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} k (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} \quad (47)$$

где мы использовали тот факт, что

$$\hat{D}_{a'b'} (X^k)_{ab} = X_{a'c'} \frac{\partial}{\partial X_{b'c'}} (X^k)_{ab} = \sum_{j=0}^{k-1} X_{a'c'} (X^j)_{ab'} (X^{k-j-1})_{c'b} = \sum_{j=0}^{k-1} (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b} \quad (48)$$

Заметим, что степень X во втором множителе в правой части никогда не равна нулю, в то время как в первом множителе она может зануляться. Если мы рассмотрим нормально упорядоченное произведение операторов вместо (47), эта степень должны быть ненулевой:

$$: \hat{D}_{a'b'} \hat{D}_{ab} : F(p) = \sum_k \left(k \sum_{j=1}^{k-1} (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b} \right) \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} + \sum_{k,l} kl (X^k)_{ab} (X^l)_{a'b'} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l} \quad (49)$$

Это как раз свойство, которое гарантирует, что возможная зависимость от N исчезает из формул, как это и должно быть для операторов, которые можно выразить в терминах временных переменных, и, тем самым, не зависящих от деталей преобразования Мивы (для которого N является дополнительным параметром).

Первые несколько примеров РС-операторов в терминах временных переменных:

$$\hat{W}([1]) = \text{tr } \hat{D} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \quad (50)$$

$$\hat{W}([2]) = \frac{1}{2} : \text{tr } \hat{D}^2 : = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left((a+b) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + a b p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) \quad (51)$$

$$\hat{W}([1, 1]) = \frac{1}{2!} : (\text{tr } \hat{D})^2 : = \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^{\infty} a(a-1) p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \sum_{a,b=1}^{\infty} a b p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}([3]) = \frac{1}{3} : \text{tr } \hat{D}^3 : &= \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1} a b c p_{a+b+c} \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} + \frac{1}{2} \sum_{a+b=c+d} c d (1 - \delta_{ac} \delta_{bd}) p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_c \partial p_d} + \\ &+ \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1} (a+b+c) (p_a p_b p_c + p_{a+b+c}) \frac{\partial}{\partial p_{a+b+c}} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= \frac{1}{2} : \text{tr } \hat{D}^2 \text{tr } \hat{D} : = \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} (a+b)(a+b-2)p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} ab(a+b-2)p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{a,b,c \geq 1} (a+b)c p_a p_b p_c \frac{\partial^2}{\partial p_{a+b} \partial p_c} + \frac{1}{2} \sum_{a,b,c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= \frac{1}{3!} : (\text{tr } \hat{D})^3 : = \frac{1}{6} \sum_{a \geq 1} a(a-1)(a-2)p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{a,b} ab(a+b-2)p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{1}{6} \sum_{a,b,c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} \end{aligned} \quad (55)$$

Как и следовало ожидать из (39) и (41), из этих формул следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}([1, 1]) &= \frac{1}{2} \hat{\mathcal{W}}([1])(\hat{\mathcal{W}}([1]) - 1) \\ \hat{\mathcal{W}}([2, 1]) &= \hat{\mathcal{W}}([2])(\hat{\mathcal{W}}([1]) - 2) \\ \hat{\mathcal{W}}([1, 1, 1]) &= \frac{1}{6} \hat{\mathcal{W}}([1])(\hat{\mathcal{W}}([1]) - 2)(\hat{\mathcal{W}}([1]) - 1) \end{aligned} \quad (56)$$

Явные выражения для старших операторов быстро становятся гораздо более сложными. Однако, имеется гораздо более компактное представление для операторов – будучи выраженными через времена, эти операторы в действительности сделаны из тока скалярного поля

$$\partial\Phi(z) = \sum_k \left(k t_k z^k + \frac{1}{z^k} \frac{\partial}{\partial t_k} \right) = \sum_k \left(p_k z^k + \frac{k}{z^k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \quad (57)$$

и из добавочного оператора дилатации

$$\hat{R} = \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \quad (58)$$

Дальнейшие детали см. в [23, 42]. Здесь мы даем просто несколько первых примеров.

Нормальное упорядочивание в *этих* формулах означает, что все p -факторы стоят слева от $\partial/\partial p$ -факторов, и мы не берем p -производные от p при построении оператора из $\partial\Phi(z)$. Нижний индекс 0 означает, что нужно взять коэффициент перед z^0 в ряде по z . Поскольку добавление единицы к диаграмме Юнга является тривиальной процедурой, как мы только что видели, мы приводим здесь только операторы, отвечающие диаграммам Юнга без единиц [42]:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}([1]) &= \hat{C}_1 \\ \hat{\mathcal{W}}([2]) &= \frac{1}{2} \hat{C}_2 \\ \hat{\mathcal{W}}([3]) &= \frac{1}{3} \hat{C}_3 - \frac{1}{2} \hat{C}_1^2 + \frac{1}{3} \hat{C}_1 \\ \hat{\mathcal{W}}([2, 2]) &= \frac{1}{8} \hat{C}_2^2 - \frac{1}{2} \hat{C}_3 + \frac{1}{2} \hat{C}_1^2 - \frac{1}{4} \hat{C}_1 \\ \hat{\mathcal{W}}([4]) &= \frac{1}{4} \hat{C}_4 - \hat{C}_1 \hat{C}_2 + \frac{5}{4} \hat{C}_1 \end{aligned} \quad (59)$$

где операторы Казимира [42] –

$$\begin{aligned}\hat{C}_1 &= \frac{1}{2} : [(\partial\Phi)^2]_0 : \\ \hat{C}_2 &= \frac{1}{3} : [(\partial\Phi)^3]_0 : \\ \hat{C}_3 &= \frac{1}{4} : [(\partial\Phi)^4 + \partial\Phi(\hat{R}\partial\Phi)]_0 : \\ \hat{C}_4 &= \frac{1}{5} : \left[(\partial\Phi)^5 + \frac{5}{2}(\partial\Phi)^2(\hat{R}\partial\Phi) \right]_0 : \\ \hat{C}_k &= \frac{1}{k+1} : \left[(\partial\Phi)^{k+1} + \frac{(k+1)!}{4!(k-2)!}(\partial\Phi)^{k-1}(\hat{R}\partial\Phi) + \dots \right]_0 :\end{aligned}$$

2.6 Характеры $GL(\infty)$ и связанные формулы

GL -характеры $\chi_R(t)$ определяются первой детерминантной формулой Вейля

$$\chi_R(t) = \det_{ij} s_{\mu_i + j - i}(t) \quad (60)$$

где $s_k(t)$ – полиномы Шура,

$$\exp\left(\sum_k t_k z^k\right) = \sum_k s_k(t) z^k \quad (61)$$

После преобразования Мивы $p_k = kt_k = \text{tr} X^k$, те же характеры выражаются через собственные значения матрицы X при помощи второй формулы Вейля

$$\chi_R[X] = \chi_R\left(t_k = \frac{1}{k} \text{tr} X^k\right) = \frac{\det_{ij} x_i^{\mu_j - j}}{\det_{ij} x_i^{-j}} \quad (62)$$

Разложение $\chi_R(t)$ по степеням p определяет коэффициенты $\varphi_R(\Delta)$ формулой (2) для $|R| = |\Delta|$ и формулой (3) для всех остальных Δ . В (2) параметр d_R является значением характера в точке $t_k = \delta_{k,1}$,

$$d_R = \chi_R(\delta_{k,1}) \quad (63)$$

и дается формулой крюков

$$d_R = \prod_{\text{все клетки } R} \frac{1}{\text{длина крюка}} = \frac{\prod_{i < j=1}^{|R|} (\mu_i - \mu_j - i + j)}{\prod_{i=1}^{|R|} (\mu_i + |R| - i)!} \quad (64)$$

На характерах можно также ввести естественное скалярное произведение

$$\langle \chi_R(t), \chi_{R'}(t) \rangle = \delta_{RR'} \quad (65)$$

явно заданное формулой

$$\langle A(t), B(t) \rangle \equiv A\left(\frac{\partial}{\partial p}\right) B(t) \Big|_{t_k=0} \quad (66)$$

В частности,

$$\langle p(\Delta), \widetilde{p(\Delta')} \rangle = \delta_{\Delta\Delta'} \quad (67)$$

Эти формулы вместе с (2) непосредственно приводят к обратному разложению

$$\widetilde{p(\Delta)} = \sum_R d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R(t) \delta_{|\Delta|, |R|} \quad (68)$$

Таким образом, (6) дает действительно исчерпывающее альтернативное описание операторов $\mathcal{W}(\Delta)$, и можно проверить, что (12) действительно удовлетворяет этому определению (см. следующий параграф гл.2.7 и [23, 42]). Эквивалентность двух определений (25) и (6) следует из формулы (1).

2.7 От (12) к (6)

Идея прямого вывода (6) из (12) состоит в следующем. Рассмотрим для простоты Δ , которая не содержит единиц (расширение на общий случай делается непосредственно). Очевидно,

$$: \widetilde{D(\Delta)} : e^{t_1} =: \widetilde{D(\Delta)} : e^{\text{tr } X} = \widetilde{p(\Delta)} e^{t_1} \quad (69)$$

Поскольку

$$e^{t_1} = \sum_R d_R \chi_R(t) \quad (70)$$

отсюда следует, что

$$\sum_R d_R : \widetilde{D(\Delta)} : \chi_R(t) = \widetilde{p(\Delta)} e^{t_1} \quad (71)$$

Правая часть этой формулы может быть переписана, используя (68) и (3), как

$$\begin{aligned} \sum_k \widetilde{p(\Delta)} \frac{t_1^k}{k!} &= \sum_k p([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}]_k) = \sum_k \sum_R d_R \varphi_R([\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}]_k) \chi_R = \\ &= \sum_k \sum_{R: |R|=|\Delta|+k} d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R = \sum_R d_R \varphi_R(\Delta) \chi_R \end{aligned} \quad (72)$$

что, вместе с (71) и с тем фактом, что $\chi_R(t)$ являются собственными функциями $: \widetilde{D(\Delta)} :$, приводит в конце концов к (6).

2.8 Детали (14)

Имеются отклонения от наивной формулы (14), которые возникают, поскольку нужно аккуратно накладывать условие $|\Delta| = R$ в (2) при переходе от $\varphi_R(\Delta)$ в (1) к характеристам $\chi_R(t')$ в (4):

$$Z(t, t', \dots) = \sum_q \left\{ \sum_{\Delta, \Delta'} p(\Delta) p'(\Delta') \delta_{|\Delta|, q} \delta_{|\Delta'|, q} \text{Cov}_q(\Delta, \Delta', \dots) \right\} = \sum_R \chi_R(t) \chi_R(t') \dots \quad (73)$$

или альтернативно

$$\begin{aligned} &= \sum_{\Delta', R} d_R \chi_R(t) \varphi_R(\Delta) p'(\Delta) \dots \delta_{|\Delta|, |R|} = \oint \frac{dz}{z} \sum_{\Delta, R} d_R \chi_R(t) \varphi_R(\Delta) p'(\Delta) z^{|\Delta| - |R|} \dots = \\ &= \oint \frac{dz}{z} \sum_{\Delta} z^{|\Delta|} p'(\Delta) : \widetilde{D(\Delta)} : \sum_R d_R \chi_R(t) z^{|R|} \dots = \oint \frac{dz}{z} : \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k t'_k \hat{D}_k \right) : \sum_R d_R \chi_R(t) z^{|R|} \dots \end{aligned}$$

Это – полная (корректная) версия формулы (14). Если ничего не стоит вместо точек, т.е. рассматривается $Z(t, t'|0)$, тогда сумма по R равна $e^{t_1/z}$, и мы получаем в качестве простейшего примера

$$Z(t, t'|0) = \oint \frac{dz}{z} : \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k t'_k \hat{D}_k \right) : e^{t_1/z} = \exp \left(\sum_k k t_k t'_k \right) \oint \frac{dz}{z} e^{t_1/z} = \exp \left(\sum_k k t_k t'_k \right) \quad (74)$$

Обобщения легко проделываются. Если хотеть рассмотреть многократные числа Гурвица с большим числом наборов переменных t , то нужно учитывать дополнительные δ -функции и интегралы по z .

3 Резюме и заключение

РС-оператор общего вида $\hat{W}(\Delta)$ ассоциируется с произвольной диаграммой Юнга Δ и может быть определен двумя альтернативными способами.

Во-первых, через характеры требованием, чтобы

$$\hat{W}(\Delta)\chi_R(t) = \varphi_R(\Delta)\chi_R(t) \quad (75)$$

для любой диаграммы Юнга R . Тогда гурвицевская статсумма, скажем, для двух наборов времен равна

$$\mathcal{Z}(t, \bar{t}|\beta) \equiv \sum_R \chi_R(t)\chi_R(\bar{t}) \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \varphi_R(\Delta) \right) = \exp \left(\sum_{\Delta} \beta_{\Delta} \hat{W}(\Delta) \right) Z(t, \bar{t}|0) \quad (76)$$

где $Z(t, \bar{t}|0) = \sum_R \chi_R(t)\chi_R(\bar{t}) = \exp(\sum_k k t_k \bar{t}_k) = \exp(\sum_k \frac{1}{k} p_k \bar{p}_k)$. Гурвицевская τ -функция Тоды [27, 9] для "двойных чисел Гурвица" $Z(t, \bar{t}|\beta) = \sum_R \chi_R(t)\chi_R(\bar{t}) e^{\beta_2 \varphi_R([2])} = e^{\beta_2 \hat{W}([2])} Z(t, \bar{t}, 0)$ является частным случаем, а τ -функция КП Гурвица-Концевича для "однократных (или обычных) чисел Гурвица" – ее дальнейшее ограничение на $\bar{t}_k = \delta_{k,1}$. Интегрируемость в этих двух примерах имеется, поскольку простейший РС-оператор $\hat{W}([2])$ совпадает со (вторым) оператором Казимира а интегрируемость имеется, когда любая комбинация операторов Казимира действует на τ -функцию [27]. Она, однако, нарушается общими РС-операторами с $|\Delta| \geq 3$. Конечно, можно ассоциировать β -переменные с некоторой *новой* интегрируемой структурой, отраженной в коммутативности операторов $\hat{W}(\Delta)$,

$$\left[\hat{W}(\Delta_1), \hat{W}(\Delta_2) \right] = 0 \quad \forall \Delta_1 \text{ и } \Delta_2 \quad (77)$$

Однако нет никакого очевидного способа связать *эту* интегрируемость с индуцированными теорией групп билинейными соотношениями типа Хироты [47], и даже меньшие шансы есть на то, что она как-то индуцирована представлением $\widehat{U}(1)$ в виде свободных фермионов (эти две черты встроены в определение интегрируемых иерархий типа КП/Тоды).

Во-вторых, через перестановки и циклические декомпозиции. Это – проблема, напрямую связанная со слиянием точек ветвления гурвицевского накрытия. Центральная формула – (25),

$$\Delta \circ \mathcal{P}(p) = \hat{W}(\Delta)\mathcal{P}(p) \quad (78)$$

и в гл.2.2 мы объяснили, как $\hat{W}(\Delta)$ явно восстанавливается из знания композиций перестановок.

Оба эти определения, условия (75) и (78), явно решаются формулой (12),

$$\hat{W}(\Delta) = : \widetilde{D(\Delta)} : \quad (79)$$

– прямым обобщением представления простейшего РС-оператора $\hat{W}([2])$ из [24]. Первые несколько операторов этого набора приведены в гл.2.5.

Эти операторы образуют коммутативную ассоциативную алгебру

$$\hat{W}(\Delta_1)\hat{W}(\Delta_2) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \hat{W}(\Delta) \quad (80)$$

Мы называем ее универсальной алгеброй Гурвица, поскольку она позволяет определить универсальные числа Гурвица для произвольного набора диаграмм Юнга, не обязательно одного и того же размера. А именно, с добавкой (43) формула (1) позволяет определить число Гурвица как

$$\text{Cov}(\Delta_1, \dots, \Delta_m) = \sum_{\Delta} C_{\Delta_1 \dots \Delta_m}^{\Delta} \left(\sum_R d_R^2 \varphi(\Delta) \right) \quad (81)$$

где C – комбинация структурных констант, к примеру,

$$C_{\Delta_1 \dots \Delta_m}^{\Delta} = \sum_{\Delta_a, \Delta_b, \dots, \Delta_c} C_{\Delta_1 \Delta_2}^{\Delta_a} C_{\Delta_a \Delta_3}^{\Delta_b} \dots C_{\Delta_c \Delta_m}^{\Delta} \quad (82)$$

(порядок спаривания, в действительности, не существен из-за ассоциативности и коммутативности алгебры). Таким образом, вычисление чисел Гурвица сводится к вычислению единственной формы на линейной алгебре диаграмм Юнга

$$\sum_R d_R^2 \varphi_R(\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{если } \Delta \text{ содержит более одного столбца} \\ \frac{1}{n!} & \text{если } \Delta = \underbrace{[1, \dots, 1]}_n \end{cases} \quad (83)$$

Тот факт, что форма зануляется всюду, кроме одно-столбцовых диаграмм, является прямым следствием фундаментального правила сумм (70).

Дальнейшие детали об описании в терминах характеров и аспектах, связанных с интегрируемостью проблемы, могут быть найдены в статьях [23, 42]. Все эти соотношения заслуживают лучшего и более явного понимания. Особый интерес представляет изучение гурвицевской τ -функции КП в терминах матричных моделей [24], его приложение (используя [35]) к пониманию мистической связи твистования гурвицевской τ -функции КП и τ -функции Концевича [10, 19, 22] и дальнейшее неабелево обобщение всего данного формализма на числа Гурвица для накрытий римановых поверхностей с границами [14] (например, диск вместо римановой сферы).

Список литературы

- [1] A.Hurwitz, Math. Ann. **39** (1891) 1-61; Math. Ann. bf 55 (1902) 51-60
- [2] G.Frobenius, Sitzberg. Koniglich P reuss. Akad.Wiss. Berlin(1896) 985-1021

- [3] R.Dijkgraaf, In: *The moduli spaces of curves*, Progress in Math., 129 (1995), 149-163, Birkhäuser
- [4] R.Vakil, *Enumerative geometry of curves via degeneration methods*, Harvard Ph.D. thesis (1997)
- [5] I.Goulden and D.Jackson, Proc.Amer.Math.Soc. **125** (1997) 51-60, math/9903094
- [6] S.Lando and D.Zvonkine, Funk.Anal.Appl. **33** 3 (1999) 178-188; math.AG/0303218
- [7] S.Natanzon and V.Turaev, Topology, **38** (1999) 889-914
- [8] Goulden D., Jackson D.M., Vainshtein A., Ann. of Comb. 4(2000), 27-46, Birkhäuser
- [9] A.Okounkov, Math.Res.Lett. **7** (2000) 447-453
- [10] A.Givental, math/0108100
- [11] T.Ekedahl, S.Lando, M.Shapiro, A.Vainshtein, Invent.Math.146(2001),297-327
- [12] S.Lando, Russ.Math.Surv., **57** (2002) 463-533
- [13] A.Alexeevski and S.Natanzon, Selecta Math., New ser. **12:3** (2006) 307-377, math.GT/0202164
- [14] S.Natanzon, Russian Math.Survey **61:4** (2006) 185-186; arXiv:0804.0242
A.Alexeevski and S.Natanzon, Amer.Math.Soc.Transl. **224** (2) (2008) 1-25; Известия РАН, **12:4** (2008) 3-24
- [15] Zhou J., arXiv: math.AG/0308024
- [16] A.Okounkov and R.Pandharipande, Ann. of Math. **163** (2006) 517, math.AG/0204305
- [17] T.Graber and R.Vakil, Compositio Math., **135** (2003) 25-36
- [18] M.Kazarian and S.Lando, math.AG/0410388; math/0601760
- [19] M.Kazarian, arXiv:0809.3263
- [20] S.Lando, In: *Applications of Group Theory to Combinatorics*, Koolen, Kwak and Xu, Eds. Taylor & Francis Group, London, 2008, 109-132
- [21] V.Bouchard and M.Marino, In: *From Hodge Theory to Integrability and tQFT: tt*-geometry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, AMS (2008), arXiv:0709.1458
- [22] A.Mironov and A.Morozov, JHEP **0902** (2009) 024, arXiv:0807.2843
- [23] A.Mironov, A.Morozov and S.Natanzon, *Integrability and \mathcal{N} -point Hurwitz Numbers*, to appear
- [24] A.Morozov and Sh.Shakirov, JHEP, **0904** (2009) 064, arXiv: 0902.2627

- [25] D.E.Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, Oxford, 1958
M.Hamermesh, *Group theory and its application to physical problems*, 1989
I.G.Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Science Publications, 1995
W.Fulton, *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society, 1997
- [26] N.Nekrasov and A.Okounkov, arXiv:hep-th/0306238
A.Marshakov and N.Nekrasov, JHEP **0701** (2007) 104, hep-th/0612019
B.Eynard, arXiv:0804.0381
A.Klemm and P.Sulkowski, arXiv:0810.4944
- [27] S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995) 2015, hep-th/9312210
- [28] S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, Mod.Phys.Lett. **A8** (1993) 1047-1062, Theor.Math.Phys. **95** (1993) 571-582, hep-th/9208046
- [29] M. Kontsevich, Funkts. Anal. Prilozh., **25:2** (1991) 50-57
M. Kontsevich, Comm.Math.Phys. **147** (1992) 1-23
S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov and A.Zabrodin, Phys. Lett. **B275** (1992) 311-314, hep-th/9111037; Nucl.Phys. **B380** (1992) 181-240, hep-th/9201013
A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, Phys.Lett. **274B** (1992) 280-288, hep-th/9201011
S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, Nucl.Phys. **B397** (1993) 339-378, hep-th/9203043
P.Di Francesco, C.Itzykson and J.-B.Zuber, Comm.Math.Phys. **151** (1993) 193-219, hep-th/9206090
- [30] A.Morozov, Phys.Usp. **37** (1994) 1-55, hep-th/9303139; hep-th/9502091; hep-th/0502010
A.Mironov, Int.J.Mod.Phys. **A9** (1994) 4355, hep-th/9312212; ЭЧАЯ, **33** (2002) 537
- [31] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, and A. Orlov, Nucl. Phys. **B357** (1991) 565-618
- [32] S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov and S.Pakuliak, Nucl.Phys. **B404** (1993) 717-750, hep-th/9208044
- [33] A.Mironov and A.Morozov, Phys.Lett. **B252**(1990) 47-52
F.David, Mod.Phys.Lett. **A5** (1990) 1019
J.Ambjorn and Yu.Makeenko, Mod.Phys.Lett. **A5** (1990) 1753
H.Itoyama and Y.Matsuo, Phys.Lett. **B255** (1991) 202
Yu.Makeenko, A.Marshakov, A.Mironov and A.Morozov, Nucl.Phys. **B356** (1991) 574
- [34] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, Int.J.Mod.Phys. **A19** (2004) 4127, Theor.Math.Phys. **142** (2005) 349, hep-th/0310113; Int.J.Mod.Phys. **A21** (2006) 2481, hep-th/0412099; Fortsch.Phys. **53** (2005) 512, hep-th/0412205
B.Eynard, JHEP, **0411** 031, hep-th/0407261
B.Eynard and N.Orantin, math-phys/0702045
N.Orantin, PhD thesis, arXiv:0709.2992
A.Alexandrov, A.Mironov, A.Morozov and P.Putrov, arXiv:0811.2825

- [35] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, Theor.Math.Phys. **150** (2007) 179-192, hep-th/0605171; Physica **D235** (2007) 126-167, hep-th/0608228
N.Orantin, arXiv:0808.0635
- [36] A.Zamolodchikov, Theor.Math.Phys. **63** (1985) 1205
V.Fateev and A.Zamolodchikov, Nucl.Phys. **B280** [FS18] (1987) 644
A.Gerasimov, A.Marshakov and A.Morozov, Phys.Lett. **236B** (1990) 269-272; Nucl.Phys. **B328** (1989) 664-676
A.Marshakov and A.Morozov, Nucl.Phys. **B339** (1990) 79-94
A. Morozov, Nucl.Phys. **B357** (1991) 619-631
- [37] M.Sato, RIMS Kokyuroku, **439** (1981) 30-40
- [38] G.Segal, G.Wilson, Publ.I.H.E.S., **61** (1985) 5-65
D.Friedan and S.Shenker, Phys.Lett. **175B** (1986) 287; Nucl.Phys. **B281** (1987) 509-545
N.Ishibashi, Y.Matsuo and H.Ooguri, Mod. Phys. Lett. **A2** (1987) 119
L.Alvarez-Gaume, C.Gomez and C.Reina, Phys.Lett. **190B** (1987) 55-62
A.Morozov, Phys.Lett. **196B** (1987) 325
A.Schwarz, Nucl.Phys. **B317** (1989) 323
- [39] M. Jimbo, T. Miwa, Publ.RIMS, Kyoto Univ., **19** (1983) 943-1001
- [40] K.Ueno, K.Takasaki, Adv.Studies in Pure Math., **4** (1984) 1-95
- [41] S.Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, 2001
Д.П.Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1977
- [42] A.Alexandrov, A.Mironov and A.Morozov, to appear
- [43] A.Grothendieck, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **242** (1997) 243-283; *Esquisse d'un programme*, **243** (1997) 3-43
G.V.Belyi, Math. USSR Izvestija, **14:2** (1980) 247-256
G.B.Shabat and V.A.Voevodsky, The Grothendieck Festschrift, Birkhauser, 1990, V.III., p.199-227
A.Levin and A.Morozov, Phys.Lett. **B243** (1990) 207
S.K.Lando and A.K.Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Encycl. of Math. Sciences, **141**, Springer, 2004
N.Adrianov, N.Amburg, V.Dremov, Yu.Levitskaya, E.Kreines, Yu.Kochetkov, V.Nasretdinova and G.Shabat, arXiv: 0710.2658
- [44] A.Mironov, A.Morozov and S.Natanzon, arXiv:0909.1164v2
- [45] M.Atiah, I.H.E.S. Publ.Math. **68** (1988) 175-186
- [46] R.Dijkgraaf and E.Witten, Comm.Math.Phys. **129** (1990) 393-429
- [47] A.Morozov, Sov. Phys. Usp. **35** (1992) 671-714
A. Mironov, A. Morozov and L. Vinet, Teor.Mat.Fiz. **100** (1994) 119-131 (Theor.Math.Phys. **100** (1995) 890-899), hep-th/9312213
A.Gerasimov, S.Khoroshkin, D.Lebedev, A.Mironov and A.Morozov, Int.J.Mod.Phys. **A10** (1995) 2589-2614, hep-th/9405011
S.Kharchev, A.Mironov and A.Morozov, q-alg/9501013
A.Mironov, hep-th/9409190; Theor.Math.Phys. **114** (1998) 127, q-alg/9711006

Раздел 7. Алгебра дифференциальных операторов, порожденных диаграммами Юнга

1. ВВЕДЕНИЕ

Центр A_n групповой алгебры симметрической группы S_n играет главную роль при описании представлений как самой симметрической группы, так и матричной группы $Gl(n)$. Ее аналогом для бесконечной симметрической группы является алгебра A_∞ классов сопряженности конечных перестановок бесконечного множества [5]. Ее естественными образующими являются диаграммы Юнга произвольной степени.

Мы строим точное представление алгебры A_∞ в алгебре дифференциальных операторов от бесконечного числа переменных. Диаграммам Юнга Δ отвечают при этом дифференциальные операторы $W(\Delta)$, тесно связанные с числами Гурвица, матричными интегралами и интегрируемыми системами [28, 13, 27, 9, 7]. Мы доказываем, что функции Шура образуют полный набор общих собственных функций операторов $W(\Delta)$, и находим соответствующие собственные значения. Решающую роль в конструкции играют переменные Мивы, естественно возникающие в теории матричных моделей [26, 24].

Во втором параграфе мы определяем алгебру диаграмм Юнга, изоморфную алгебре классов сопряженности конечных перестановок бесконечного множества, и выражаем ее структурные константы через структурные константы алгебр A_n . В третьем параграфе мы строим представление универсальной обертывающей алгебры $U(gl(\infty))$ в алгебре дифференциальных операторов от переменных Мивы. Используя это представление мы в четвертом параграфе сопоставляем каждой диаграмме Юнга дифференциальный оператор $W(\Delta)$ от переменных Мивы, имеющий очень простой вид. Это сопоставление порождает точное представление алгебры A_∞ .

Операторы $W(\Delta)$ сохраняют подпространство P всех симметрических полиномов от переменных Мивы. Далее мы изучаем дифференциальные операторы $W(\Delta) = W(\Delta)|_P$ от переменных $p = \{p_i\}$, образующих естественный базис в пространстве P . В пятом параграфе мы доказываем, что функции Шура $s_R(p)$ образуют полную систему собственных функций для $W(\Delta)$, и находим соответствующие собственные значения. В шестом параграфе мы приводим алгоритм вычисления операторов $W(\Delta)$. При этом оказывается, что простейший из операторов $W([2])$ совпадает с "cut-and-join" оператором [17], играющим важную роль в теории чисел Гурвица и пространств модулей.

В последнем седьмом параграфе мы интерпретируем операторы $W(\Delta)$ как аналоги "cut-and-join" оператора для произвольной диаграммы Юнга. Мы доказываем, в частности, что специальная производящая функция для чисел Гурвица удовлетворяет простому дифференциальному уравнению, позволяющему последовательно находить все числа Гурвица.

2. АЛГЕБРА A_∞ ДИАГРАММ ЮНГА

1. Напомним сначала нужные нам стандартные факты. Обозначим через $|\mathfrak{M}|$ число элементов в конечном множестве \mathfrak{M} и через S_n симметрическую группу, действующую перестановками на множестве \mathfrak{M} , где $|\mathfrak{M}| = n$. Перестановка $g \in S_n$ порождает подгруппу $\langle g \rangle$, действие которой разбивает \mathfrak{M} на орбиты $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k$. Набор чисел $|\mathfrak{M}_1|, \dots, |\mathfrak{M}_k|$ называется *циклическим типом перестановки* g . Он образует диаграмму Юнга $\Delta(g) = [|\mathfrak{M}_1|, \dots, |\mathfrak{M}_k|]$ степени n . Перестановки сопряжены в S_n , если и только если они имеют одинаковый циклический тип.

Линейные комбинации перестановок из S_n образуют групповую алгебру $G_n = G(S_n)$. Умножение в этой алгебре будет обозначаться "o". Сопоставим каждой диаграмме Юнга Δ сумму $G_n(\Delta) \in G_n$ всех перестановок циклического типа Δ . Эти суммы образуют базис *алгебры классов сопряженности* $A_n^\circ \subset G_n$, совпадающей с центром G_n .

Обозначим через $C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta$ структурные константы алгебры A_n в этом базисе. Другими словами,

$$G_n(\Delta_1) \circ G_n(\Delta_2) = \sum_{\Delta \in \mathcal{A}_n} C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta G_n(\Delta),$$

где \mathcal{A}_n – множество всех диаграмм Юнга Δ степени $|\Delta| = n$.

2. Аналогом алгебры A_n° в бесконечномерном случае является центр A_∞ полугрупповой алгебры полугруппы B_∞ ([5]). Полугруппа B_∞ состоит из пар (d, σ) , где d подмножество множества натуральных чисел \mathbb{N} и $\sigma : d \rightarrow d$ – перестановка. Умножение задается формулой $(d_1, \sigma_1)(d_2, \sigma_2) = (d_1 \cup d_2, \sigma_1 \sigma_2)$.

Класс сопряженности перестановки (d, σ) в группе S_∞ конечных перестановок множества \mathbb{N} описывается диаграммой Юнга $[d, \sigma]$ степени $|d|$. Сопоставим диаграмме Юнга Δ орбиту $[\Delta] = \{(d, \sigma) \mid [d, \sigma] = \Delta\}$.

Суммы $G_\infty(\Delta) = \sum_{(d, \sigma) \in [\Delta]} (d, \sigma)$ порождают центр A_∞ полугрупповой алгебры полугруппы B_∞ . Таким образом множество всех диаграмм Юнга образуют естественный базис алгебры A_∞ . Согласно [5] эта алгебра естественно изоморфна алгебре сдвинутых симметрических функций [11].

3. Выразим теперь структурные константы алгебры A_∞ через структурные константы алгебры A_n° .

Представим сначала алгебру A_n° как алгебру, порожденную диаграммами Юнга. Другими словами, мы будем рассматривать A_n° как векторное пространство с базисом \mathcal{A}_n и умножением

$$\Delta_1 \circ \Delta_2 = \sum_{\Delta \in \mathcal{A}_n} C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta \Delta.$$

Структурные константы $C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta$ называются *константами связи* и играют важную роль в различных разделах математики.

Рассмотрим также гомоморфизм векторных пространств $\rho_k : A_n^\circ \rightarrow A_{n+k}^\circ$, где $\rho_k(\Delta) = \frac{(r+k)!}{r!k!} \Delta^k$, где $\Delta^k = [\Delta, \underbrace{1, \dots, 1}_k]$ и r – число строк длины 1 в диаграмме Δ .

Зададим умножение между диаграммами произвольной степени $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ равенством: $\Delta_1 \Delta_2 = \sum_{n=\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}}^{|\Delta_1|+|\Delta_2|} \{\Delta_1 \Delta_2\}_n$, где $\{\Delta_1 \Delta_2\}_n = \rho_{(n-|\Delta_1|)}(\Delta_1) \circ \rho_{(n-|\Delta_2|)}(\Delta_2)$ при $n = \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ и

$$\{\Delta_1 \Delta_2\}_n = \rho_{(n-|\Delta_1|)}(\Delta_1) \circ \rho_{(n-|\Delta_2|)}(\Delta_2) - \sum_{k=\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}}^{n-1} \rho_{(n-k)}(\{\Delta_1 \Delta_2\}_k) \quad \text{при}$$

$$n > \max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$$

Таким образом

$$\Delta_1 \Delta_2 = \sum_{\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} \leq |\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|} \bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta \Delta,$$

где структурные константы $\bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta$ очевидным образом выражаются через константы связи, причем $\bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta = C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta$ при $|\Delta| = |\Delta_1| = |\Delta_2|$.

Пример 2.1. Пусть $\Delta_1 = [1]$ и $\Delta_2 = [2]$. Тогда $\rho_1([1]) = 2[1, 1]$, $\rho_2([1]) = 3[1, 1, 1]$, $\rho_1([2]) = [2, 1]$. Следовательно, $\{\Delta_1 \Delta_2\}_2 = 2[1, 1] \circ [2] = 2[2]$, $\{\Delta_1 \Delta_2\}_3 = 3[1, 1, 1] \circ [2, 1] - 2[2, 1] = [2, 1]$.

Пример 2.2. Пусть $\Delta_1 = [2]$ и $\Delta_2 = [2]$. Тогда $\rho_1([2]) = [2, 1]$, $\rho_2([2]) = [2, 1, 1]$, $\rho_1([1, 1]) = 3[1, 1, 1]$, $\rho_2([1, 1]) = 6[1, 1, 1, 1]$, $\rho_1([3]) = [3, 1]$. Следовательно, $\{\Delta_1 \Delta_2\}_2 = [2] \circ [2] = [1, 1]$, $\{\Delta_1 \Delta_2\}_3 = [2, 1] \circ [2, 1] - 3[1, 1, 1] = 3[3]$ и $\{\Delta_1 \Delta_2\}_4 = [2, 1, 1] \circ [2, 1, 1] - 3[3, 1] - 6[1, 1, 1, 1] = 2[2, 2]$.

Теорема 2.1. Структурные константы алгебры A_∞ в базисе $\{G_\infty(\Delta) | \Delta \in \mathcal{A}\}$ равны $\bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta$, то есть $G_\infty(\Delta_1)G_\infty(\Delta_2) = \sum_{\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} \leq |\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|} \bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta G_\infty(\Delta)$,

Proof. Произведение формальных сумм $G_\infty(\Delta_1)$ и $G_\infty(\Delta_2)$ является конечной суммой формальных сумм вида $G_\infty(\Delta)$, где $\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} \leq |\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|$. Если $|\Delta_1| = |\Delta_2| = |\Delta| = n$, то $G_\infty(\Delta) = \sum_g C_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta g G_n(\Delta) g^{-1}$, где сумма берется по всем финитным перестановкам g множества \mathbb{N} , не сохраняющим $\{1, 2, \dots, n\}$. По тем же соображения, формальная сумма $G_\infty(\Delta)$ для $|\Delta_1| + 1 = |\Delta_2| + 1 = |\Delta| \in \mathcal{A}_n$ равна $\sum_g C_{\rho_1(\Delta_1), \rho_1(\Delta_2)}^\Delta g G_n(\Delta) g^{-1}$ минус $\rho_1(G_\infty(\hat{\Delta}))$, где $\Delta = \rho_1(\hat{\Delta})$. Аналогичное рассуждение доказывает утверждение теоремы для всех Δ_1, Δ_2 одинаковой степени. Если же $|\Delta_1| < |\Delta_2| = |\Delta|$, то слагаемое $G_\infty(\Delta)$, для произведения Δ_1 и Δ_2 , совпадает со слагаемым $G_\infty(\Delta)$, для произведения $\hat{\Delta}_1$ и Δ_2 , где $\hat{\Delta}_1 = \rho_{|\Delta_2| - |\Delta_1|}(\Delta_1)$. \square

Теорема 2.2. Операция $\Delta_1 \Delta_2 = \sum_{\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\} \leq |\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|} \bar{C}_{\Delta_1, \Delta_2}^\Delta \Delta$, задает структуру коммутативной ассоциативной алгебры на векторном пространстве, порожденном всеми диаграммами Юнга.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АЛГЕБРЫ $U(\mathfrak{gl}(\infty))$

Рассмотрим множество формальных дифференциальных операторов $D_{ab} = \sum_{e \in \{1, \dots, N\}} X_{ae} \frac{\partial}{\partial X_{be}}$ от переменных Мивы $\{X_{ij} | i, j \leq N\}$. Умножение операторов

$$\text{определяется правилом } D_{ab} D_{cd} = \sum_{e_1, e_2 \in \{1, \dots, N\}} X_{ae_1} X_{ce_2} \frac{\partial}{\partial X_{be_1}} \frac{\partial}{\partial X_{de_2}} + \delta_{bc} \sum_{e \in \{1, \dots, N\}} X_{ae} \frac{\partial}{\partial X_{de}}.$$

Коммутационные соотношения для операторов D_{ab} совпадают с коммутационными соотношениями, с которыми элементарные матрицы e_{ab} порождают универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{gl}(N))$. Поэтому операторы D_{ab} порождают алгебру, естественно изоморфную алгебре $U(\mathfrak{gl}(N))$.

В пределе $N \rightarrow \infty$ возникает алгебра U_∞ формальных дифференциальных операторов, являющихся конечной или счетной суммой операторов вида $: D_{a_1 b_1} \cdots D_{a_n b_n} := \sum_{e_1, \dots, e_n \in \mathbb{N}} X_{a_1 e_1} \cdots X_{a_n e_n} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial X_{b_n e_n}}$. Число $|\mathcal{U}| = n$ назовем

степенью оператора \mathcal{U} . Линейные комбинации операторов одинаковой степени будут называться *однородными операторами*.

Таким образом, векторное пространство U_∞ разлагается в прямую сумму $U_\infty = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n$ подпространств однородных операторов степени n . Рассмотрим проекцию $pr_n : U_\infty \rightarrow U_n$, сохраняющую операторы степени n и переводящую в 0 другие однородные операторы.

Введем на U_n умножение " \circ " равенством $\mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 = pr_n(\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2)$. Это умножение превращает U_n в ассоциативную алгебру U_n° .

Рассмотрим вложение векторных пространств $\varrho_k : U_n \rightarrow U_{n+k}$, где $\varrho_k(\cdot) = \frac{1}{k!} \sum_{c_1, \dots, c_k \in \mathbb{N}} D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_k c_k} D_{a_1 b_1} \cdots D_{a_n b_n} \cdot$. Операторы \mathcal{U} и $\varrho_k(\mathcal{U})$ одинаково действуют на мономы степени $n+k$ от переменных Мивы $\{X_{i,j}\}$.

Теорема 3.1. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 &= \sum_{n=\max\{|\mathcal{U}_1|, |\mathcal{U}_2|\}}^{|\mathcal{U}_1|+|\mathcal{U}_2|} \{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_n, \quad \text{где } \{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_n = \varrho_{(n-|\mathcal{U}_1|)}(\mathcal{U}_1) \circ \varrho_{(n-|\mathcal{U}_2|)}(\mathcal{U}_2) \\ \text{при } n &= \max\{|\mathcal{U}_1|, |\mathcal{U}_2|\} \quad \text{и} \quad \{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_n = \varrho_{(n-|\mathcal{U}_1|)}(\mathcal{U}_1) \circ \varrho_{(n-|\mathcal{U}_2|)}(\mathcal{U}_2) \\ - \sum_{k=\max\{|\mathcal{U}_1|, |\mathcal{U}_2|\}}^{n-1} \varrho_{(n-k)}(\{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_k) \quad \text{при } n > \max\{|\mathcal{U}_1|, |\mathcal{U}_2|\}. \end{aligned}$$

Proof. Докажем сначала утверждение теоремы для $|\mathcal{U}_1| = |\mathcal{U}_2| = 1$, то есть $\mathcal{U}_1 = \sum_{e \in \mathbb{N}} X_{a_1 e} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e}}$, $\mathcal{U}_2 = \sum_{e \in \mathbb{N}} X_{a_2 e} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e}}$. В этом случае $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 = \delta_{b_1, a_2} \sum_{e \in \mathbb{N}} X_{a_1 e} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e}} + \sum_{e_1, e_2 \in \mathbb{N}} X_{a_1 e_1} X_{a_2 e_2} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e_1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e_2}}$.

С другой стороны, $\{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_1 = \mathcal{U}_1 \circ \mathcal{U}_2 = \delta_{b_1, a_2} \sum_{e \in \mathbb{N}} X_{a_1 e} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e}}$ и $\varrho_1(\{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_1) = \delta_{b_1, a_2} \sum_{c \in \mathbb{N}} \sum_{e, f \in \mathbb{N}} X_{c f} X_{a_1 e} \frac{\partial}{\partial X_{c f}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e}}$.

Кроме того, $\varrho_1(\mathcal{U}_1) = \sum_{c_1 \in \mathbb{N}} \sum_{e_1, e \in \mathbb{N}} X_{c_1 f_1} X_{a_1 e_1} \frac{\partial}{\partial X_{c_1 f_1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e_1}}$ и $\varrho_1(\mathcal{U}_2) = \sum_{c_2 \in \mathbb{N}} \sum_{e_2, e \in \mathbb{N}} X_{c_2 f_2} X_{a_2 e_2} \frac{\partial}{\partial X_{c_2 f_2}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e_1}}$. Откуда

$\varrho_1(\mathcal{U}_1) \circ \varrho_1(\mathcal{U}_2) = \sum_{e_1, e_2 \in \mathbb{N}} X_{a_1 e_1} X_{a_2 e_2} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e_1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e_2}} + \delta_{b_1, a_2} \sum_{c \in \mathbb{N}} \sum_{e, f \in \mathbb{N}} X_{c f} X_{a_1 e} \frac{\partial}{\partial X_{c f}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e}}$ и $\{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_2 = \sum_{e_1, e_2 \in \mathbb{N}} X_{a_1 e_1} X_{a_2 e_2} \frac{\partial}{\partial X_{b_1 e_1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2 e_2}}$.

Таким образом, $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 = \{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_1 + \{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_2$.

Пусть теперь $|\mathcal{U}_1| = 1$, $|\mathcal{U}_2| = 2$, то есть $\mathcal{U}_1 = \sum_{e_1^1 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_1^1} \frac{\partial}{\partial X_{b_1^1 e_1^1}}$,

$\mathcal{U}_2 = \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_2^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}}$.

Тогда $\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 = \delta_{b_1^1, a_2^1} \sum_{e_1^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_1^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}} + \delta_{b_1^1, a_2^2} \sum_{e_1^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_1^1} X_{a_2^1 e_2^1} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} + \sum_{e_1^1, e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_1^1} X_{a_2^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_1^1 e_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}}$.

С другой стороны, $\{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2\}_2 = \varrho_1(\mathcal{U}_1) \circ \mathcal{U}_2 = \left(\sum_{c_1^1 \in \mathbb{N}} \sum_{f_1^1, e_1^1 \in \mathbb{N}} X_{c_1^1 f_1^1} X_{a_1^1 e_1^1} \frac{\partial}{\partial X_{c_1^1 f_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_1^1 e_1^1}} \right) \circ \left(\sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_2^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}} \right) = \delta_{b_1^1, a_2^1} \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}}$ и

$$\varrho_1(\{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\}_2) = \sum_{c_1^1 \in \mathbb{N}} \sum_{f_1^1, e_1^1 \in \mathbb{N}} \delta_{b_1^1, a_1^1} \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{c_1^1 f_1^1} X_{a_1^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \\ \frac{\partial}{\partial X_{c_1^1 f_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}} + \delta_{b_1^1, a_2^2} \sum_{c_1^1 \in \mathbb{N}} \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{c_1^1 f_1^1} X_{a_1^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{c_1^1 f_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}}.$$

$$\text{Кроме того, } \varrho_2(\mathcal{U}_1) \circ \varrho_1(\mathcal{U}_2) = \sum_{e_1^1, e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{a_1^1 e_1^1} X_{a_2^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{b_1^1 e_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}} + \\ \sum_{c_1^1 \in \mathbb{N}} \sum_{f_1^1, e_1^1 \in \mathbb{N}} \delta_{b_1^1, a_2^2} \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{c_1^1 f_1^1} X_{a_1^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{c_1^1 f_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}} + \\ \delta_{b_1^1, a_2^2} \sum_{c_1^1 \in \mathbb{N}} \sum_{e_2^1, e_2^2 \in \mathbb{N}} X_{c_1^1 f_1^1} X_{a_1^1 e_2^1} X_{a_2^2 e_2^2} \frac{\partial}{\partial X_{c_1^1 f_1^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^1 e_2^1}} \frac{\partial}{\partial X_{b_2^2 e_2^2}}.$$

Таким образом, $\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 = \{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\}_1 + \{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2\}_2$.

Добавляя в это рассуждение переменные $X_{a_2^i e_2^i}$, $X_{b_2^i e_2^i}$ находим, что если утверждение теоремы верно для пары $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, где $|\mathcal{U}_1| = 1$, $|\mathcal{U}_2| < m$, то оно верно и для пары $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, где $|\mathcal{U}_1| = 1$, $|\mathcal{U}_2| = m$. Отсюда по индукции следует, что утверждение теоремы верно для любой пары $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, где $|\mathcal{U}_1| = 1$.

Аналогичная индукция по $|\mathcal{U}_1|$ завершает доказательство теоремы. \square

4. АЛГЕБРА \mathcal{W}_∞ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Нам понадобится бесконечномерный аналог конечномерных операторов Капелли [32] [31] [22]. В отличие от классических операторов с фиксированным числом переменным, введенные нами операторы от бесконечного числа переменных образуют алгебру дифференциальных операторов.

Сопоставим диаграмме Юнга $\Delta = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k]$ со строками длины $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k$ числа $m_j = m_j(\Delta) = |\{i | \mu_i = j\}|$ и $\kappa(\Delta) = (|\text{Aut}(\Delta)|)^{-1} = (\prod_j m_j! j^{m_j})^{-1}$. Сопоставим диаграмме Юнга Δ оператор $\mathcal{W}(\Delta) = \kappa(\Delta) : \prod_j (\text{tr } D^j)^{m_j} \in U_\infty$, где D — матрица с элементами D_{ab} .

Пример 4.1. $\mathcal{W}([1]) = \sum_{a \in \mathbb{N}} : D_{aa} :$ $\mathcal{W}([2]) = \frac{1}{2} \sum_{a, b \in \mathbb{N}} : D_{ab} D_{ba} :$

Обозначим через \mathcal{W}_n° векторное пространство, порожденное операторами вида $\mathcal{W}(\Delta)$, где $|\Delta| = n$.

Лемма 4.1. Операция "о" порождает на \mathcal{W}_n° структуру алгебры. Соответствие $\Delta \mapsto \mathcal{W}(\Delta)$ порождает изоморфизм алгебр $\psi_n : A_n^\circ \rightarrow \mathcal{W}_n^\circ$.

Proof. Сопоставим каждой перестановке $g \in S_n$ оператор $\mathcal{W}(g) = \kappa(\Delta(g)) \sum_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} : D_{a_1 a_{g(1)}} \cdots D_{a_n a_{g(n)}} :$. Тогда $\mathcal{W}(\Delta(g)) = \mathcal{W}(g)$. Поэтому утверждение леммы следует из равенства $\mathcal{W}(\Delta(g_1) \circ \Delta(g_2)) = \mathcal{W}(g_1) \circ \mathcal{W}(g_2)$ для $g_1, g_2 \in S_n$. \square

Лемма 4.2. Вложение $\varrho_k : U_n \rightarrow U_{n+k}$ порождает вложение $\varrho_k : \mathcal{W}_n^\circ \rightarrow \mathcal{W}_{n+k}^\circ$, где $\varrho_k \psi_n(\Delta) = \psi_{n+k} \rho_k(\Delta)$ при $\Delta \in A_n$.

Proof. Отображение $\varrho_k : U_n \rightarrow U_{n+k}$ порождает соответствие $\varrho_k(\mathcal{W}(\Delta)) = \frac{1}{k!} \mathcal{W}$. Согласно нашим определениям, $\psi_n(\Delta) = \kappa(\Delta) \sum_{a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} : D_{a_1 a_{g(1)}} \cdots D_{a_n a_{g(n)}} :$ и $\varrho_k \psi_n(\Delta) = \frac{\kappa(\Delta)}{k!} \sum_{c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} : D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_k c_k} D_{a_1 a_{g(1)}} \cdots D_{a_n a_{g(n)}} :$

С другой стороны, $\rho_k(\Delta) = \frac{(m_1+k)!}{m_1!k!} \Delta^k$ и

$$\psi_{n+k}\rho_k(\Delta) = \frac{(m_1+k)!}{m_1!k!} \kappa(\Delta) \left(\frac{(m_1+k)!}{m_1!}\right)^{-1} \sum_{c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} : D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_k c_k} D_{a_1 a_{g(1)}} \cdots D_{a_n a_{g(n)}} :=$$

$$\frac{\kappa(\Delta)}{k!} \sum_{c_1, \dots, c_k, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}} : D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_k c_k} D_{a_1 a_{g(1)}} \cdots D_{a_n a_{g(n)}} : \quad \square$$

Пример 4.2. Пусть $\Delta = [1]$. Тогда $\rho_k(\Delta) = (k+1)[1, 1, \dots, 1]$ и

$$\psi_{k+1}(\rho_k(\Delta)) = \psi_{k+1}((k+1)[1, 1, \dots, 1]) = \frac{(k+1)}{(k+1)!} \sum_{c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{N}} : D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_n c_n} :$$

С другой стороны, $\psi_1([1]) = \sum_{e \in \mathbb{N}} : D_{cc} : u$

$$\varrho_k\left(\sum_{e \in \mathbb{N}} : D_{cc} :\right) = \frac{1}{k!} \sum_{e, e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}} \sum_{e \in \mathbb{N}} : D_{cc} D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_n c_n} :$$

Пример 4.3. Пусть $\Delta = [2]$. $\psi_2([2]) = \frac{1}{2} \sum_{a, b \in \mathbb{N}} : D_{ab} D_{ba} : u$

$$\varrho_k\left(\frac{1}{2} \sum_{a, b \in \mathbb{N}} : D_{ab} D_{ba} :\right) = \frac{1}{2k!} \sum_{a, b, e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}} : D_{ab} D_{ba} D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_n c_n} :$$

С другой стороны, $\rho_k(\Delta) = [2, 1, \dots, 1]$ и

$$\psi_{k+2}(\rho_k(\Delta)) = \psi_{k+2}([2, 1, \dots, 1]) = \frac{1}{2k!} \sum_{a, b, e_1, \dots, e_k \in \mathbb{N}} : D_{ab} D_{ba} D_{c_1 c_1} \cdots D_{c_n c_n} :$$

Обозначим через $\mathcal{W}_\infty \subset U_\infty$ подалгебру, порожденную дифференциальными операторами $\mathcal{W}(\Delta)$. Сопоставляя теоремы 2.2, 2.1, 3.1 с леммами 4.1, 4.2, получаем

Теорема 4.1. Изоморфизмы ψ_n порождают изоморфизм алгебр $\psi : A_\infty \rightarrow \mathcal{W}_\infty$.

5. ФУНКЦИИ ШУРА

Функции Шура от n переменных отвечают диаграммам Юнга $R = \{R_1 \geq R_2 \geq \dots \geq R_m > 0\}$, где $n \geq m$. Они определяются формулой

$$s_R(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det[x_i^{R_j+n-j}]_{1 \leq i, j \leq n}}{\det[x_i^{n-j}]_{1 \leq i, j \leq n}},$$

где $R_i = 0$ при $m < i \leq n$. Свойство стабильности $s_R(x_1, \dots, x_n, 0) = s_R(x_1, \dots, x_n)$ позволяет определить s_R на произвольном конечном наборе переменных.

Определим функцию Шура на финитных матрицах $X \in gl(n) \subset gl(\infty)$ формулой $s_R(X) = s_R(x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n – собственные значения матрицы X . Функции $s_R(X)$ образуют базис в векторном пространстве \mathcal{P} всех симметрических полиномов от переменных Мивы.

Функции $p_i = \text{tr } X^i$, где X – матрица с элементами X_{ij} , образуют другой естественный базис пространства \mathcal{P} . При этом $s_R(X) = \tilde{s}_R(p_1, p_2, \dots)$, где $\tilde{s}_R(p_1, p_2, \dots) = \det[P_{R_i+j-i}(p_1, p_2, \dots)]_{1 \leq i, j \leq n}$, а функции $P_i(p_1, p_2, \dots)$ определяются соотношением $\exp\left(\sum_k p_k x^k\right) \equiv \sum_i P_i(p_1, p_2, \dots) x^i$. [6].

Пусть $\dim R$ – размерность представления симметрической группы $S_{|R|}$, отвечающего диаграмме R , и $\chi_R(X_\Delta)$ – значение характера этого представления

на элементе циклического типа $\Delta^{|R|-|\Delta|}$. Положим $d_R = \frac{\dim R}{|R|!} = \frac{\prod_{i < j=1}^{|R|} (\mu_i - \mu_j - i + j)}{\prod_{i=1}^{|R|} (\mu_i + |R| - i)!}$ и

$m_1 = m_1(\Delta)$.

Обозначим через $\varphi_R(\Delta)$ функцию, равную $\frac{\kappa(\Delta)}{d_R m_1! (|R|-|\Delta|-m_1)!} \chi_R(X_\Delta)$ при $|R| - |\Delta| \geq m_1$ и 0 в противном случае. Тогда $\varphi_R(\Delta^k) = \frac{m_1! k!}{(m_1+k)!} \varphi_R(\Delta)$ при $k = |R| - |\Delta|$.

Теорема 5.1. *Функции $s_R(X)$ являются собственными функциями операторов $\mathcal{W}(\Delta)$. Они образуют полную систему собственных функций для ограничений $W(\Delta) = \mathcal{W}(\Delta)|_{\mathcal{P}}$, причем $W(\Delta)(s_R) = \varphi_R(\Delta)s_R$. В частности, $\varphi_R(\Delta_1)\varphi_R(\Delta_2) = \sum_{\Delta} \bar{C}_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta} \varphi_R(\Delta)$, где $\bar{C}_{\Delta_1\Delta_2}^{\Delta}$ – структурные константы алгебры A_{∞} , найденные в разделе 2.*

Proof. Рассмотрим регулярное представление алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$ в алгебре полиномиальных функций от матричных элементов $\mathfrak{gl}(N)$. Центр $Z(U(\mathfrak{gl}(N)))$ сохраняет векторное пространство \mathcal{P} . Алгебра $Z(U(\mathfrak{gl}(N)))$ аддитивно порождается операторами $T(\Delta)$, ассоциированными с диаграммами Юнга Δ , причем $T(\Delta)(f) = \mathcal{W}(\Delta)(f)$ для $f \in \mathcal{P}$. Кроме того, согласно теореме Вейля [4], функции Шура $s_R(X)$ образуют полную систему собственных функций операторов $T(\Delta)$. Переходя к пределу $N \rightarrow \infty$, находим, что функции Шура образуют полную систему собственных функций операторов $W(\Delta)$.

Найдем собственные значения операторов. Сопоставим диаграмме Юнга Δ моном $p(\Delta) = \kappa(\Delta)p_1^{m_1(\Delta)}p_2^{m_2(\Delta)}\dots p_n^{m_n(\Delta)}$. Согласно [6, гл.1.7], $p(\Delta) = \sum_{R:|R|=|\Delta|} d_R \varphi_R(\Delta) \tilde{s}_R$.

$$\begin{aligned} \text{Поэтому } p(\Delta)e^{p_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} p(\Delta) \frac{p_1^k}{k!} = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m_1+k)!}{m_1!k!} p(\Delta^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|R|=|\Delta|+k} \frac{(m_1+k)!}{m_1!k!} d_R \varphi(\Delta^k) \tilde{s}_R = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|R|=|\Delta|+k} d_R \varphi(\Delta) \tilde{s}_R &= \sum_R d_R \varphi(\Delta) \tilde{s}_R. \end{aligned}$$

С другой стороны, согласно [6, гл.1.4, пример 3], $e^{p_1} = \sum_R d_R \tilde{s}_R(p)$, откуда $p(\Delta)e^{p_1} = W(\Delta)(e^{p_1}) = \sum_R d_R W(\Delta) \tilde{s}_R$. Таким образом, $\sum_R d_R W(\Delta) \tilde{s}_R = \sum_R d_R \varphi(\Delta) \tilde{s}_R$.

Мы уже доказали, что s_R образует полную систему собственных функций оператора \mathcal{W} . Поэтому последнее равенство влечет $W(\Delta)(s_R) = \varphi_R(\Delta)s_R$. \square

Обозначим через W_{∞} алгебру операторов, порожденную всеми операторами $W(\Delta)$. Теорема 5.1 вместе с линейной независимостью функций χ_R (а значит и φ_R) влечет

Теорема 5.2. *Соответствие $\Delta \mapsto W(\Delta)$ порождает изоморфизм алгебр A_{∞} и W_{∞}*

6. ПЕРВЫЕ W-ОПЕРАТОРЫ

Представим теперь операторы $W(\Delta)$ как дифференциальные операторы от переменных $\{p_k\}$. Используя соотношения

$$D_{ab}F(p) = X_{ac} \frac{\partial}{\partial X_{bc}} F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k(X^k)_{ab} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k}$$

и

$$D_{a'b'}(X^k)_{ab} = X_{a'c'} \frac{\partial}{\partial X_{b'c'}} (X^k)_{ab} = \sum_{j=0}^{k-1} X_{a'c'} (X^j)_{ab'} (X^{k-j-1})_{c'b} = \sum_{j=0}^{k-1} (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b},$$

находим

$$D_{a'b'} D_{ab} F(p) = \sum_{k,l=1}^{\infty} kl (X^l)_{a'b'} (X^k)_{ab} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} k (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k}$$

Таким образом,

$$: D_{a'b'} D_{ab} : F(p) = \sum_k \left(k \sum_{j=1}^{k-1} (X^j)_{ab'} (X^{k-j})_{a'b} \right) \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} + \sum_{k,l} kl (X^k)_{ab} (X^l)_{a'b'} \frac{\partial^2 F(p)}{\partial p_k \partial p_l}.$$

Это соотношение позволяет найти все операторы W . В частности,

$$\begin{aligned} W([1]) &= \text{tr } D = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \frac{\partial}{\partial p_k} \\ W([2]) &= \frac{1}{2} : \text{tr } D^2 : = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{\infty} \left((a+b) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + ab p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) \\ W([1, 1]) &= \frac{1}{2!} : (\text{tr } D)^2 : = \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^{\infty} a(a-1) p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \sum_{a,b=1}^{\infty} ab p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} \right) \\ W([3]) &= \frac{1}{3} : \text{tr } D^3 : = \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1} abc p_{a+b+c} \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} + \frac{1}{2} \sum_{a+b=c+d} cd (1 - \delta_{ac} \delta_{bd}) p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_c \partial p_d} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{a,b,c \geq 1} (a+b+c) (p_a p_b p_c + p_{a+b+c}) \frac{\partial}{\partial p_{a+b+c}} \\ W([2, 1]) &= \frac{1}{2} : \text{tr } D^2 \text{tr } D : = \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} (a+b)(a+b-2) p_a p_b \frac{\partial}{\partial p_{a+b}} + \frac{1}{2} \sum_{a,b \geq 1} ab(a+b-2) p_{a+b} \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a,b,c \geq 1} (a+b) c p_a p_b p_c \frac{\partial^2}{\partial p_{a+b} \partial p_c} + \frac{1}{2} \sum_{a,b,c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} \\ W([1, 1, 1]) &= \frac{1}{3!} : (\text{tr } D)^3 : = \frac{1}{6} \sum_{a \geq 1} a(a-1)(a-2) p_a \frac{\partial}{\partial p_a} + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{a,b} ab(a+b-2) p_a p_b \frac{\partial^2}{\partial p_a \partial p_b} + \frac{1}{6} \sum_{a,b,c \geq 1} abc p_a p_b p_c \frac{\partial^3}{\partial p_a \partial p_b \partial p_c} \end{aligned}$$

7. ЧИСЛА ГУРВИЦА

Каждый голоморфный морфизм степени n римановых поверхностей $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ сопоставляет точке $s \in \Omega$ локальный инвариант: диаграмму Юнга $\Delta(f, s)$ степени n , длины строк которой равны степеням отображения f в точках полного прообраза $f^{-1}(s) = \{s^1, \dots, s^k\}$. Более 100 лет назад Гурвиц [19] поставил проблему вычисления чисел Гурвица

$$H((s_1, \Delta_1), \dots, (s_k, \Delta_k) | \Omega) = \sum_{f \in \text{Cov}_n(\Omega, \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\})} \frac{1}{|\text{Aut}(f)|}$$

для произвольного набора $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ диаграмм Юнга степени n . Здесь $|\text{Aut}(f)|$ – порядок группы автоморфизмов отображения f , а $\text{Cov}_n(\Omega, \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\})$ – множество классов биголоморфной эквивалентности голоморфных морфизмов $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ с множеством критических значений $s_1, \dots, s_k \in \Omega$ и локальными инвариантами $\Delta(f, s_i) = \Delta_i$.

Это число зависит лишь от рода $g(\Omega)$ поверхности Ω и диаграмм $\Delta_1, \dots, \Delta_k$. Положим $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_k \rangle_{g(\Omega)} = H((s_1, \Delta_1), \dots, (s_k, \Delta_k) | \Omega)$. Числа Гурвица произвольного рода легко выражаются через числа Гурвица $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_k \rangle = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_k \rangle_0$ рода 0 [12].

Определяющим свойством чисел Гурвица является соотношение ассоциативности [15]

$$\langle \Delta_1, \dots, \Delta_k \rangle = \sum_{\Upsilon \in \mathcal{A}_n} \langle \Delta_1, \dots, \Delta_r, \Upsilon \rangle |\text{Aut}(\Upsilon)| \langle \Upsilon, \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_k \rangle.$$

Числа Гурвица накрытий с тремя критическими значениями связаны со структурными константами алгебры A_n формулой $\langle \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \rangle = C_{\Delta_1, \Delta_2}^{\Delta_3} |\text{Aut}(\Delta_3)|^{-1}$. Произвольные числа Гурвица выражаются через эти простейшие числа Гурвица по формуле

$$\langle \Delta_1, \dots, \Delta_k \rangle = \sum_{\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{k-1} \in \mathcal{A}_n} \langle \Delta_1, \Delta_2, \Upsilon_1 \rangle |\text{Aut}(\Upsilon_1)| \langle \Upsilon_1, \Delta_3, \Upsilon_2 \rangle \\ |\text{Aut}(\Upsilon_2)| \dots |\text{Aut}(\Upsilon_{k-1})| \langle \Upsilon_{k-1}, \Delta_{k-1}, \Delta_k \rangle,$$

(см., например, [12]).

Числа Гурвица связаны с теорией струн [16], зеркальной симметрией [15], теорией особенностей [1], матричными моделями [25, 27], интегрируемыми системами [30, 23, 29], теорией Янга-Милса [14, 23] и теорией модулей кривых [21, 20, 27].

Сопоставим диаграммам Юнга $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ и Δ , где $|\Delta_i| \leq |\Delta|$ для всех i , числа $\langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \rangle$, равные числам Гурвица $\langle \tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_k, \dots, \tilde{\Delta}_k, \Delta \rangle$, где диаграмма Юнга $\tilde{\Delta}_i = \rho_{|\Delta| - |\Delta_i|}(\Delta_i)$ встречается ровно n_i раз. Положим $\langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \rangle = 0$, если $|\Delta_i| > |\Delta|$ хотя бы при одном i .

Сопоставим переменную β_Δ каждой диаграмме Юнга Δ и рассмотрим производящую функцию для чисел Гурвица

$$\mathcal{Z}(\{\beta_\Delta\} | p_1, p_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\Delta_1, \dots, \Delta_k \in \mathcal{A}_\infty} \sum_{n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}} \frac{\beta_{\Delta_1}^{n_1} \dots \beta_{\Delta_k}^{n_k}}{n_1! \dots n_k!} \langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \rangle p(\Delta).$$

Теорема 7.1. Для любой диаграммы Юнга Υ имеет место равенство

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta_\Upsilon} = W(\Upsilon) \mathcal{Z}$$

Proof. Утверждение теоремы означает систему соотношений между числами $\langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \rangle$. Согласно теоремам 2.1 и 5.2, эти соотношения имеют вид $\langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_i, n_i), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \rangle = \langle (\Delta_1, n_1), \dots, (\Delta_i, n_i - 1), \dots, (\Delta_k, n_k) | \Delta \circ \tilde{\Delta}_i \rangle$ и следуют из соотношения ассоциативности. \square

Производящая функция для чисел Гурвица является решением системы дифференциальных уравнений из теоремы 7.1 при начальном условии $\mathcal{Z}(0, 0, \dots | p_1, p_2, \dots) = e^{p_1}$. Это позволяет, используя теорему 7.1, выразить функцию $\mathcal{Z}(\{\beta_\Delta\} | p_1, p_2, \dots)$ и числа Гурвица через операторы $W(\Upsilon)$.

Используя теорему 7.1 можно доказать, что ограничение уравнения $\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta_{[k]}} = W([k]) \mathcal{Z}$ на область переменных, где все β_Υ , кроме $\beta_{[k]}$, равны 0, совпадает с уравнением, транзитивной факторизации [18]. Простейшие аналогичные дифференциальные уравнения для чисел Гурвица поверхностей с границей [12, 2, 3] найдены в [10].

REFERENCES

- [1] Арнольд В.И. Топологическая классификация комплексных тригонометрических полиномов и комбинаторика графов с одинаковым числом ребер и вершин // Функциональный анализ и его приложения 30(1996), 1, 1-17.
- [2] А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон Алгебра чисел Гурвица лоскутных поверхностей УМН, 61:4(370) (2006), 185-186.
- [3] А. В. Алексеевский, С. М. Натанзон Алгебра двудольных графов и числа Гурвица лоскутных поверхностей // Изв. РАН. Сер. матем., 72:4 (2008), 3-24.
- [4] Желобенко Д.П., Компактные группы Ли и их представления // "Наука", Москва, 1970 г.
- [5] Иванов В., Керов С., Алгебра классов сопряженности в симметрических группах и частичные перестановки // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 256, 1999 г. стр.95-120.
- [6] И. Макдональд, Симметрические функции и многочлены Холла, Москва, Мир 1985 г.
- [7] А.Миронов, Матричные модели двумерной гравитации, ЭЧАЯ, 33 (2002) 537; 2d gravity and matrix models. I. 2d gravity, Int. J. Mod. Phys. A9 (1994) 4355.
- [8] А.Миронов, А.Морозов, С.Натанзон, Полный набор операторов разрезания и склейки в теории Гурвица-Концевича // Теор. Матем. Физ., принято к печати.
- [9] А.Морозов, Интегрируемость и матричные модели, УФН 37 (1994) 1-55; Matrix Models as Integrable Systems, hep-th/9502091; Challenges of matrix models, hep-th/0502010.
- [10] С. М. Натанзон, Дискровые одинарные числа Гурвица // Функци. анализ и его прил., 44:1 (2010), 44-58.
- [11] Окуньков А., Ольшанский Г., Сдвинутые функции Шура // Алгебра и анализ, Том 9, 1997 г. стр.73-146.
- [12] Alexeevski A., Natanzon S., Noncommutative two-dimensional topological field theories and Hurwitz numbers for real algebraic curves. Selecta Math., New ser. v.12,n.3, 2006, p. 307-377 (arXiv: math.GT/0202164).
- [13] V.Bouchard, M.Marino, Hurwitz numbers, matrix models and enumerative geometry, arXiv:0709.1458.
- [14] Cordes S., Moore G., Ramgoolam S., Large N 2D Yang-Mills theory and topological string theory, Commun. Math. Phys., 185 (1997), 543-619.
- [15] Dijkgraaf R., Mirror symmetry and elliptic curves, The moduli spaces of curves, Progress in Math., 129 (1995), 149-163, Birkh.
- [16] Gross D.J., Taylor IV W., Twists and Wilson loops in the string theory of two dimensional QCD, Nuclear Phys., B 403 (1993), N 1-2, 395-449.
- [17] Goulden D., Jackson D.M., Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere, Proc.Amer.Math.Soc. 125 (1997), 51-60
- [18] Goulden D., Jackson D.M., Transitive factorisations in symmetric group, and combinatorial aspects of singularity theory, EUR. J. Comb. 21(2000) no. 8, 1001-1016)
- [19] Hurwitz A., Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math., Ann., Bn.39 (1891), 1-61.
- [20] M. Kazarian, KP hierarchy for Hodge integrals, arXiv:0809.3263.
- [21] Kazarian M., Lando S., An algebro-geometric proof of Witten's conjecture, arXiv: math/0601760.
- [22] S. Kerov and G. Olshanski, Polynomial functions on the set of Young diagrams, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. I, 319 (1994), 121-126.
- [23] S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, Generalized Kazakov-Migdal-Kontsevich Model: group theory aspects, Int. J. Mod. Phys. A10 (1995) 2015.
- [24] S.Kharchev, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, A.Zabrodin, Unification of All String Models with $c < 1$, Phys. Lett. **B275** (1992) 311-314, hep-th/9111037; Towards unified theory of $2d$ gravity, Nucl.Phys. **B380** (1992) 181-240, hep-th/9201013.
- [25] Kostov I.K., Staudacher M., Wynter T., Complex matrix models and statistics of branched coverings of 2D surfaces, Commun. Math. Phys. 191 (1998), 283-298.
- [26] T.Miwa, On Hirota's difference equations, Proc.Japan Acad., 58 (1982) 9-12.
- [27] A. Mironov, A. Morozov, Virasoro constraints for Kontsevich-Hurwitz partition function, JHEP 0902 (2009) 024.

- [28] A.Morozov, Sh.Shakirov, Generation of Matrix Models by W-operators, JHEP 0904 (2009) 064.
- [29] Okounkov A., Toda equations for Hurwitz numbers, arXiv:math/0004128.
- [30] Okounkov A., Pandharipande R., Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers and matrix models, I. math.AG/0101147.
- [31] T.Umeda, The Capelli identities, a century after, AMS translations(2), vol 183, 1998, pp. 51-78.
- [32] H.Weyl, Classikal groups their invariants and represintations, Princeton University Press, Princeton 1946.

Раздел 8.

Экстремальные метрики: спектральная геометрия и уравнения математической физики

1 Краткое резюме

В 2011 году изучались экстремальные свойства метрик, индуцированных на тау-поверхностях Лоусона (которые в зависимости от значений параметров являются либо торами, либо бутылками Клейна) и торах Оцуки их минимальными погружениями в стандартную трёхмерную сферу.

Благодаря недавней (2008 год) теореме Эль Суфи-Илиаса известно, что эти метрики являются экстремальными для некоторых собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами, но для каких именно было неизвестно. Задача определения номера экстремального собственного значения является довольно сложной и до сих пор была решена только в более простом случае биполярных тау-поверхностей Лоусона в 2008 году Ляпуантом.

Тем не менее, задача нахождения номеров собственных чисел, для которых метрики экстремальны, была успешно решена в работе [1] для тау-поверхностей Лоусона и в работе [2] для торов Оцуки.

Первая версия препринта [1] была написана еще в 2010 году, но в ней нашлись серьёзные ошибки, и данный препринт был значительно переписан и завершён в 2011 году, после чего он был принят к публикации в *Moscow Math. Journal*. Препринт [2] представлен в *Mathematische Nachrichten*.

Для решения задачи был предложен новый метод, основанный на комбинации средств из геометрии и уравнений математической физики. В обеих работах применялась уже упомянутая выше теорема Эль Суфи-Илиаса, метод разделения переменных, спектральная теория периодической задачи Штурма-Лиувилля. Кроме того, в работе [1] оказались совершенно необходимыми теория классического уравнения Ламе и теория уравнений Магнуса-Уинклера-Айнса, а в работе [2] была применена теория Хсянга-Лоусона редукции G -инвариантных минимальных подмногообразий.

2 Постановка задачи

Пусть M замкнутая поверхность, а g риманова метрика на M . Рассмотрим ассоциированный оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$,

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

Хорошо известно, что собственные значения

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \lambda_3(M, g) \leq \dots$$

оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования,

$$\forall t > 0 \quad \lambda_i(M, tg) = \frac{\lambda_i(M, g)}{t}.$$

Таким образом, изучение супремума функционала $\lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M является бессмысленным. Но функционал

$$\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g) \text{Area}(M, g)$$

уже является инвариантным относительно преобразований масштабирования $g \mapsto tg$, и оказывается, что вопрос о нахождении супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ функционала $\Lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M является интересным и очень трудным. Немногие результаты получены к сегодняшнему дню. Причина этого не в отсутствии интереса к вопросу, а в сложности задачи.

Янг и Яо доказали в 1980 году, что для ориентируемой поверхности M рода γ верна следующая оценка сверху,

$$\Lambda_1(M, g) \leq 8\pi(\gamma + 1).$$

Обобщение этого результата для произвольного функционала Λ_i было получено в 1993 году Коревааром, который доказал, что существует константа C такая, что для любого $i > 0$ и для любой компактной поверхности M рода γ функционал $\Lambda_i(M, g)$ ограничен,

$$\Lambda_i(M, g) \leq C(\gamma + 1)i.$$

Надо отметить, что это свойство присуще только поверхностям. В 1994 году Кольбуа и Додзюк доказали что на многообразиях M размерности $\dim M \geq 3$ функционал $\Lambda_i(M, g)$ не является ограниченным на пространстве римановых метрик g на поверхности M . Но в любой размерности данный функционал ограничен на классах конформной эквивалентности метрик, и вопрос изучения супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ функционала $\Lambda_i(M, g)$ на упомянутых конформных классах является отдельной сложной и содержательной задачей.

Функционал $\Lambda_i(M, g)$ непрерывно зависит от метрики g , но он не является дифференцируемым. Тем не менее, в 1973 Берже доказал, что для аналитических деформаций g_t правая и левая производная функционала $\Lambda_i(M, g_t)$ по t существуют. Это привело Надирашвили (1986 год) и Эль Суфи и Илиаса (2000 год) к следующему определению.

Определение. Риманова метрика g на замкнутой поверхности M называется экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если для любой аналитической деформации g_t , такой, что $g_0 = g$, выполняется следующее неравенство,

$$\left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0+} \leq 0 \leq \left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0-}.$$

Список поверхностей M и значений индекса i , таких, что максимальные или хотя бы экстремальные метрики для функционала $\Lambda_i(M, g)$ известны, крайне короткий. При этом между изучением разных случаев проходили значительные интервалы времени. Это связано с тем, что практически для каждого случая приходилось находить свой собственный метод решения.

Напомним, что полным эллиптическим интегралом второго рода называется интеграл

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} d\alpha.$$

$\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$ В 1970 году Херш доказал, что $\sup \Lambda_1(\mathbb{S}^2, g) = 8\pi$, и максимум достигается на канонической метрике на \mathbb{S}^2 . Эта максимальная метрика — единственная экстремальная метрика в данном случае.

$\Lambda_1(\mathbb{R}P^2, g)$ В 1982 году Ли и Яо доказали, что $\sup \Lambda_1(\mathbb{R}P^2, g) = 12\pi$, и максимум достигается на канонической метрике на $\mathbb{R}P^2$. Эта максимальная метрика — также единственная экстремальная метрика в данном случае.

$\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ В 1996 году Надирашвили доказал, что $\sup \Lambda_1(\mathbb{T}^2, g) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$, и максимум достигается на плоском равностороннем торе, то есть торе, у которого параллелограмм периодов состоит из двух равносторонних треугольников. В 2000 году Эль Суфи и Илиас доказали, что в данном случае существует единственная экстремальная метрика, отличная от максимальной, и это метрика на клиффордовом торе, то есть торе, параллелограммом периодов которого является квадрат.

$\Lambda_1(\mathbb{K}, g)$ В 2006 году Якобсон, Надирашвили и Полтерович доказали, что метрика на поверхности Клейна, реализованной как биполярная поверхность Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$, является экстремальной. В том же году Эль Суфи, Джакомини и Жазар доказали, что эта метрика является максимальной и единственной экстремальной метрикой для данного функционала. При этом

$$\sup \Lambda_1(\mathbb{K}, g) = 12\pi E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

где E полный эллиптический интеграл второго рода.

$\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ В 2002 году Надирашвили доказал, что $\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2, g) = 16\pi$, и максимум достигается на сингулярной метрике, которая может быть получена как метрика на объединении двух сфер равного радиуса с канонической метрикой, склеенных в точке касания.

$\Lambda_i(\mathbb{T}^2, g), \Lambda_i(\mathbb{K}, g)$ Пусть $r, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $(r, k) = 1$. Ляпуант изучал поверхности $\tilde{\tau}_{r,k}$, биполярные к лоусоновым тау-поверхностям $\tau_{r,k}$, и доказал следующий результат, опубликованный в 2008 году.

1. Если $rk \equiv 0 \pmod{2}$, то $\tilde{\tau}_{r,k}$ является тором, и метрика на нём является экстремальной для $\Lambda_{4r-2}(\mathbb{T}^2, g)$.
2. Если $rk \equiv 1 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{r,k}$ является тором, и метрика на нём является экстремальной для $\Lambda_{2r-2}(\mathbb{T}^2, g)$.
3. Если $rk \equiv 3 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{r,k}$ является бутылкой Клейна, и метрика на ней является экстремальной для $\Lambda_{r-2}(\mathbb{K}, g)$.

Учитывая крайнюю немногочисленность известных примеров экстремальных метрик, представляет большой интерес задача нахождения новых примеров. Данная задача и была предметом исследования.

3 Основные результаты

До сих пор каждый из результатов был получен особым методом, предложенным для конкретной ситуации. В работах [1] и [2] предлагается некоторый регулярный подход к построению экстремальных метрик, проиллюстрированный на двух, в каком-то смысле,

диаметрально противоположных примерах: тау-поверхностях Лоусона и торах Оцуки. Тау-поверхности Лоусона задаются простой явной параметризацией, но собственные числа их оператора Лапласа-Бельтрами «устроены» крайне сложно. Наоборот, торы Оцуки определяются сложным неявным образом и не могут быть параметризованы явно в терминах элементарных функций, но собственные числа их оператора Лапласа-Бельтрами «устроены» простым образом.

Тау-поверхность Лоусона $\tau_{m,k} \subset \mathbb{S}^3$ определяется дважды периодическим погружением

$$\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

заданным явной формулой

$$\Psi_{m,k}(x, y) = (\cos(mx) \cos y, \sin(mx) \cos y, \cos(kx) \sin y, \sin(kx) \sin y).$$

Лоусоновы тау-поверхности образуют двухпараметрическое семейство торов или бутылок Клейна $\tau_{m,k}$. Они были введены в 1970 году Лоусоном, который доказал, что для каждой неупорядоченной пары натуральных чисел (m, k) , таких, что $(m, k) = 1$, поверхность $\tau_{m,k}$ является отличной от других компактной минимальной поверхностью, минимально погружённой в трёхмерную единичную сферу \mathbb{S}^3 .

Наложим условие $(m, k) = 1$. Если оба целых числа m и k нечётны, то поверхность $\tau_{m,k}$ является тором. Мы называем его лоусоновым тором. Если одно из чисел m или k чётно, то $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна. Мы называем её лоусоновой бутылкой Клейна.

Заметим, что m и k не могут быть одновременно чётными в силу условия $(m, k) = 1$. Тор $\tau_{1,1}$ является клиффордовым тором.

Ясно, что отображение Ψ имеет периоды $T_1 = (2\pi, 0)$ и $T_2 = (0, 2\pi)$. Тем не менее, в случае лоусонова тора $\tau_{m,k}$ минимальная решетка периодов порождается векторами $T_3 = (\pi, \pi)$ и $T_4 = (\pi, -\pi)$. Таким образом, лоусонов тор $\tau_{m,k}$ изометричен тору $\mathbb{R}^2 / \{aT_3 + bT_4 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ с метрикой, индуцированной погружением Ψ .

Тор $\mathbb{R}^2 / \{aT_1 + bT_2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ с метрикой, индуцированной погружением Ψ , является двулиственным накрытием лоусонова тора $\tau_{m,k}$. Мы обозначаем это накрытие как $\hat{\tau}_{m,k}$.

В случае лоусоновой бутылки Клейна $\tau_{m,k}$ погружение Ψ не только периодически, но и инвариантно относительно преобразований

$$(x, y) \mapsto (x + \pi, -y), \quad (x, y) \mapsto (x, y + 2\pi),$$

что и приводит к тому, что образом Ψ является не тор, а бутылка Клейна.

Главным результатом работы [1] является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\tau_{m,k}$ лоусонов тор. Мы можем предполагать без потери общности, что $m, k \equiv 1 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$. Тогда индуцированная метрика на его двулистном накрытии $\hat{\tau}_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, где

$$j = 2 \left(\left[\sqrt{m^2 + k^2} \right] + m + k \right) - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\hat{\tau}_{m,k}) = 16\pi m E \left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m} \right),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода.

Индуцированная метрика на $\tau_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2, g)$, где

$$j = 2 \left[\frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right] + m + k - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода.

Пусть $\tau_{m,k}$ лусонова бутылка Клейна. Мы можем предполагать без потери общности, что $m \equiv 0 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$, $(m, k) = 1$. Тогда метрика, индуцированная на $\tau_{m,k}$, является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{K}, g)$, где

$$j = 2 \left\lceil \frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2} \right\rceil + m + k - 1.$$

Соответствующее значение функционала равно

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода.

Определение торов Оцуки очень неявно. Первоначальная конструкция Оцуки очень громоздка, более ясное изложение через общий подход Хсянга-Лоусона можно найти в работе [2].

Скажем кратко, что для каждого рационального числа $\frac{p}{q}$, такого, что $p, q > 0$, $(p, q) = 1$ и $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, существует погруженный в \mathbb{S}^3 минимальный \mathbb{S}^1 -инвариантный двумерный тор, называемый тором Оцуки. Обозначим его через $O_{\frac{p}{q}}$.

Тогда имеет место следующая теорема из работы [2].

Теорема. Метрика на торе Оцуки $O_{\frac{p}{q}} \subset \mathbb{S}^3$ является экстремальной для функционала $\Lambda_{2p-1}(\mathbb{T}^2, g)$.

Список литературы

- [1] Alexei V. Penskoï, Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation. Препринт arXiv:1009.0285. Принято в *Moscow Math. Journal*.
- [2] Alexei V. Penskoï, Extremal spectral properties of Otsuki tori. Препринт arXiv:1108.5160. Представлено в *Mathematische Nachrichten*.

Раздел 9. Полудискретные цепочки Тоды

1 Введение

Изучение различных цепочек Тоды имеет уже довольно большую историю. Одномерная цепочка Тоды была впервые введена М. Тодой в 1967 году в работе [1] в связи с задачей о системе частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием ближайших соседей. Затем Богоявленским в 1976 году в работе [2] были рассмотрены и изучены обобщенные одномерные цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли. В конце 70-х–начале 80-х годов прошлого века практически одновременно появилось несколько работ, посвященных изучению обобщенных двумеризованных цепочек Тоды (см. [3]–[7]). В 1991 году Сурисом в работе [8] были изучены одномерные дискретные обобщенные цепочки Тоды. Данное исследование посвящено рассмотрению полудискретных двумеризованных цепочек Тоды.

Хорошо известно (см., например, [9]), что в непрерывном случае инварианты Лапласа $h(j) = c(j) - a(j)b(j) - b_y(j)$ последовательности гиперболических дифференциальных операторов второго порядка

$$\mathcal{L}_j = \partial_x \partial_y + a(j) \partial_x + b(j) \partial_y + c(j), \quad (1)$$

связанных преобразованиями Дарбу–Лапласа

$$\mathcal{L}_{j+1} \mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1} \mathcal{L}_j, \quad (2)$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b(j)$, удовлетворяют уравнениям *двумеризованной цепочки Тоды*:

$$(\ln h(j))_{xy} = h(j-1) - 2h(j) + h(j+1). \quad (3)$$

Легко убедиться, что замена $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$ приводит цепочку (3) к виду

$$q_{xy}(j) = \exp(q(j+1) - q(j)) - \exp(q(j) - q(j-1)), \quad (4)$$

а замена $h(j) = u_{xy}(j)$ — к виду

$$u_{xy}(j) = \exp(u(j-1) - 2u(j) + u(j+1)). \quad (5)$$

Последняя система (точнее, ее замыкание граничными условиями вида $u(-1) = u(r) = -\infty$ для некоторого натурального r) является частным случаем так называемых *систем экспоненциального типа*, т.е. систем вида $\mathbf{u}_{xy} = \exp(K\mathbf{u})$, где K — некоторая постоянная матрица, а под $\exp(K\mathbf{u})$ понимается вектор, j -тая координата которого равна экспоненте от j -той координаты вектора $K\mathbf{u}$. В работах [6, 7] показано, что система экспоненциального типа интегрируема по Дарбу (т.е. обладает полным набором y -интегралов) тогда и только тогда, когда K — матрица Картана простой алгебры Ли, а в работе [4] системы экспоненциального типа, соответствующие простым алгебрам Ли, проинтегрированы в явном

виде. Это полное описание интегрируемых систем экспоненциального типа основано на рассмотрении *характеристической алгебры* таких систем: показано, что наличие полного набора y -интегралов эквивалентно конечномерности характеристической алгебры, а последнее условие реализуется если и только если матрица K является матрицей Картана серий $A-D$ или исключительных алгебр Ли; эти интегрируемые системы получили название *обобщенных* или *конечных* двумеризованных цепочек Тоды. В работе [5] для всех обобщенных двумеризованных цепочек Тоды средствами теории алгебр были построены представления Лакса. В самом простом случае граничного условия $u(-1) = u(1) = -\infty$ система (5) сводится к уравнению Лиувилля — гиперболическому уравнению, которое было проинтегрировано в явном виде Лиувиллем [10] еще в 1853 году.

Несмотря на наличие полного описания всех интегрируемых в явном виде конечных двумеризованных цепочек Тоды, некоторые вопросы еще долгое время оставались открытыми. В частности, было неясно, является ли двумеризованная цепочка серии D редукцией цепочки серии A ; положительный ответ на этот вопрос был дан Хабибуллиным [11] только в 2005 году (цепочки, соответствующие сериям B и C , являются редукциями цепочки серии A , порожденными инволютивными условиями $h(-j) = h(j-1)$ и $h(-j) = h(j)$ соответственно). Кроме того, явная интегрируемость или наличие полного набора y -интегралов не исчерпывают всех современных представлений об интегрируемых уравнениях. В работе [11] на основе определения интегрируемости, как наличия представления Лакса, был предложен некий систематический (хотя и не очень эффективный) подход к поиску интегрируемых граничных условий для двумеризованной цепочки Тоды, который дает интегрируемое граничное условие *вместе* с парой Лакса для соответствующей системы (для систем экспоненциального типа, соответствующих простым алгебрам Ли, пары Лакса приходилось искать отдельно).

Еще один подход к поиску интегрируемых обрывов двумеризованной цепочки Тоды, предложенный в работе [12], основан изучении граничных условий, совместимых с симметриями цепочки Тоды.

Структура данного текста такова: в разделе 2 описан метод Хабибуллина непосредственного поиска пар Лакса и соответствующих интегрируемых условий обрыва. В разделе 3 изложены метод построения симметрий для двумеризованной цепочки Тоды, предложенный Шабатом [13], и симметричный подход Гюреля и Хабибуллина [12] к поиску интегрируемых граничных условий в непрерывном случае. В разделе 4, следуя работе [14] Адлера и Старцева, вводится полудискретная цепочка Тоды. Раздел 5 посвящен построению представления Лакса для полудискретного аналога двумеризованной цепочки Тоды серии C , а раздел 6 — построению симметрий полудискретной цепочки и поиску граничных условий, с ними совместимых.

2 Замыкание пар Лакса в непрерывном случае

Прежде чем описывать метод Хабибуллина непосредственного поиска пар Лакса для конечных цепочек, приведем в явном виде условия обрыва, соответствующие сериям $A-D$ в терминах переменной $q(j)$. Цепочка серии A порождается граничными условиями вида

$$q(-1) = \infty, \quad q(r+1) = -\infty \quad (6)$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии B порождается граничными условиями вида

$$q(0) = 0, \quad q(r+1) = -\infty \quad (7)$$

для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Цепочка серии C задается условиями вида

$$q(0) = q(1), \quad q(r+1) = -\infty, \quad (8)$$

а цепочка серии D — несколько более сложным условием:

$$q(0) = -\ln \left(e^{q(2)} - \frac{q_x(1)q_y(1)}{2 \operatorname{sh} q(1)} \right), \quad q(r+1) = -\infty. \quad (9)$$

Хорошо известно, что преобразования Дарбу–Лапласа дают возможность записать бесконечную двумеризованную цепочку Тоды в форме Лакса: уравнения (4) представляют собой условие совместности линейной системы

$$\begin{cases} \psi_x(j) = \psi(j+1) + q_x(j)\psi(j) \\ \psi_y(j) = -h(j-1)\psi(j-1) \end{cases}, \quad (10)$$

где $h(j) = \exp(q(j+1) - q(j))$. Но изучение конечных систем приводит к необходимости строить пары Лакса для оборванных цепочек. Рассмотрим произвольное условие обрыва вида

$$q(-1) = F(q(0), q(1), \dots, q(k)) \quad (11)$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Естественная идея состоит в том, чтобы попытаться выразить переменную $\psi(-1)$ через динамические переменные $\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(k)$ согласованным с условием (11) образом, замкнув, тем самым, пару Лакса (10) и построив представление Лакса для оборванной цепочки. Однако, этот подход дает представление Лакса лишь для тривиальных граничных условий (6) серии A (см. [11]). Это обстоятельство привело Хабибуллина к другой идее: поскольку бесконечная цепочка (4) симметрична относительно замены $x \leftrightarrow y$, она допускает также и другую пару Лакса:

$$\begin{cases} \varphi_x(j) = -h(j-1)\varphi(j-1) \\ \varphi_y(j) = \varphi(j+1) + q_y(j)\varphi(j) \end{cases}. \quad (12)$$

Это означает, что можно пытаться замыкать пару Лакса (10) не только на себя, а замыкать обе лаксовы пары вместе, т.е. пробовать выразить $\psi(-1)$ и $\varphi(-1)$ через весь набор переменных

$$\psi(0), \psi(1), \dots, \psi(k), \varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(k)$$

согласованным с (11) образом. Подобный подход дает пары Лакса для обобщенных цепочек Тоды серий $A - D$, причем в некоторых случаях построенные таким образом пары Лакса отличаются тех, которые были построены ранее средствами теории алгебр Ли. Таким образом, имеет место (см. [11]) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k < k_1$ и $m < m_1$ — некоторые целые числа. Рассмотрим векторы

$$\Psi = (\psi(k+1), \psi(k+2), \dots, \psi(k_1-1))^t, \quad \Phi = (\varphi(m+1), \varphi(m+2), \dots, \varphi(m_1-1))^t;$$

тогда обобщенные двумеризованные цепочки Тоды серий $A - D$ допускают представление Лакса следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_x = \left(\begin{array}{c|c} A & K \\ \hline M & C \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}_y = \left(\begin{array}{c|c} B & L \\ \hline N & D \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где матрицы A, B, \dots, N имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} q_x(k+1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_x(k+2) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ A_{k+1} & A_{k+2} & A_{k+3} & \dots & A_{k_1-1} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{m+1} & K_{m+2} & \dots & K_{m_1-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} B_{k+1} & B_{k+2} & \dots & 0 & B_{k_1-1} \\ -h(k+1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -h(k_1-2) & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_{m+1} & L_{m+2} & \dots & L_{m_1-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\
C &= \begin{pmatrix} C_{m+1} & C_{m+2} & \dots & 0 & C_{m_1-1} \\ -h(m+1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -h(m_1-2) & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_{k+1} & M_{k+2} & \dots & M_{k_1-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\
D &= \begin{pmatrix} q_y(m+1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_y(m+2) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ D_{m+1} & D_{m+2} & D_{m+3} & \dots & D_{m_1-1} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ N_{k+1} & N_{k+2} & \dots & N_{k_1-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При таком подходе граничные условия на левом и правом концах независимы; поэтому, представление Лакса вида (13) допускают не только обобщенные цепочки серий $A-D$, но и любая цепочка, которая с каждого конца оборвана одним из условий (6)–(9). Более того, как показано в работе [11], представление Лакса вида (13) допускают и такие условия обрыва цепочки (4), которые выводят за рамки систем экспоненциального типа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вполне вероятно, что цепочка (4) допускает бесконечно много интегрируемых в этом смысле условий обрыва, однако полное их описание едва ли возможно, поскольку для этого потребуется в явном виде решить огромную систему дифференциально-разностных уравнений на неизвестные коэффициенты матриц A, B, \dots, N . Кроме того, при всем удобстве предложенного метода он обладает одним серьезным недостатком — он не очень эффективен: даже если известно некоторое условие обрыва, про которое интересно проверить, является ли оно интегрируемым в этом смысле, вообще говоря, совершенно непонятно, каким образом нужно выбирать числа k, m, k_1 и m_1 и сколько ненулевых коэффициентов в какой из матриц нужно брать.

Функции $\psi(j)$ и $\varphi(j)$, удовлетворяющие системам (10) и (12) соответственно, являются решениями гиперболических уравнений $\mathcal{L}^\psi(j)\psi(j) = 0$ и $\mathcal{L}^\varphi(j)\varphi(j) = 0$, где

$$\mathcal{L}^\psi(j) = \partial_x \partial_y - q_x(j) \partial_y + h(j-1), \quad \mathcal{L}^\varphi(j) = \partial_x \partial_y - q_y(j) \partial_x + h(j-1).$$

Инварианты Лапласа $h(j) = c(j) - a(j)b(j) - b_y(j)$ и $k(j) = c(j) - a(j)b(j) - a_x(j)$ этих операторов имеют следующий вид:

$$h^\psi(j) = h(j), \quad k^\psi(j) = h(j-1), \quad h^\varphi(j) = h(j-1), \quad k^\varphi(j) = h(j). \quad (14)$$

Нетрудно проверить, что в терминах переменных h граничные условия, соответствующие сериям B и C , порождены инволюциями $h(-j) = h(j+1)$ и $h(-j) = h(j)$ соответственно. Сопоставляя это с равенствами (14), получаем, что для цепочки серии B имеют место следующие равенства:

$$h^\varphi(0) = h(-1) = h(2) = h^\psi(2), \quad k^\varphi(0) = h(0) = h(1) = k^\psi(2).$$

Хорошо известно, что инварианты Лапласа двух линейных гиперболических операторов совпадают, тогда и только тогда, когда эти операторы связаны калибровочным преобразованием. В терминах волновых функций это означает, что существует такая функция $R = R(x, y)$, что $\varphi(0) = R\psi(2)$. Аналогично, нетрудно проверить, что

$$h^\psi(1) = h(1) = h(0) = h^\varphi(1), \quad k^\psi(1) = h(1) = h(0) = k^\varphi(1);$$

это означает, что существует такая функция $S = S(x, y)$, что $\psi(1) = S\varphi(1)$. Полученные равенства — есть не что иное, как описанное выше замыкание друг на друга двух пар Лакса для бесконечной цепочки на левом конце. Аналогично, для цепочки серии C имеют место равенства

$$\begin{aligned} h^\varphi(0) &= h(-1) = h(1) = h^\psi(1), & k^\varphi(0) &= h(0) = k^\psi(1), \\ h^\psi(0) &= h(0) = h^\varphi(1), & k^\psi(0) &= h(-1) = h(1) = k^\varphi(1), \end{aligned}$$

т.е. существуют такие функции R и S , что $\varphi(0) = R\psi(1)$, $\psi(0) = S\varphi(1)$. Это — тоже частный случай описанной выше конструкции. Замыкание серии D устроено сложнее, в этом случае пары Лакса уже не являются калибровочно эквивалентными ни в какой точке. Таким образом, приведенные выше соображения показывают, что общий подход Хабибуллина естественным образом вытекает из уже известных частных случаев.

3 Симметричный подход в непрерывном случае

Другой подход к изучению интегрируемых условий обрыва для двумеризованной цепочки Тоды, предложенный Гюрелем и Хабибуллиным [12], основан на изучении граничных условий, совместимых с симметриями бесконечной цепочки. Однако, проблема состоит в том, что симметрии бесконечной цепочки Тоды в двумерном случае (в отличие от одномерного случая) не выражаются в терминах динамических переменных — для их построения необходимо ввести дополнительные нелокальные переменные.

Введем обозначение $q_x(j) = b(j)$ (эта переменная не имеет никакого отношения к коэффициентам гиперболических операторов из предыдущих разделов); тогда цепочка Тоды (4) может быть записана следующим образом:

$$b_y(j) = h(j) - h(j - 1). \quad (15)$$

Определим нелокальные переменные $b^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b(j) = b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j - 1), \quad \partial_y b^{(1)}(j) = \partial_x h(j), \quad (16)$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (15):

$$\partial_y \partial_x b(j) = \partial_y (b^{(1)}(j) - b^{(1)}(j - 1)) = \partial_x (h(j) - h(j - 1)) = \partial_x \partial_y b(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b^{(1)}(j) = b^{(1)}(j) (b(j + 1) - b(j)) + b^{(2)}(j) - b^{(2)}(j - 1);$$

тогда условие совместности $\partial_y \partial_x b^{(1)}(j) = \partial_x \partial_y b^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приведет к следующему соотношению:

$$\partial_y b^{(2)}(j) = h(j) b^{(1)}(j + 1) - h(j + 1) b^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Нелокальные переменные $b^{(k)}(j)$, где $k = 2, 3, \dots$, связаны соотношениями*

$$\begin{cases} \partial_y b^{(k)}(j) = h(j)b^{(k-1)}(j+1) - h(j+k-1)b^{(k-1)}(j) \\ \partial_x b^{(k)}(j) = b^{(k)}(j)(b(j+k) - b(j)) + b^{(k+1)}(j) - b^{(k+1)}(j-1) \end{cases}, \quad (17)$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (17) для $k+1$.

Формулы (17) были получены А. Б. Шабатом в работе [13] для построения иерархии высших симметрий двумеризованной цепочки Тоды. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Потоки*

$$q_t(j) = b^2(j) + b^{(1)}(j) + b^{(1)}(j-1), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} q_t(j) = & b^3(j) + b^{(2)}(j) + b^{(2)}(j-1) + b^{(2)}(j-2) + \\ & + b^{(1)}(j)(2b(j) + b(j+1)) + b^{(1)}(j-1)(2b(j) + b(j-1)) \end{aligned} \quad (19)$$

задают симметрии цепочки (15).

Введенные выше нелокальные переменные также дают возможность найти y -интегралы двумеризованной цепочки Тоды (4). Нетрудно проверить, что функции

$$I_2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (b^2(j) + 2b^{(1)}(j)) \quad \text{и} \quad I_3 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (b^3(j) + 3b^{(1)}(j)(b(j) + b(j+1)) + 3b^{(2)}(j))$$

являются y -интегралами цепочки (4). Симметрии и интегралы более высокого порядка по $b(j)$ записываются в терминах нелокальностей $b^{(k)}(j)$ более высокой градуировки, однако мы не будем заниматься их обсуждением.

Идея Гюреля и Хабибуллина состоит в том, чтобы исследовать, граничные условия какого вида допускают симметрии, т.е., в частности, классифицировать все граничные условия, совместимые с симметриями (32), (33). Прямая проверка показывает, что симметрия (32) совместна с условием обрыва серии A , а симметрия (33), совместима, например, с условиями обрыва, соответствующими сериям A , B и C . Оказывается, что все известные интегрируемые в том или ином смысле условия обрыва двумеризованной цепочки Тоды совместимы с симметрией (33). Для того, чтобы сформулировать соответствующую теорему, нам потребуется перейти к новым переменным, в которых симметрии (32) и (33) записываются более компактно.

Положим $u = e^{-q(-1)}$, $v = e^{q(0)}$; тогда симметрии (32) и (33) принимают (соответственно) следующий вид:

$$u_t = -u_{xx} - 2ru, \quad v_t = v_{xx} + 2rv, \quad (20)$$

$$u_t = u_{xxx} + 3ru_x - 3su + 3r_xu, \quad v_t = v_{xxx} + 3rv_x + 3sv, \quad (21)$$

где $r = b^{(1)}(0)$ и $s = b^{(2)}(0) + r(\ln v)_x$ — нелокальные переменные, удовлетворяющие соотношениям

$$r_y = (uv)_x, \quad s_y = (uv_x)_x.$$

В статье [12] доказана следующая классификационная

ТЕОРЕМА 1. *Если условие обрыва вида $u = F(v, v_x, v_y, v_{xy})$ совместимо с симметрией (20), то оно имеет вид $u = 0$. Условие обрыва вида $u = F(v, v_x, v_y, v_{xy})$, совместимое с симметрией (21), принадлежит к одному из следующих трех типов:*

- i) $u = a$, где $a = \text{const}$;
- ii) $u = av$, где $a = \text{const}$;
- iii) $u = \frac{v_{xy}}{a-v^2} + \frac{vv_xv_y}{(a-v^2)^2}$, где $a = \text{const}$.

Эти условия обрыва в точности совпадают с хорошо известными граничными условиями для двумеризованных цепочек Тоды, соответствующих простым алгебрам Ли серий $A-D$. Рассмотрение условий обрыва более общего вида дает все известные (осмысленные) граничные условия [12].

4 Бесконечная цепочка в полудискретном случае

В полудискретном случае, как и в непрерывном, инварианты Лапласа гиперболических дифференциальных операторов второго порядка, связанных преобразованиями Дарбу-Лапласа, удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений, называемой *полудискретной цепочкой Тоды*. Следуя работе [14], получим из этих соображений уравнения полудискретной цепочки Тоды.

Рассмотрим последовательность гиперболических дифференциально-разностных операторов

$$\mathcal{L}_j = \partial_x T + a_n(j)\partial_x + b_n(j)T + c_n(j),$$

где $a_n(j)$, $b_n(j)$ и $c_n(j)$ — функции, зависящие от дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$ и непрерывной переменной $x \in \mathbb{R}$, а T — оператор сдвига: $T\psi_n(x) = \psi_{n+1}(x)$. Легко видеть, что оператор \mathcal{L}_j можно представить в следующих видах:

$$\mathcal{L}_j = (\partial_x + b_n(j))(T + a_n(j)) + a_n(j)k_n(j) = (T + a_n(j))(\partial_x + b_n(j-1)) + a_n(j)h_n(j),$$

где $k_n(j) = \frac{c_n(j)}{a_n(j)} - (\ln a_n(j))'_x - b_n(j)$ и $h_n(j) = \frac{c_n(j)}{a_n(j)} - b_{n-1}(j)$ — инварианты Лапласа дифференциально-разностного оператора \mathcal{L}_j .

Предположим, что любые два соседних оператора \mathcal{L}_j и \mathcal{L}_{j+1} связаны преобразованием Дарбу-Лапласа, т.е. удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{L}_{j+1}\mathcal{D}_j = \mathcal{D}_{j+1}\mathcal{L}_j,$$

где $\mathcal{D}_j = \partial_x + b_{n-1}(j)$. Тогда, записав последнее уравнение в терминах коэффициентов операторов, после преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} k_n(j+1) = h_n(j) \\ \left(\ln \frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)} \right)'_x = h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1) \end{cases}.$$

Вводя теперь новые переменные равенством $h_n(j) = \exp(q_{n+1}(j+1) - q_n(j))$, получаем уравнения *полудискретной цепочки Тоды*:

$$q_{n,x}(j) - q_{n+1,x}(j) = \exp(q_{n+1}(j+1) - q_n(j)) - \exp(q_{n+1}(j) - q_n(j-1)). \quad (22)$$

По аналогии с непрерывным случаем естественно задаться вопросом об интегрируемых редукциях полудискретной цепочки Тоды. Тривиальные граничные условия $h_n(-1) = h_n(r) = 0$ приводят к системе, которую естественно называть *полудискретной цепочкой, соответствующей серии A*. В терминах переменной q это замыкание задается условием обрыва $q_n(-1) = \infty$, $q_n(r+1) = -\infty$. Выясним, какие инволюции допускает полудискретная цепочка Тоды, записанная в инвариантах Лапласа, т.е. цепочка

$$\left(\ln \frac{h_n(j)}{h_{n+1}(j)} \right)'_x = h_{n+1}(j+1) - h_{n+1}(j) - h_n(j) + h_n(j-1). \quad (23)$$

Нетрудно проверить, что отражение $h_n(-j) = h_{n+j-c}(j-d)$ задает редукцию цепочки (23) лишь при $c = -2d$, т.е. в данном случае ситуация несколько отличается от непрерывного случая, где отражения относительно полуцелой и целой точки порождали редукции цепочки Тоды, отвечающие сериям B и C соответственно. Полагая $c = -1$, получаем граничное условие $h_n(-j) = h_{n+j-1}(j-2)$ (это равенство должно быть выполнено при всех $n \in \mathbb{Z}$). При $j = 2$ в терминах переменной q это приводит к условию обрыва

$$q_n(-1) - q_{n-1}(-2) = q_{n+1}(1) - q_n(0). \quad (24)$$

Цепочку (22), оборванную с помощью условия (24) на левом конце и с помощью тривиального условия $q_n(r+1) = -\infty$ — на правом, будем называть *полудискретной цепочкой, соответствующей серии C*: нетрудно проверить, что в континуальном пределе эта система дает непрерывную цепочку Тоды, отвечающую серии C.

Легко проверить, что граничное условие (24) порождает n -интеграл полудискретной цепочки: действительно, функция

$$\mu(x) = q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) \quad (25)$$

не зависит от n .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие закона сохранения по дискретной переменной (25) эквивалентно условию замыкания (24). В самом деле, прямая проверка показывает, что если для некоторого решения $q_n(j)$ бесконечной цепочки (22) величина (25) не зависит от n , то выполнено равенство (24). Однако функция μ при этом для разных решений может быть разной.

5 Пара Лакса для полудискретной цепочки серии C

Как и в непрерывном случае, преобразования Дарбу–Лапласа дают возможность построить представление Лакса для цепочки Тоды (22). Нетрудно проверить, что уравнения (22) представляют собой условие совместности для линейной системы

$$\begin{cases} \psi_{n,x}(j) = q_{n,x}(j)\psi_n(j) + \psi_n(j+1) \\ \psi_{n+1}(j) = \psi(j) + h_n(j-1)\psi_n(j-1) \end{cases} \quad (26)$$

Преобразования Дарбу–Лапласа по дискретной переменной тоже приводят к представлению Лакса для полудискретной цепочки Тоды, и это представление Лакса неэквивалентно первому:

$$\begin{cases} \varphi_{n,x}(j) = \exp(q_{n+1}(j) - q_{n+1}(j-1))\varphi_n(j-1) - \varphi_n(j) \\ \varphi_{n-1}(j) = -\exp(q_n(j) - q_{n+1}(j))\varphi_n(j) + \varphi_n(j+1) \end{cases} \quad (27)$$

Функции $\psi_n(j)$ и $\varphi_n(j)$, удовлетворяющие системам (26) и (27) соответственно, являются решениями гиперболических дифференциально-разностных уравнений $\mathcal{L}^\psi(j)\psi_n(j) = 0$ и $\mathcal{L}^\varphi(j)\varphi_n(j) = 0$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\psi(j) &= \partial_x T - \partial_x - q_{n+1,x}(j)T + q_{n,x}(j) - h_n(j), \\ \mathcal{L}^\varphi(j) &= \partial_x T + \exp(q_n(j) - q_{n+1}(j))\partial_x + T + \exp(q_n(j) - q_{n+1}(j)) - \exp(q_n(j) - q_n(j-1)) \end{aligned}$$

Инварианты Лапласа этих операторов имеют следующий вид:

$$h_n^\psi(j) = h_n(j), \quad k_n^\psi(j) = h_n(j-1), \quad h_n^\varphi(j) = h_n(j-1), \quad k_n^\varphi(j) = h_{n+1}(j). \quad (28)$$

Нетрудно проверить, что граничное условие $h_n(-j) = h_{n+j-1}(j-2)$, соответствующее серии C, вместе с равенствами (28) приводит к следующим соотношениям:

$$h_n^\varphi(-1) = h_n(-2) = h_{n+1}(0) = h_{n+1}^\psi(0), \quad k_n^\varphi(-1) = h_{n+1}(-1) = k_{n+1}^\psi(0).$$

Как и в непрерывном случае, инварианты Лапласа двух линейных гиперболических дифференциально-разностных операторов совпадают, тогда и только тогда, когда эти операторы связаны калибровочным преобразованием. В терминах волновых функций это означает, что существует такая функция $R_n = R_n(x)$, что $\varphi_n(-1) = R_n\psi_{n+1}(0)$. Аналогично, нетрудно проверить, что

$$h_n^\psi(-1) = h_n(-1) = h_n^\varphi(0), \quad k_n^\psi(-1) = h_n(-2) = h_{n+1}(0) = k_n^\varphi(0);$$

это означает, что существует такая функция $S_n = S_n(x)$, что $\psi_n(-1) = S_n\varphi_n(0)$. Таким образом, граничное условие, соответствующее серии C, делает пары Лакса (26),(27) калибровочно эквивалентными в одной точке, что позволяет, следуя общей идее Хабибуллина, замкнуть эти пары Лакса друг на друга. Более точно, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Цепочка (22) с граничным условием (24) на левом конце и тривиальным граничным условием $q_n(r+1) = -\infty$ для некоторого $r \geq 1$ на правом конце является условием совместности для линейной системы

$$\begin{aligned} \partial_x(\Psi) &= A\Psi, & T(\Psi) &= B\Psi + L\Phi, \\ \partial_x(\Phi) &= M\Psi + C\Phi, & T^{-1}(\Phi) &= D\Phi, \end{aligned}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi(1) \\ \vdots \\ \psi(r) \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(r) \end{pmatrix},$$

матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \nu \cdot a_{n+1}(1) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n+1}(2) & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n+1}(r) & -1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} b_n(0) & \nu^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_n(1) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_n(2) & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_n(r) \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} q_{n,x}(0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{n,x}(1) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & q_{n,x}(r) \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_n(0) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h_n(r-1) & 1 \end{pmatrix}, \\ L &= \begin{pmatrix} f_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, & M &= \begin{pmatrix} g_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_n(j) &= \exp(q_n(j) - q_n(j-1)), & b_n(j) &= -\exp(q_n(j) - q_{n+1}(j)), \\ f_n &= (-1)^n \exp(-q_n(-1)), & g_n &= (-1)^n \exp(q_{n+1}(0)), \\ p_n &= u_{n,x}(-1) + u_{n+1,x}(0), & \nu &= \nu(x) = \exp\left(-\int (1 + \mu(x)) dx\right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что в полудискретной цепочке Тоды переход от переменных $h_n(j)$ к переменным $q_n(j)$ осуществляется с точностью до одновременного прибавления произвольной функции: если $q_n(j)$ — решение системы (22), то $q_n(j) + \varepsilon$ тоже является решением этой системы для произвольной функции $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Это означает, что зная все решения полубесконечной цепочки Тоды с условием обрыва

$$q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) = 0, \quad (29)$$

мы можем с помощью надлежащего выбора функции ε найти все ее решения, удовлетворяющие условию (25) для произвольной функции μ . Поэтому в дальнейшем, говоря о полудискретной цепочке Тоды серии C , мы всегда будем предполагать, что $\mu = 0$, т.е. вместо граничного условия (24) будем рассматривать чуть более сильное условие (29). С неоднозначностью перехода от переменных $h_n(j)$ к переменным $q_n(j)$ также связано появление в матрицах представления Лакса “неуклюжего” множителя ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналогичным образом строится представление Лакса для полудискретной цепочки с граничными условиями вида

$$q_{n,x}(-1) + q_{n,x}(0) - h_n(0) = 0, \quad q_{n,x}(r+1) + q_{n,x}(r) - h_n(r) = 0$$

для произвольного $r \geq 1$.

6 Симметричный подход в полудискретном случае

Нахождение симметрий двумеризованной цепочки Тоды в полудискретном случае, точно также, как и в непрерывном, требует введения нелокальных переменных; сформулируем основные утверждения и приведем формулы, аналогичные утверждениям и формулам раздела 3. Введем следующие обозначения: $\partial_n = I - T$, где I — тождественный оператор, и $b_n(j) = q_{n,x}(j)$. Тогда цепочка (22) запишется в следующем виде:

$$\partial_n b_n(j) = h_n(j) - h_n(j-1). \quad (30)$$

Определим нелокальные переменные $b_n^{(1)}(j)$ равенствами

$$\partial_x b_n(j) = b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1), \quad \partial_n b_n^{(1)}(j) = \partial_x h_n(j),$$

совместность которых гарантируется цепочкой Тоды (30):

$$\partial_n \partial_x b_n(j) = \partial_n (b_n^{(1)}(j) - b_n^{(1)}(j-1)) = \partial_x (h_n(j) - h_n(j-1)) = \partial_x \partial_n b_n(j).$$

Далее, необходимо определить производные $\partial_x b_n^{(1)}(j)$, однако это потребует введения нелокальностей $b_n^{(2)}(j)$ следующего порядка. Положим

$$\partial_x b_n^{(1)}(j) = b_n^{(1)}(j) (b_{n+1}(j+1) - b_n(j)) + h_n(j) (b_n^{(1)}(j-1) - b_n^{(1)}(j)) + b_n^{(2)}(j) - b_n^{(2)}(j-1);$$

тогда условие совместности $\partial_n \partial_x b_n^{(1)}(j) = \partial_x \partial_n b_n^{(1)}(j)$, как нетрудно проверить, приведет к следующему соотношению:

$$\partial_n b_n^{(2)}(j) = h_n(j) b_{n+1}^{(1)}(j+1) - h_{n+1}(j+1) b_{n+1}^{(1)}(j).$$

Непосредственное индуктивное рассуждение показывает, что справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Нелокальные переменные $b_n^{(k)}(j)$, где $k = 2, 3, \dots$, связаны соотношениями*

$$\begin{cases} \partial_n b_n^{(k)}(j) = h_n(j) b_{n+1}^{(k-1)}(j+1) - h_{n+k-1}(j+k-1) b_{n+1}^{(k-1)}(j) \\ \partial_x b_n^{(k)}(j) = b_n^{(k)}(j) (b_{n+k}(j+k) - b_n(j)) + \\ + h_{n+k-1}(j+k-1) (b_n^{(k)}(j-1) - b_n^{(k)}(j)) + b_n^{(k+1)}(j) - b_n^{(k+1)}(j-1) \end{cases}, \quad (31)$$

причем совместность этих равенств для каждого k обеспечивается первым из равенств (31) для $k+1$.

В полудискретном случае симметрии цепочки Тоды задаются следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Потоки*

$$q_{n,t}(j) = b_n^2(j) + b_n^{(1)}(j) + b_n^{(1)}(j-1), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} q_{n,t}(j) = & q_n^3(j) + b_n^{(2)}(j) + b_n^{(2)}(j-1) + b_n^{(2)}(j-2) + \\ & + b_n^{(1)}(j) (2b_n(j) + b_n(j+1)) + b_n^{(1)}(j-1) (2b_n(j) + b_n(j-1)) - \\ & - b_n^{(1)}(j) h_n(j+1) - b_n^{(1)}(j-1) h_n(j) - b_n^{(1)}(j-2) h_n(j-1) \end{aligned} \quad (33)$$

задают симметрии цепочки (22).

В полной аналогии с непрерывным случаем введем новые динамические переменные, которые окажутся более удобными для дальнейших рассмотрений:

$$u_n = e^{-q_n(-2)}, \quad v_n = e^{q_{n+1}(-1)}, \quad w_n = q^{-q_n(0)}, \quad z_n = e^{q_{n+1}(1)}$$

и заменим нелокальные переменные $b_n^{(2)}(-2)$, $b_n^{(1)}(-2)$, $b_n^{(2)}(0)$ и $b_n^{(1)}(0)$ следующим образом:

$$r_n = b_n^{(1)}(-2), \quad s_n = b_n^{(2)}(-2) + r_n(b_n(-1) - h_n(-1)), \quad (34)$$

$$\rho_n = b_n^{(1)}(0), \quad \sigma_n = b_n^{(2)}(0) + \rho_n(b_n(1) - h_n(1)). \quad (35)$$

Прямым вычислением доказывається следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. В новых переменных симметрия (32) принимает вид

$$u_{n,t} = u_{n,xx} + 2r_n u_n, \quad v_{n,t} = v_{n,xx} - 2r_n v_n, \quad w_{n,t} = w_{n,xx} + 2\rho_n w_n, \quad z_{n,t} = z_{n,xx} - 2\rho_n z_n, \quad (36)$$

а симметрия (33) — вид

$$u_{n,t} = u_{n,xxx} + 3r_n u_{n,x} - 3s_n u_n + 3r_{n,x} u_n, \quad v_{n,t} = v_{n,xxx} + 3r_{n+1} v_{n,x} + 3s_{n+1} v_n \quad (37)$$

$$w_{n,t} = w_{n,xxx} + 3\rho_n w_{n,x} - 3\sigma_n w_n + 3\rho_{n,x} w_n, \quad z_{n,t} = z_{n,xxx} + 3\rho_{n+1} z_{n,x} + 3\sigma_{n+1} z_n. \quad (38)$$

Такой способ записи симметрий удобен, во-первых, своей компактностью, а, во-вторых, тем, что поток, задающий симметрию, для каждой динамической переменной использует *лишь эту* переменную и только две нелокальности. Кроме того, в этих переменных очень коротко переписывается первое из соотношений (31), т.е. имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Разностные производные нелокальностей r_n , s_n , ρ_n , σ_n являются полными производными по x :

$$\begin{aligned} \partial_n r_n &= \partial_x(u_n v_n), & \partial_n s_n &= \partial_x \left(v_{n,x} u_n - \frac{1}{2}(u_n v_n)^2 \right), \\ \partial_n \rho_n &= \partial_x(w_n z_n), & \partial_n \sigma_n &= \partial_x \left(z_{n,x} w_n + \frac{1}{2}(w_n z_n)^2 \right). \end{aligned}$$

Будем искать условия обрыва бесконечной полудискретной цепочки Тоды, совместимые с симметриями (32) и (33). Однако, делать это удобно не в исходных переменных, а в новых переменных (34,35). Поскольку теоретически можно рассматривать сколь угодно сложные условия замыкания, ограничимся следующим случаем: будем исследовать соотношения, связывающие лишь 4 последовательных по переменной j динамических переменных и их производные (по переменным n и x); кроме того будем предполагать, что дополнительные динамические переменные не связаны никакими соотношениями с другими динамическими переменными, кроме этих четырех. Тогда справедливы следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Единственным условием обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$, совместимым с симметрией (36), является тривиальное: $u_n = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если считать динамические переменные

$$v_{n-1}, \quad v_n, \quad w_n, \quad w_{n+1}, \quad z_n, \quad z_{n+1}, \quad v_{n-1,x}, \quad w_{n,x}, \quad z_{n,x} \quad (39)$$

независимыми, то среди условий обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$ единственным условием, совместимым с симметрией (37,38), является тривиальное: $u_n = 0$.

Таким образом, для поиска нетривиальных условий обрыва, совместимых с симметрией (37,38), требует нахождения зависимости между переменными (39). Прямое, но довольно громоздкое вычисление приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть между динамическими переменными (39) есть соотношение вида

$$v_{n,x} = H(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1}, v_{n-1,x}, w_{n,x}, z_{n,x})$$

и нетривиальное условие обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$ совместимо с симметрией (37,38). Тогда

$$v_{n,x} = \frac{v_{n-1}w_{n,x}}{w_n} + v_{n-1}z_nw_n,$$

а условие обрыва имеет следующий вид:

$$u_n = \frac{z_{n+1}w_{n+1}}{v_n}.$$

Легко видеть, что полученное условие обрыва в точности совпадает с граничным условием (24), а соотношение между динамическими переменными эквивалентно условию (29), т.е. рассмотрение естественного класса условий обрыва вида $u_n = F(v_{n-1}, v_n, w_n, w_{n+1}, z_n, z_{n+1})$, как и в непрерывном случае, приводит к цепочкам Тоды, соответствующим классическим алгебрам Ли (точнее, к их полудискретным аналогам).

Список литературы

- [1] М. Toda. Vibration of a chain with non-linear interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, **22** (1967), 431–436.
- [2] О.И. Bogoyavlensky. On perturbations of the periodic Toda lattice. *Commun. Math. Phys.*, **51** (1976), 201–209.
- [3] А. В. Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода. *Письма в ЖЭТФ*, **30** (1979), вып. 7, 443–448.
- [4] А. Н. Лезнов. О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерном пространстве. *ТМФ*, **42** (1980), вып. 3, 343–349.
- [5] A. V. Mikhailov, M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov. Two-dimensional generalized Toda Lattice. *Commun. Math. Phys.*, **79** (1981), 473–488.
- [6] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. *Препринт. Уфа: БФАН СССР*, 1981.
- [7] А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. *ТМФ*, **51** (1982), вып. 1, 10–22.
- [8] Ю. Б. Сурис. Обобщенные цепочки Тоды в дискретном времени. *Алгебра и Анализ*, **2** (1990), вып. 2, 141–157.
- [9] А. Б. Шабат. К теории преобразований Лапласа–Дарбу. *ТМФ*, **103** (1995), вып. 1, 170–175.
- [10] J. Liouville. Sur l'équation aux differences partielles $\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial u \partial v} \pm 2\lambda q^2 = 0$. *J. Math. Pure Appl.*, **18** (1853), 71–74.

- [11] И. Т. Хабибуллин. Обрывы цепочки Тоды и проблема редукций. *ТМФ*, **143** (2005), вып. 1, 33–48.
- [12] B. Gürel, I. Habibullin. Boundary conditions for two-dimensional integrable chains. *Phys. Lett. A*, **233** (1997), 68-72.
- [13] A. B. Shabat. Higher symmetries of two-dimensional lattices. *Phys. Lett. A*, **200** (1995), 121-133.
- [14] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев. О дискретных аналогах уравнения Лиувилля. *ТМФ*, **121** (1999), вып. 2, 271–284.
- [15] I. Habibullin, K. Zheltukhin, M. Yangubaeva. Cartan matrices and integrable lattice Toda field equations. [arXiv:1105.4446v2](https://arxiv.org/abs/1105.4446v2)

Раздел 10

Полуобратимые расширения C^* -алгебр

В первое десятилетие после появления примера Дж. Андерсона [A] число примеров C^* -алгебр, для которых полугруппа расширений не является группой, расло очень медленно, но в последнее время стало увеличиваться [HT], [HS], [HLSW], [Se], и сейчас известны целые серии таких примеров.

С другой стороны, нами было замечено, что многие необратимые расширения являются обратимыми в несколько более слабом смысле. Это свойство получило название полуобратимость. Напомним, что расширение C^* -алгебры A с помощью стабильной C^* -алгебры B обратимо, если существует другое расширение — обратное — со следующим свойством: прямая сумма двух расширений является расщепимым расширением. Полуобратимость заключается в том, что такая прямая сумма должна быть лишь асимптотически расщепимой, т.е. существует асимптотический гомоморфизм в смысле Конна и Хигсона [CH], состоящий из правых обратных к факторотображению. Оказалось, что расширения надстроенных или стягиваемых C^* -алгебр всегда полуобратимы [MT3], [MT1], а в [ST] показано, что расширения редуцированной групповой C^* -алгебры свободного произведения аменабольных групп. Цель настоящей работы — расширить список C^* -алгебр, все расширения которых полуобратимы.

Поясним, почему полуобратимость является естественным понятием, которое можно рассматривать как наилучшую альтернативу при отсутствии обратимости. Пусть A и B — сепарабельные C^* -алгебры. Обозначим через $M(B)$ алгебру мультипликаторов, через $Q(B)$ — обобщенную алгебру Калкина, и через $q_B : M(B) \rightarrow Q(B)$ — каноническую проекцию. Пусть $\text{Ext}(A, B)$ — полугруппа классов унитарной эквивалентности расширений A с помощью B . Элементы $\text{Ext}(A, B)$ представляются $*$ -гомоморфизмами $\varphi : A \rightarrow Q(B)$, и два расширения $\varphi, \psi : A \rightarrow Q(B)$ унитарно эквивалентны, если существует унитарный элемент $u \in M(B)$, такой что $\text{Ad } q_B(u) \circ \varphi = \psi$. Суммой $\varphi \oplus \psi$ двух расширений является расширение

$$(\varphi \oplus \psi)(a) = q_B(V_1)\varphi(a)q_B(V_1)^* + q_B(V_2)\psi(a)q_B(V_2)^*,$$

которое не зависит от выбора изометрий $V_1, V_2 \in M(B)$ при условии, что $V_1^*V_2 = 0$.

Расширение $\varphi : A \rightarrow Q(B)$ *расщепимо*, если существует $*$ -гомоморфизм $\pi : A \rightarrow M(B)$, такой что $\varphi = q_B \circ \pi$, и *асимптотически расщепимо*, если существует асимптотический гомоморфизм $\pi_t : A \rightarrow M(B), t \in [1, \infty)$, такой что $q_B \circ \pi_t = \varphi$ для всех t . $\text{Ext}(A, B)$ является группой, если для каждого расширения $\varphi : A \rightarrow Q(B)$ существует обратное, φ' , т.е. расширение $\varphi \oplus \varphi'$ расщепимо. Расширение $\varphi : A \rightarrow Q(B)$ является *полуобратимым*, если

существует расширение $\varphi' : A \rightarrow Q(B)$, такое что $\varphi \oplus \varphi'$ асимптотически расщепимо.

Когда теория C^* -расширений разрабатывалась в работах Брауна, Дугласа и Филлмора, [BDF1], [BDF1], у них были вполне определенные операторно-теоретические причины для тривиализации расщепимых расширений.¹ Однако, имеются и другие причины для того, чтобы расщепимые расширения считались тривиальными, для получения группы из полугруппы $\text{Ext}(A, B)$. Для расщепимого расширения x имеет смысл определить прямую сумму x^∞ счетного числа экземпляров x . Поскольку $x \oplus x^\infty \oplus 0 = x^\infty \oplus 0$ в $\text{Ext}(A, B)$, расщепимые расширения тривиальны в любой фактор-группе $\text{Ext}(A, B)$. Нетрудно показать, что бесконечную прямую сумму x^∞ можно определить также и для случая, когда x асимптотически расщепимо. Вообще говоря, это возможно даже если расширение расщепимо посредством дискретного асимптотического гомоморфизма, т.е. когда оно квази-диагонально. Однако использование непрерывного параметра для асимптотического сечения позволяет установить унитарную эквивалентность между $x \oplus x^\infty \oplus 0$ и $x^\infty \oplus 0$. Отсюда следует, что асимптотически расщепимые расширения должны обратиться в 0 в любой фактор-группе $\text{Ext}(A, B)$. На самом деле, любая фактор-группа $\text{Ext}(A, B)$ пропускается через полугруппу $\text{Ext}(A, B)$ с сокращениями. Ретроспективно не кажется удивительным, что для получения группы недостаточно тривиализовать только расщепимые расширения, или даже асимптотически расщепимые, как показано в [MT4]. Рассматривая ситуацию в правильной перспективе, кажется более удивительным, что $\text{Ext}(A, B)$ является группой в большом количестве случаев, и что полуобратимость имеет место намного более часто, чем обратимость.

Дополняя случаи, рассмотренные в [MT3], [MT1], [M], [Th4] и [ST], мы покажем здесь, что все расширения в $\text{Ext}(A, B)$ полуобратимы, если

- а) A является редуцированной групповой C^* -алгеброй $C_r^*(G)$, где группа G есть амальгамированное свободное произведение $G = G_1 *_F G_2$, F — конечна, G_2 аменабельна и G_1 абелева, а также если
- б) A является амальгамированным произведением C^* -алгебр, $A = A_1 *_D A_2$, где D ядрна, и всерасширения A_i с помощью B полуобратимы, $i = 1, 2$.

Результат пункта а) на самом деле является несколько более общим и включает некоторое КК-теоретическое условие, которое автоматически выполняется, когда G_1 абелева. Более того, мы устанавливаем новые наследственные свойства полуобратимости. Если все расширения A и A' с помощью B полуобратимы, то полуобратимы все расширения $A \oplus A'$, $C(\mathbb{T}) \otimes A$ и $\mathbb{K} \otimes A$ с помощью B . Отсюда следует, что все расширения A с помощью B полуобратимы, если

- а') $A = C_r^*(G')$, где $G' = \mathbb{Z}^k \times H \times G$, H — конечная группа, а G — амальгамированное свободное произведение как в пункте а) выше, и если
- б') A — полная групповая C^* -алгебра $C^*(\mathbb{Z}^k \times H \times G')$, где H — конечная группа, а G'' получена в результате нескольких итераций амальгам

$$G'' = (\cdots ((G_1 *_H_1 G_2) *_H_2 G_3) *_H_3 \cdots) *_H_{n-1} G_n,$$

¹У них были также обоснованные причины ограничиться только существенными расширениями, но это — другая история.

при условии, что все группы H_1, H_2, \dots, H_{n-1} аменабельны и все расширения $C^*(G_i)$ с помощью B полуобратимы, $i = 1, 2, \dots, n$.

Из [HS], [HLSW] и [Se] известно, что имеются необратимые расширения во многих случаях, описываемых в пункте а), в то же время, ничего не известно об обратимости расширений из пункта б').

Доказательство пункта а) опирается на идеи, выработанные в [M], [Th4] и [ST]. В частности, оно использует понятие сильной гомотопии расширений, и опирается на Лемму 4.3 из [MT1]. Напротив, метод доказательства пункта б) является новым и не использует сильные гомотопии расширений. Вместо них используются методы, развитые Лином, Дэдэрлатом и Айлерсом для классификации C^* -алгебр. Это различие в доказательствах влечет различие в утверждениях: в пункте а) обратное (для полуобратимости) расширение может быть выбрано обратимым, а в пункте б) мы это утверждать не можем.

Два расширения $\varphi, \varphi' : A \rightarrow Q(B)$ называются *сильно гомотопными*, если существует путь $\psi_t, t \in [0, 1]$, состоящий из расширений $\psi_t : A \rightarrow Q(B)$ такой, что

- 1) $t \mapsto \psi_t(a)$ непрерывно для всех $a \in A$, и
- 2) $\psi_0 = \varphi$ и $\psi_1 = \varphi'$.

В соответствии с Леммой 4.3 из [MT1] имеем

Теорема 1. Пусть два расширения $\varphi, \varphi' : A \rightarrow Q(B)$ сильно гомотопны. Тогда φ асимптотически расщепимо тогда и только тогда, когда φ' асимптотически расщепимо.

В некоторых случаях ниже мы покажем, что для любого расширения $\varphi : A \rightarrow Q(B)$ существует расширение $\psi : A \rightarrow Q(B)$ такое, что $\varphi \oplus \psi$ сильно гомотопно расщепимому расширению. В этом случае мы будем говорить, что φ *сильно гомотопически обратимо*. Из теоремы 1 следует, что, в частности, φ полуобратимо. В некоторых случаях оказывается, что ψ может быть взято обратимым. Тогда мы говорим, что φ *сильно гомотопически обратимо с обратимым обратным*.

Лемма 2. Пусть $G_i, i = 1, 2$, — дискретные счетные аменабельные группы с общей конечной подгруппой $H \subseteq G_i, i = 1, 2$. Пусть $G_1 *_H G_2$ — свободное амальгамированное произведение групп. Пусть $\mu : C^*(G_1 *_H G_2) \rightarrow C_r^*(G_1 *_H G_2)$ — канонический эпиморфизм, и $h_\tau : C^*(G_1 *_H G_2) \rightarrow \mathbb{C}$ — характер, соответствующий тривиальному представлению $G_1 *_H G_2$. Тогда существует сепарабельное гильбертово пространство \mathbb{H} , $*$ -гомоморфизмы $\sigma, \sigma_0 : C_r^*(G_1 *_H G_2) \rightarrow B(\mathbb{H})$, и путь

$$\zeta_s : C^*(G_1 *_H G_2) \rightarrow B(\mathbb{H}), \quad s \in [0, 1],$$

состоящий из унитарных $*$ -гомоморфизмов, таких что

- a) $\zeta_0 = \sigma \circ \mu$;
- b) $\zeta_1 = h_\tau \oplus \sigma_0 \circ \mu$;
- c) $\zeta_s(a) - \zeta_0(a) \in \mathbb{K}, s \in [0, 1]$, и
- d) $s \mapsto \zeta_s(a)$ непрерывно для всех $a \in C^*(G_1 *_H G_2)$.

Теорема 3. Пусть $G_i, i = 1, 2$, — дискретные счетные аменабельные группы с общей конечной подгруппой $H \subseteq G_i, i = 1, 2$, B — сепарабельная стабильная C^* -алгебра. Пусть $G_1 *_H G_2$ — амальгамированное свободное произведение групп.

Предположим, что отображение

$$i_1^* - i_2^* : KK(C^*(G_1), B) \oplus KK(C^*(G_2), B) \rightarrow KK(C^*(H), B),$$

индуцированное включениями $i_j : C^*(H) \rightarrow C^*(G_j), j = 1, 2$, является рационально инъективным, т.е. для любого $x \in KK(C^*(H), B)$ найдется такое $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, что nx лежит в образе $i_1^* - i_2^*$.

Тогда любое расширение $C_r^*(G_1 *_H G_2)$ с помощью B является сильно гомотопически обратимым с обратимым обратным.

Так же, как в [ST], сам факт, что сильно гомотопически обратное является обратимым, означает, что группа $\text{Ext}^{-1/2}(C_r^*(G_1 *_H G_2), B)$ расширений по модулю асимптотически расщепимых расширений совпадает с соответствующей группой КК-теории и может быть вычислена с помощью теоремы универсальных коэффициентов.

КК-теорное условие теоремы 3 выполнено, когда G_1 абелева, так как в этом случае уже отображение

$$i_1^* : KK(C^*(G_1), B) \rightarrow KK(C^*(H), B)$$

является сюръективным. Это следует из существования $*$ -гомоморфизма $p : C^*(G_1) \rightarrow C^*(H)$, являющегося левым обратным для i_1 .

Следствие 4. Пусть G_1 и G_2 — счетные дискретные аменабельные группы с общей конечной подгруппой $H \subseteq G_i, i = 1, 2$, а B — сепарабельная стабильная C^* -алгебра. Пусть $G_1 *_H G_2$ — амальгамированное свободное произведение групп. Если G_1 абелева, то любое расширение $C_r^*(G_1 *_H G_2)$ с помощью B является сильно гомотопически обратимым с обратимым обратным.

Пример 5. Известно, что

$$Sl_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_4 *_2 \mathbb{Z}_6,$$

см. [S]. Поэтому можно применить Следствие 4. В Следствии 4.4 из [HS] показано, что существуют примеры необратимых расширений $C_r^*(Sl_2(\mathbb{Z}))$ с помощью \mathbb{K} . Все эти примеры полубратимы, и обратные расширения могут быть выбраны обратимыми.

Замечание 6. КК-теорное условие Теоремы 3 может не выполняться даже если G_1 и G_2 конечны и равны, а H абелева.

Следующий результат является приложением относительной теории К-гомологий, [MT2].

Теорема 7. Пусть A_1, A_2 и B — сепарабельные C^* -алгебры, B стабильна. Пусть D — общая C^* -подалгебра A_1 и A_2 , т.е. $D \subseteq A_1$ и $D \subseteq A_2$. Предположим, что

- 1) существует такой $*$ -гомоморфизм $\alpha_0 : A_1 *_D A_2 \rightarrow M(B)$ что $\alpha_0|_{A_1}, \alpha_0|_{A_2}$ и $\alpha_0|_D$ являются поглощающими,
- 2) $\text{Ext}(A_1, B)$ и $\text{Ext}(A_2, B)$ являются группами.

Тогда все расширения $A_1 *_D A_2$ с помощью B сильно гомотопически обратимы.

Условие 1) Теоремы 7 всегда выполняется, если D ядерна или является образом условного ожидания $A_i \rightarrow D$ для обоих значений $i = 1$ and $i = 2$, но в общем случае может нарушаться, см. [Th2]. Условие 2) выполняется, когда A_1 и A_2 ядерны, поэтому получаем следствие:

Следствие 8. Пусть A_1, A_2 и B — сепарабельные C^* -алгебры, B стабильна. Пусть D — общая C^* -подалгебра. Если A_1, A_2 и D ядерны, то все расширения $A_1 *_D A_2$ с помощью B сильно гомотопически обратимы.

Следующее утверждение показывает, что условие 2) Теоремы 7 можно ослабить, когда D ядерна, ценой ослабления заключения теоремы.

Теорема 9. Пусть A_1, A_2 и B — сепарабельные C^* -алгебры, B стабильна. Пусть D — общая C^* -подалгебра A_1 и A_2 . Предположим, что

- 1) существует такой $*$ -гомоморфизм $\beta : A_1 *_D A_2 \rightarrow M(B)$ что $\beta|_D : D \rightarrow M(B)$ является поглощающим,
- 2) $\text{Ext}(D, B)$ и $\text{Ext}(D, C_0([1, \infty), B))$ являются группами,
- 3) все расширения A_1 и A_2 с помощью B полуобратимы.

Тогда все расширения $A_1 *_D A_2$ с помощью B полуобратимы.

Следствие 10. Пусть A_1, A_2 и B — сепарабельные C^* -алгебры, B стабильна. Пусть D — общая C^* -подалгебра A_1 и A_2 . Предположим, что

- 1) D ядерна, и
- 2) все расширения A_1 и A_2 с помощью B полуобратимы.

Тогда все расширения $A_1 *_D A_2$ с помощью B полуобратимы.

Важное преимущество теоремы 9 и следствия 10 по сравнению с теоремой 7 — улучшенная симметрия между предположениями и выводами, которая позволяет использовать их итеративно, например для получения следующего утверждения: Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — сепарабельные C^* -алгебры, $D_1 \subseteq A_1, D_1 \subseteq A_2$, и $D_2 \subseteq A_3, D_2 \subseteq A_4$ — общие C^* -подалгебры. Предположим, что A_i, D_i ядерны, и пусть E — общая ядерная C^* -подалгебра $A_1 *_D A_2$ и $A_3 *_D A_4$. Тогда все расширения

$$(A_1 *_D A_2) *_E (A_3 *_D A_4)$$

с помощью сепарабельной стабильной C^* -алгебры B полуобратимы.

Как следствие, получаются утверждения о полуобратимости расширений для полных групповых C^* -алгебр.

Предложение 11. Пусть G_1, G_2 счетные дискретные группы, $H \subseteq G_i, i = 1, 2$, — их общая подгруппа. Пусть $G = G_1 *_H G_2$, B — сепарабельная стабильная C^* -алгебра. Предположим, что $\text{Ext}(C^*(G_i), B), i = 1, 2$, являются группами. Тогда любое расширение $C^*(G)$ с помощью B сильно гомотопически обратимо.

Аналогично, из теоремы 9 следует

Предложение 12. Пусть $G_i, i = 1, 2$, — счетные дискретные группы с общей подгруппой $H \subseteq G_i, i = 1, 2$, B — сепарабельная стабильная C^* -алгебра. Пусть $G_1 *_H G_2$ — амальгаммированное свободное произведение, B — сепарабельная стабильная C^* -алгебра. Предположим, что

- 1) $\text{Ext}(C^*(H), B)$ и $\text{Ext}(C^*(H), C_0[1, \infty) \otimes B)$ являются группами, и
- 2) для $i = 1$ и $i = 2$ любое расширение $C^*(G_i)$ с помощью B полуобратимо.

Тогда любое расширение $C^*(G_1 *_H G_2)$ с помощью B полуобратимо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [A] J. Anderson, *A C^* -algebra for which $\text{Ext}(A)$ is not a group*, *Annals of Math.* **107** (1978), 455–458.
- [BDF1] L.G. Brown, R.G. Douglas and P.A. Fillmore, *Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras*, *Proc. Conf. on Operator Theory, Lecture Notes in Mathematics* **345**, Springer Verlag (1973), 58–128.
- [BDF1] ———, *Extensions of C^* -algebras and K -theory*, *Ann. Math.* **105** (1977), 265–324.
- [Br] L. Brown, *Ext of certain free product C^* -algebras*, *J. Oper. Th.* **6** (1981), 135–141.
- [CCJJV] P-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg and A. Valette, *Groups with the Haagerup Property*, Birkhäuser Verlag, (2001).
- [CH] A. Connes and N. Higson, *Déformations, morphismes asymptotiques et K -théories bivariante*, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.* **311** (1990), 101–106.
- [C] J. Cuntz, *K -theoretic amenability for discrete groups*, *J. Reine u. Angew. Math.* **344** (1983), 180–195.
- [DE] M. Dadarlat and S. Eilers, *Asymptotic Unitary Equivalence in KK -theory*, *K-theory* **23** (2001), 305–322.
- [HT] U. Haagerup and S. Thorbjørnsen, *A new application of random matrices: $\text{Ext}(C_{red}^*(F_2))$ is not a group*, *Ann. of Math.* **162** (2005), 711–775.
- [HS] D. Hadwin and J. Shen, *Some examples of Blackadar and Kirchberg’s MF algebras*, Preprint, arXiv:0806.4712.
- [HLSW] D. Hadwin, J. Li, J. Shen, J. Wang, *Reduced free products of unital AH algebras and Blackadar and Kirchberg’s MF algebras*, Preprint, arXiv:0812.0189v1
- [HK] N. Higson and G. Kasparov, *E -theory and KK -theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, *Invent. Math.* **144** (2001), 23–74.
- [K] G. Kasparov, *Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture*, *Invent. Math.* **91** (1988), 513–572.
- [L] H. Lin, *Stable approximate unitary equivalence of homomorphisms*, *J. Oper. Theory* **47** (2002), 343–378.
- [M] V. Manuilov, *Asymptotic representations of the reduced C^* -algebra of a free group: an example*, *Bull. London Math. Soc.* **40** (2008), 838–844.
- [MT1] V. Manuilov and K. Thomsen, *E -theory is a special case of KK -theory*, *Proc. London Math. Soc.* **88** (2004), 455–478.
- [MT2] ———, *Relative K -homology and normal operators*, *J. Operator Th.* **62** (2009), 249–279.
- [MT3] V. Manuilov and K. Thomsen, *The Connes-Higson construction is an isomorphism*, *J. Func. Anal.* **213** (2004), 154–175.
- [MT4] ———, *On the lack of inverses to C^* -extensions related to property T groups*, *Can. Math. Bull.* **50** (2007), 268–283.
- [P] G. K. Pedersen, *C^* -algebras and their automorphisms group*, Academic Press, New York, 1979.
- [Se] J.A. Seebach, *On the Reduced Amalgamated Free Products of C^* -algebras and the MF -Property*, arXiv:1004.3721
- [S] J.-P. Serre, *Trees*, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [ST] J. A. Seebach and K. Thomsen, *Extensions of the reduced group C^* -algebra of a free product of amenable groups*, *Adv. Math.* **223** (2010), 1845–1854.
- [Th1] K. Thomsen, *On absorbing extensions*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 1409–1417.
- [Th2] ———, *On the KK -theory and the E -theory of amalgamated free products of C^* -algebras*, *J. Funct. Anal.* **201** (2003), 30–56.
- [Th3] ———, *Homotopy invariance in E -theory*, *Homology, homotopy and applications* (2006), 29–49.
- [Th4] ———, *All extensions of $C_r^*(\mathbb{F}_n)$ are semi-invertible*, *Math. Ann.* **342** (2008), 273–277.
- [Tu] J.L. Tu, *La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables*, *K-theory* **17**(1999), 215–264.
- [U] Y. Ueda, *Remarks on HNN extensions in operator algebras*, *Illinois J. Math.*, to appear. arXiv:math/0601706v4

Раздел 11.

Трехстраничные плетения и R -матрицы

ВВЕДЕНИЕ

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем \mathbb{C} , а R — обратимый линейный оператор на пространстве $V \otimes V$. Уравнение

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)$$

называется квантовым уравнением Янга-Бакстера, а оператор R , удовлетворяющий этому уравнению, — R -матрицей.

Для любого $n \in \mathbb{N} \cup 0$ и любого векторного пространства V обозначим через $V^{\otimes n}$ тензорное произведение n копий пространства V , где $V^{\otimes 0} = \mathbb{C}$, а через $\text{Aut}(V)$ — множество обратимых линейных операторов на пространстве V . Используя решение уравнения Янга-Бакстера — оператор R , для любого натурального n можно построить операторы $R_i \in \text{Aut}(V^{\otimes n})$ следующим образом:

$$R_i = \underbrace{\text{id}_V \otimes \dots \otimes \text{id}_V}_i \otimes R \otimes \underbrace{\text{id}_V \otimes \dots \otimes \text{id}_V}_{n-i-1},$$

где $1 \leq i \leq n-1$. Легко видеть, что операторы R_i удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} R_i R_j &= R_j R_i \text{ при } |i - j| > 1, \\ R_i R_{i+1} R_i &= R_{i+1} R_i R_{i+1} \text{ при } i = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

которые совпадают с соотношениями на стандартные образующие $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ группы кос B_n . Таким образом любое решение уравнения Янга-Бакстера задает линейное представление группы кос $\rho: B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n})$, определенное на образующих следующим образом:

$$\rho(\sigma_i) = R_i,$$

где $1 \leq i \leq n-1$. Впервые на этот факт обратил внимание Владимир Тураев в работе [3].

В работе [4] Тураев использовал такие представления групп кос для построения операторных инвариантов связок (плетений).

Определение 1. (k, l) -связка или плетение типа (k, l) — это одномерное гладкое компактное подмногообразие M многообразия S

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

граница которого состоит из точек $\{(0, i, 0)\}_{i=1}^k \cup \{(1, j, 0)\}_{j=1}^l$, где $k, l \in \mathbb{Z}, k, l \geq 0$, при k или $l = 0$ соответствующая часть границы M — пустое множество, и в точках края M ортогонально плоскостям $0 \times \mathbb{R}^2, 1 \times \mathbb{R}^2$. Два плетения называются изотопными, если существует объемная изотопия многообразия S , неподвижная на ∂S , которая переводит первое плетение во второе.

Такие объекты можно при определенных условиях перемножать. А именно, если M_1, M_2 — плетения типа (k, l) и (l, m) соответственно, то композиция плетений $M_2 \circ M_1$ — это плетение $\psi_1(M_1) \cup \psi_2(M_2)$, где

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y, z) &= (x/2, y, z), \\ \psi_2(x, y, z) &= ((x+1)/2, y, z),\end{aligned}$$

и $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Определение 2. Оснащенная (k, l) -связка или плетение типа (k, l) — это пара (M, n) , где M — (k, l) -связка, а n — это векторное поле на M , не касающееся M ни в одной точке, и задаваемое вектором $(0, -1, 0)$ в точках края ∂M . Такое векторное поле на (k, l) -связке M будем называть *нормальным векторным полем на M* . Гомотопический класс нормальных векторных полей на M , отвечающий полю n , будем называть *оснащением связки M* . Оснащенные связки (M_1, n_1) и (M_2, n_2) назовем изотопными, если существует изотопия $\varphi: S \times [0, 1] \rightarrow S$ многообразия S , неподвижная на ∂S , и такая, что $\varphi_1(M_1) = M_2$, а оснащения M_2 , задаваемые нормальными векторными полями $(\varphi_1)_*(n_1)$ и n_2 , равны. Здесь через φ_1 обозначено ограничение отображения φ на $1 \times S$, а через $(\varphi_1)_*$ — дифференциал отображения φ_1 . На множестве изотопических классов оснащенных связок естественным образом — также как на изотопических классах обычных связок — определяется операция композиции.

Оказывается, [4], что если решение уравнение Янга-Бакстера — R удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то соответствующие этому оператору представления групп кос B_n , $n = 2, 3, \dots$, продолжают до отображения, которое каждому оснащеному плетению типа (k, l) сопоставляет линейное отображение из $V^{\otimes k}$ в $V^{\otimes l}$, которое, в свою очередь, является изотопическим инвариантом оснащенного плетения.

Исходя из конструкции плетения, предложенной Тураевым, Иван Дынников в работе [1] определил понятие плетения, вложенного в книгу. В дальнейшем при определении объектов, связанных с понятием плетения, вложенного в книгу, мы будем использовать обозначения из этой работы. Рассмотрим набор полуплоскостей P_k в \mathbb{R}^3

$$P_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geq z = ky\},$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 3$. Книгой с n страницами \mathbb{B}_n будем называть ту часть объединения плоскостей, которая лежит в многообразии S

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

$$\mathbb{B}_n = \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} P_k \right) \cap S.$$

Множество $S \cap P_k$ будем называть k -ой страницей книги, $\partial S \cap (\bigcup_{k=0}^{n-1} P_k)$ — границей книги, а отрезок $\{(x, y, z) \mid y = 0, z = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ — переплетом. На границе книги отметим точки $E_{k,l}^0, E_{k,l}^1$

$$E_{k,l}^0 = (0, l, kl), \quad E_{k,l}^1 = (1, l, kl),$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, $l \in \mathbb{N}$. Через $[E_{k,l}^0, E_{k,m}^1]$ мы будем обозначать отрезок, соединяющий соответствующие точки границы книги.

Определение 3. Плетением, вложенным в книгу \mathbb{B}_n , будем называть одномерное PL -многообразие M в S , удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $M \subset \mathbb{B}_n$.

2. $\partial M = \{E_{k,l}^0, E_{k,l}^1\}_{0 \leq k \leq n-1, l \in \mathbb{N}}$.
3. M трансверсально переплету.
4. ограничение координаты x на каждую компоненту пересечения $M \cap P_k$ — монотонная функция для всех k .

Два плетения M_1, M_2 , вложенных в книгу, будем называть эквивалентными, если существует изотопия S неподвижная на ∂S , переводящая M_1 в M_2 .

Композиция двух плетений, вложенных в книгу, определяется аналогично композиции двух обычных плетений. Относительно этой операции изотопические классы плетений образуют полугруппу Y_n с единицей e

$$e = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ l \in \mathbb{N}}} [E_{k,l}^0, E_{k,l}^1].$$

В работе [1] доказывається, что полугруппы Y_n являются конечно-определенными, то есть задаются конечным набором образующих и соотношений, что центр Y_n — это полугруппа зацеплений (произведение зацеплений — это их дизъюнктивное объединение), а также, что группа D_n обратимых элементов полугруппы Y_n содержит группу кос на бесконечном числе нитей B_∞ .

Аналог полугруппы Y_3 для оснащенных плетений — полугруппа \check{Y}_3 — построен Дынниковым в работе [2]. Так же, как Y_3 полугруппа \check{Y}_3 задается конечным набором образующих и соотношений. Группу обратимых элементов полугруппы \check{Y}_3 будем обозначать через \check{D}_3 . Как и группа D_3 , \check{D}_3 содержит группу кос на бесконечном числе нитей — B_∞ .

Возникает вопрос, можно ли «естественным образом» продолжить линейное представление группы B_∞ , соответствующее некоторой R -матрице, до представления групп D_n и \check{D}_3 и полугрупп Y_n, \check{Y}_3 ?

В этой работе мы исследуем этот вопрос для групп D_3 и \check{D}_3 .

В §1 мы определяем группы D_3 и \check{D}_3 в терминах образующих и соотношений, а также даем определение P_1 -представления этих групп и связанных с этим объектом понятий. P_1 -представление и будет играть роль «естественного продолжения» R -матричного представления группы B_∞ на D_3 и \check{D}_3 .

§2 посвящен доказательству теорем, описывающих необходимые и достаточные условия существования P_1 -представлений групп D_3 и \check{D}_3 .

В §3 для случая R -матриц вида

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-3} & q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, мы строим продолжение представлений группы B_∞ , соответствующих этим R -матрицам, до P_1 -представлений групп D_3 и \check{D}_3 .

1. ГРУППЫ D_3 И \check{D}_3 . P_1 -ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭТИХ ГРУПП

Согласно работе [1], группа D_3 задается тремя образующими d_1, d_2, d_3 и следующим набором соотношений между ними:

$$\begin{aligned}d_3 d_2 d_1 &= 1, \\d_i u_i &= u_i d_i, \\u_i u_{i+1} &= u_{i+1} u_i,\end{aligned}$$

где $u_i = d_{i-1}^{-1} d_{i+1} d_{i-1} d_{i+1}^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Группа \check{D}_3 также задается тремя образующими d_1, d_2, d_3 , а соотношения между ними имеют вид

$$\begin{aligned}u_i d_i &= d_i u_i, \\w_i d_i &= d_i w_i, \\u_i (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) &= (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) u_i, \\w_i (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) &= (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) w_i, \\u_i (d_{i-1} d_{i+1}) &= (d_{i-1} d_{i+1}) u_i, \\w_i (d_{i-1} d_{i+1}) &= (d_{i-1} d_{i+1}) w_i,\end{aligned}$$

где $u_i = d_{i-1}^{-1} d_{i+1} d_{i-1} d_{i+1}^{-1}$, $w_i = d_{i+1} d_i d_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Замечание 1. Отметим, что соотношение $u_1 u_2 = u_2 u_1$ является следствием остальных соотношений в группе D_3 . Действительно

$$u_2 = d_1^{-1} d_3 d_1 d_3^{-1} = d_1^{-1} (d_1^{-1} d_2^{-1}) d_1 (d_1^{-1} d_2^{-1})^{-1} = d_1^{-2} d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1} d_1^2 = d_1^{-2} u_3 d_1^2,$$

а поскольку, в силу остальных соотношений, u_1 коммутирует с d_1 и u_3 , то имеет место следующая цепочка равенств:

$$u_1 u_2 = u_1 (d_1^{-2} u_3 d_1^2) = (d_1^{-2} u_3 d_1^2) u_1 = u_2 u_1.$$

Лемма 1. Соотношения в группе \check{D}_3 можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}u_i d_i &= d_i u_i, \\w_i d_i &= d_i w_i, \\u_i u_{i+1} &= u_{i+1} u_i, \\w_i u_{i+1} &= u_{i+1} w_i, \\u_i w_{i+1} &= w_{i+1} u_i, \\w_i w_{i+1} &= w_{i+1} w_i,\end{aligned}$$

где $u_i = d_{i-1}^{-1} d_{i+1} d_{i-1} d_{i+1}^{-1}$, $w_i = d_{i+1} d_i d_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$.

Доказательство. Действительно соотношения в группе \check{D}_3 эквивалентны соотношениям:

$$\begin{aligned}u_i d_i &= d_i u_i, \\w_i d_i &= d_i w_i, \\u_i (d_i d_i^{-1}) (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) &= (d_i d_i^{-1}) (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) u_i, \\w_i (d_i d_i^{-1}) (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) &= (d_i d_i^{-1}) (d_{i-1} d_i d_{i-1}^{-1}) w_i, \\u_i (d_{i-1} d_{i+1}) (d_i d_i^{-1}) &= (d_{i-1} d_{i+1}) (d_i d_i^{-1}) u_i, \\w_i (d_{i-1} d_{i+1}) (d_i d_i^{-1}) &= (d_{i-1} d_{i+1}) (d_i d_i^{-1}) w_i,\end{aligned}$$

Которые, в свою очередь, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
u_i d_i &= d_i u_i, \\
w_i d_i &= d_i w_i, \\
d_i^{-1} u_i d_i (d_i^{-1} d_{i-1} d_i d_i^{-1}) &= (d_i^{-1} d_{i-1} d_i d_i^{-1}) u_i, \\
d_i^{-1} w_i d_i (d_i^{-1} d_{i-1} d_i d_i^{-1}) &= (d_i^{-1} d_{i-1} d_i d_i^{-1}) w_i, \\
u_i (d_{i-1} d_{i+1} d_i) &= (d_{i-1} d_{i+1} d_i) d_i^{-1} u_i d_i, \\
w_i (d_{i-1} d_{i+1} d_i) &= (d_{i-1} d_{i+1} d_i) d_i^{-1} w_i d_i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_i d_i &= d_i u_i, \\
w_i d_i &= d_i w_i, \\
u_i u_{i+1} &= u_{i+1} u_i, \\
w_i u_{i+1} &= u_{i+1} w_i, \\
u_i w_{i+1} &= w_{i+1} u_i, \\
w_i w_{i+1} &= w_{i+1} w_i,
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Замечание 2. Соотношение $u_1 u_2 = u_2 u_1$ является следствием остальных соотношений в группе \check{D}_3 . Действительно

$$\begin{aligned}
u_2 &= d_1^{-1} d_3 d_1 d_3^{-1}, \\
&= d_1^{-1} d_3 d_1 d_3^{-1} (d_1^{-1} d_1), \\
&= d_1^{-1} d_3 d_1 (d_2 d_1^{-1} d_1 d_2^{-1}) d_3^{-1} d_1^{-1} d_1, \\
&= d_1^{-1} d_3 d_1 d_2 d_1^{-1} d_1 (d_2^{-1} d_3^{-1} d_1^{-1}) d_1, \\
&= d_1^{-1} (d_1^{-1} d_1) d_3 (d_2 d_2^{-1}) d_1 d_2 d_1^{-1} d_1 (d_1 d_3 d_2)^{-1} (d_1^{-1} d_1) d_1, \\
&= d_1^{-1} d_1^{-1} (d_1 d_3 d_2) (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) (d_1 (d_1 d_3 d_2)^{-1} d_1^{-1}) d_1 d_1, \\
&= d_1^{-2} (d_1 d_3 d_2) (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) (d_1 (d_1 d_3 d_2) d_1^{-1})^{-1} d_1^2, \\
&= d_1^{-2} (w_3 u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1})^{-1}) d_1^2,
\end{aligned}$$

а поскольку, в силу остальных соотношений, u_1 коммутирует с d_1, w_3 и u_3 , то имеет место следующая цепочка равенств:

$$u_1 u_2 = u_1 ((d_1^{-2} (w_3 u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1})^{-1})) d_1^2) = ((w_3 u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1})^{-1}) d_1^2) u_1 = u_2 u_1$$

Рассмотрим конечномерное векторное пространство V , векторное пространство W , а также набор пространств $V_{n,i}$, каждое из которых изоморфно V , индекс n пробегает все целые числа кроме 0, а $1 \leq i \leq 3$. По ним построим пространства P_1, P_2, P_3 следующим образом:

$$P_i = \bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,i},$$

где $1 \leq i \leq 3$. Из пространств P_i и W построим пространство T , которое будет играть роль пространства представления группы D_3 , следующим образом:

$$T = W \otimes P_1 \otimes P_2 \otimes P_3$$

Пространства P_i соответствуют страницам книги, а W - переплету.

Замечание 3. В дальнейшем базисные элементы бесконечных тензорных произведений $\bigotimes_{\alpha \in A} U_\alpha$ линейных пространств будем записывать в виде $\bigotimes_{\alpha \in A} u_\alpha$. В соответствии с этим правилом базисные элементы пространства T будут иметь вид

$$w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right)$$

Определим отображения перестановки тензорных сомножителей пространства T : $\tau_{12}: T \rightarrow W \otimes P_2 \otimes P_1 \otimes P_3$, $\tau_{23}: T \rightarrow W \otimes P_1 \otimes P_3 \otimes P_2$, $\tau_{31}: T \rightarrow W \otimes P_3 \otimes P_2 \otimes P_1$, а также операторы $S_{2,1}: T \rightarrow T$, $S_{3,2}: T \rightarrow T$, $S_{1,3}: T \rightarrow T$, определенные следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tau_{12}(u) &= w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right), \\ \tau_{23}(u) &= w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right), \\ \tau_{31}(u) &= w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right), \end{aligned}$$

$$(1) \quad S_{2,1}(u) = w \otimes \left(\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes (v_{1,1} \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right)) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right),$$

$$(2) \quad S_{3,2}(u) = w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes (v_{1,2} \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right)),$$

$$(3) \quad S_{1,3}(u) = w \otimes (v_{1,3} \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right)) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,3} \right),$$

где $u = w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right)$.

Замечание 4. Операторы $S_{2,1}$, $S_{3,2}$ и $S_{1,3}$ определяют сдвиги в пространствах пар страниц (из первой во вторую, из второй в третью, из третьей в первую соответственно), не затрагивающие пространство переплета W .

Для любых операторов $F: W \otimes V \rightarrow W \otimes V$ и $G: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ определим операторы G_0 , F_1 , F_2 на пространстве $W \otimes V \otimes V$ следующим образом:

$$\begin{aligned} G_0 &= \text{id}_W \otimes G, \\ F_1 &= F \otimes \text{id}_V, \\ F_2 &= (\text{id}_W \otimes \tau)(F \otimes \text{id}_V)(\text{id}_W \otimes \tau) = \tau_0 F_1 \tau_0, \end{aligned}$$

где τ — оператор перестановки на пространстве $V \otimes V$:

$$\tau(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$$

выполнено для любых $v_1, v_2 \in V$.

Каждому оператору $F: W \otimes V^{\otimes m} \rightarrow W \otimes V^{\otimes m}$ можно сопоставить 3 оператора $F^{(1)}$, $F^{(2)}$, $F^{(3)}$ на пространстве T следующим образом:

$$(4) \quad F^{(1)}(u) = F(w \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^m v_{k,1} \right)) \otimes \left(\bigotimes_{n=m+1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right),$$

$$(5) \quad F^{(2)}(u) = \tau_{12}(F(w \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^m v_{k,2} \right)) \otimes \left(\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right)) \tau_{12},$$

$$(6) \quad F^{(3)}(u) = \tau_{31}(F(w \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^m v_{k,3} \right)) \otimes \left(\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,3} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right)) \tau_{31},$$

где $u = w \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2} \right) \otimes \left(\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1} \right)$, $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 5. Нетрудно показать, что для операторов F и G на пространстве $W \otimes V^{\otimes m}$ выполнено

$$\begin{aligned} (FG)^{(i)} &= F^{(i)}G^{(i)}, \\ (F \otimes \text{id}_V^{\otimes k})^{(i)} &= F^{(i)}, \end{aligned}$$

где $1 \leq i \leq 3$, а k — произвольное натуральное число.

Определение 4. Линейное представление $\rho: D_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$ будем называть *P-представлением*, если существуют такие обратимые операторы X, Y и Z на пространстве $W \otimes V$, что

$$\begin{aligned}\rho(d_1) &= S_{1,3}X_1^{(3)}, \\ \rho(d_2) &= S_{2,1}Y_1^{(1)}, \\ \rho(d_3) &= S_{3,2}Z_1^{(2)}.\end{aligned}$$

Линейное представление $\check{\rho}: \check{D}_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$ будем называть *P-представлением*, если существуют такие обратимые операторы X, Y и Z на пространстве $W \otimes V$, что

$$\begin{aligned}\check{\rho}(d_1) &= S_{1,3}X_1^{(3)}, \\ \check{\rho}(d_2) &= S_{2,1}Y_1^{(1)}, \\ \check{\rho}(d_3) &= S_{3,2}Z_1^{(2)}.\end{aligned}$$

Операторы X, Y, Z будем называть *порождающими для P-представлений* ρ и $\check{\rho}$.

Определение 5. Линейное представление $\rho: D_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$ будем называть *P₁-представлением*, если оно является *P-представлением* и существует обратимый оператор $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ такой, что выполнено условие

$$\rho(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1}) = R_0^{(1)}.$$

Оператор R будем называть *определяющим для P₁-представления* ρ .

Линейное представление $\check{\rho}: \check{D}_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$ будем называть *P₁-представлением*, если оно является *P-представлением* и существуют обратимые операторы $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ и $H: V \rightarrow V$ такие, что выполнены условия

$$\begin{aligned}\check{\rho}(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1}) &= R_0^{(1)}, \\ \check{\rho}(d_1d_3d_2) &= H_0^{(1)}.\end{aligned}$$

Операторы R и H будем называть *определяющими для P₁-представления* $\check{\rho}$.

2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ P₁-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Этот параграф полностью посвящен доказательству следующих теорем:

Теорема 1. Для того, чтобы обратимые операторы X, Y, Z были порождающими для некоторого *P₁-представления* ρ группы D_3 с определяющим оператором R , необходимо и достаточно, чтобы R являлся решением уравнения Янга-Бакстера

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R),$$

и были выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}XZY &= \text{id}_W \otimes \text{id}_V, \\ Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes (\tau R).\end{aligned}$$

Теорема 2. Для того, чтобы обратимые операторы X, Y, Z были порождающими для некоторого *P₁-представления* $\check{\rho}$ группы \check{D}_3 с определяющими операторами R и H , необходимо и достаточно, чтобы R являлся решением уравнения Янга-Бакстера

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R),$$

и были выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes (\tau R), \\ XZY &= \text{id}_W \otimes H, \\ R(H \otimes \text{id}_V) &= (\text{id}_V \otimes H)R, \\ R(\text{id}_V \otimes H) &= (H \otimes \text{id}_V)R. \end{aligned}$$

Доказательству теорем предпошлим несколько лемм.

Лемма 2. Пусть U, V — векторные пространства, а F, G — операторы на пространстве $U \otimes V$ такие, что

$$\begin{aligned} F &= \bar{F} \otimes \text{id}_V, \\ G &= \text{id}_U \otimes \bar{G}, \end{aligned}$$

где $\bar{F} : U \rightarrow U$, $\bar{G} : V \rightarrow V$ — линейные операторы.
Тогда выполнено

$$FG = GF.$$

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 3. Для любых операторов $F : V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes m}$, $G : W \otimes V^{\otimes k} \rightarrow W \otimes V^{\otimes k}$, где $k, m \in \mathbb{N}$, выполняются следующие соотношения

$$\begin{aligned} F_0^{(1)}G^{(2)} &= G^{(2)}F_0^{(1)}, \\ F_0^{(1)}G^{(3)} &= G^{(3)}F_0^{(1)}, \\ G^{(1)}S_{3,2} &= S_{3,2}G^{(1)}, \end{aligned}$$

где $F_0 = \text{id}_W \otimes F$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что существуют операторы $\bar{F} : P_1 \rightarrow P_1$, $\bar{G}^{(1)} : W \otimes P_1 \rightarrow W \otimes P_1$, $\bar{G}^{(2)} : W \otimes P_2 \rightarrow W \otimes P_2$, $\bar{G}^{(3)} : W \otimes P_3 \rightarrow W \otimes P_3$, $\bar{S}_{3,2} : P_2 \otimes P_3 \rightarrow P_2 \otimes P_3$ такие, что

$$\begin{aligned} F_0^{(1)} &= \text{id}_W \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3}, \\ G^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3}, \\ G^{(2)} &= \tau_{12}(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12}, \\ G^{(3)} &= \tau_{31}(\bar{G}^{(3)} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_1})\tau_{31}, \\ S_{3,2} &= \text{id}_W \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \bar{S}_{3,2}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned}
F_0^{(1)}G^{(2)} &= F_0^{(1)}\tau_{12}(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= \tau_{12}\tau_{12}(\text{id}_W \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12}(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= \tau_{12}(\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_3})(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= \tau_{12}(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})(\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= \tau_{12}(\bar{G}^{(2)} \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12}\tau_{12}(\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= G^{(2)}\tau_{12}(\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_3})\tau_{12} \\
&= G^{(2)}(\text{id}_W \otimes \bar{F} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3}) \\
&= G^{(2)}F_0^{(1)}.
\end{aligned}$$

Соотношение $F_0^{(1)}G^{(3)} = G^{(3)}F_0^{(1)}$ доказывается аналогично. Соотношение $G^{(1)}S_{3,2} = S_{3,2}G^{(1)}$ получается из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}S_{3,2} &= (\bar{G}^{(1)} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3})(\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \bar{S}_{3,2}) \\
&= (\text{id}_W \otimes \text{id}_{P_1} \otimes \bar{S}_{3,2})(\bar{G}^{(1)} \otimes \text{id}_{P_2} \otimes \text{id}_{P_3}) \\
&= S_{3,2}G^{(1)}.
\end{aligned}$$

□

Рассмотрим произвольную тройку операторов X, Y, Z на пространстве $W \otimes V$ и введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= S_{1,3}X_1^{(3)}, \quad \bar{D}_2 = S_{2,1}Y_1^{(1)}, \quad \bar{D}_3 = S_{3,2}Z_1^{(2)}, \\
\bar{U}_1 &= \bar{D}_3^{-1}\bar{D}_2\bar{D}_3\bar{D}_2^{-1}, \quad \bar{U}_2 = \bar{D}_1^{-1}\bar{D}_3\bar{D}_1\bar{D}_3^{-1}, \quad \bar{U}_3 = \bar{D}_2^{-1}\bar{D}_1\bar{D}_2\bar{D}_1^{-1}, \\
\bar{W}_1 &= \bar{D}_2\bar{D}_1\bar{D}_3, \quad \bar{W}_2 = \bar{D}_3\bar{D}_2\bar{D}_1, \quad \bar{W}_3 = \bar{D}_1\bar{D}_3\bar{D}_2.
\end{aligned}$$

Лемма 4. *Имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}
\bar{W}_3 &= (XZY)^{(1)}, \\
\bar{U}_3 &= (\tau_0 Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1})^{(1)}, \\
\bar{W}_1 &= (YXZ)^{(2)}, \\
\bar{U}_1 &= (\tau_0 Z_2^{-1} Y_1 Z_2 Y_1^{-1})^{(2)}, \\
\bar{W}_2 &= (ZYX)^{(3)}, \\
\bar{U}_2 &= (\tau_0 X_2^{-1} Z_1 X_2 Z_1^{-1})^{(3)}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем справедливость первых двух соотношений. Из формул (1), (2), (3), (4), (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned}
S_{1,3}X_1^{(3)} &= X_1^{(1)}S_{1,3}, \\
Z_1^{(2)}S_{2,1} &= S_{2,1}Z_1^{(1)}, \\
S_{1,3}S_{3,2}S_{2,1} &= \text{id}_T.
\end{aligned}$$

В силу этих соотношений и замечания 5, формула, определяющая оператор \bar{W}_3 переписывается в виде

$$\begin{aligned}
\bar{W}_3 &= S_{1,3}X_1^{(3)}S_{3,2}(Z_1^{(2)}S_{2,1})Y_1^{(1)} \\
&= (S_{1,3}X_1^{(3)})S_{3,2}S_{2,1}Z_1^{(1)}Y_1^{(1)} \\
&= X_1^{(1)}(S_{1,3}S_{3,2}S_{2,1})Z_1^{(1)}Y_1^{(1)} \\
&= X_1^{(1)}Z_1^{(1)}Y_1^{(1)} \\
&= (X_1Z_1Y_1)^{(1)} \\
&= (XZY)^{(1)}.
\end{aligned}$$

Тем самым доказано, что выполняется первое соотношение из условия леммы. Формула для оператора \bar{U}_3 переписывается в виде

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3 &= (S_{2,1}Y_1^{(1)})^{-1}S_{1,3}X_1^{(3)}S_{2,1}Y_1^{(1)}(S_{1,3}X_1^{(3)})^{-1} \\
&= (S_{2,1}Y_1^{(1)})^{-1}S_{1,3}X_1^{(3)}S_{2,1}Y_1^{(1)}(X_1^{(1)}S_{1,3})^{-1} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}S_{2,1}^{-1}(S_{1,3}X_1^{(3)})S_{2,1}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}S_{2,1}^{-1}X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}S_{2,1}^{-1}X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}(S_{1,3}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1})(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}(S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})^{-1}(X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1})(X_1^{-1})^{(1)}.
\end{aligned}$$

Посмотрим, как действуют операторы $S_{1,3}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1}$, $X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}$ и $S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}$ на базисный вектор $u = w \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1})$ пространства T :

$$\begin{aligned}
S_{1,3}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1}(u) &= S_{1,3}Y_1^{(1)}(w \otimes (\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,1}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\
&= S_{1,3}((Y(w \otimes v_{2,1}) \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\
&= (Y_2(w \otimes v_{1,1} \otimes v_{2,1}) \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\
&= Y_2^{(1)}(u).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}(u) &= X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}(w \otimes (\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,1}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\
&= X_1^{(1)}S_{1,3}(w \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1}) \otimes (v_{2,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2})) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\
&= X_1^{(1)}(w \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (v_{2,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3})) \\
&= (X(w \otimes v_{1,1}) \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (v_{2,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\
&= S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}X_1^{(1)}(u).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1}(u) &= S_{2,1}^{-1}(w \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (v_{2,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3})) \\
&= w \otimes (v_{2,1} \otimes v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\
&= w \otimes (\tau(v_{1,1} \otimes v_{2,1}) \otimes (\bigotimes_{n=3}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\
&= \tau_0^{(1)}(u).
\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, получаем

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3 &= (Y_1^{-1})^{(1)}(S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})^{-1}(X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}Y_1^{(1)}S_{1,3}^{-1})(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}(S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})^{-1}(X_1^{(1)}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}(S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})(S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})^{-1}(S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}(S_{2,1}^{-1}S_{1,3}S_{2,1}S_{1,3}^{-1})X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1})^{(1)}\tau_0^{(1)}X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (Y_1^{-1}\tau_0)^{(1)}X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= \tau_0^{(1)}(\tau_0Y_1^{-1}\tau_0)^{(1)}X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= \tau_0^{(1)}(Y_2^{-1})^{(1)}X_1^{(1)}Y_2^{(1)}(X_1^{-1})^{(1)} \\
&= (\tau_0Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1})^{(1)}.
\end{aligned}$$

Остальные соотношения из условия леммы доказываются аналогично. \square

В качестве следствий леммы 3 и леммы 4 получаем

Следствие 1. Если существует оператор $R: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ такой, что

$$Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} = \text{id}_W \otimes R,$$

то выполнены соотношения

$$\bar{U}_3\bar{D}_3 = \bar{D}_3\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{U}_1 = \bar{U}_1\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{U}_2 = \bar{U}_2\bar{U}_3.$$

В частности, если X, Y, Z – порождающие операторы для некоторого P_1 -представления $\rho: D_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$, то выполнены соотношения

$$\rho(u_3)\rho(d_3) = \rho(d_3)\rho(u_3), \rho(u_3)\rho(u_1) = \rho(u_1)\rho(u_3), \rho(u_3)\rho(u_2) = \rho(u_2)\rho(u_3).$$

Следствие 2. Если существуют операторы $R: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ и $H: V \rightarrow V$ такие, что

$$\begin{aligned}
Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes R, \\
XZY &= \text{id}_W \otimes H,
\end{aligned}$$

то выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
\bar{U}_3\bar{D}_3 &= \bar{D}_3\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{U}_1 = \bar{U}_1\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{U}_2 = \bar{U}_2\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{W}_1 = \bar{W}_1\bar{U}_3, \bar{U}_3\bar{W}_2 = \bar{W}_2\bar{U}_3, \\
\bar{W}_3\bar{D}_3 &= \bar{D}_3\bar{W}_3, \bar{W}_3\bar{U}_1 = \bar{U}_1\bar{W}_3, \bar{W}_3\bar{U}_2 = \bar{U}_2\bar{W}_3, \bar{W}_3\bar{W}_1 = \bar{W}_1\bar{W}_3, \bar{W}_3\bar{W}_2 = \bar{W}_2\bar{W}_3.
\end{aligned}$$

В частности, если X, Y, Z – порождающие операторы для некоторого P_1 -представления $\check{\rho}: \check{D}_3 \rightarrow \text{Aut}(T)$, то выполнены соотношения

$$\begin{aligned}
\check{\rho}(u_3)\check{\rho}(d_3) &= \check{\rho}(d_3)\check{\rho}(u_3), \check{\rho}(u_3)\check{\rho}(u_1) = \check{\rho}(u_1)\check{\rho}(u_3), \\
\check{\rho}(u_3)\check{\rho}(u_2) &= \check{\rho}(u_2)\check{\rho}(u_3), \check{\rho}(u_3)\check{\rho}(w_1) = \check{\rho}(w_1)\check{\rho}(u_3), \check{\rho}(u_3)\check{\rho}(w_2) = \check{\rho}(w_2)\check{\rho}(u_3), \\
\check{\rho}(w_3)\check{\rho}(d_3) &= \check{\rho}(d_3)\check{\rho}(w_3), \check{\rho}(w_3)\check{\rho}(u_2) = \check{\rho}(u_2)\check{\rho}(w_3), \check{\rho}(w_3)\check{\rho}(u_1) = \check{\rho}(u_1)\check{\rho}(w_3), \\
\check{\rho}(w_3)\check{\rho}(w_1) &= \check{\rho}(w_1)\check{\rho}(w_3), \check{\rho}(w_3)\check{\rho}(w_2) = \check{\rho}(w_2)\check{\rho}(w_3).
\end{aligned}$$

Лемма 5. Пусть оператор F на пространстве $W \otimes V^{\otimes m}$, где $m \in \mathbb{N}$, представляется в виде

$$F = \text{id}_W \otimes G,$$

где G — оператор на пространстве $V^{\otimes m}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\bar{D}_2^{-k} F^{(1)} \bar{D}_2^k = \bar{D}_1^k F^{(1)} \bar{D}_1^{-k} = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V^{\otimes k} \otimes G)^{(1)}.$$

Доказательство. Докажем утверждение леммы для случая $k = 1$. Формулы для операторов $\bar{D}_2^{-1} F^{(1)} \bar{D}_2$ и $\bar{D}_1 F^{(1)} \bar{D}_1^{-1}$ переписываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{D}_2^{-1} F^{(1)} \bar{D}_2 &= (S_{2,1} Y_1^{(1)})^{-1} F^{(1)} (S_{2,1} Y_1^{(1)}) \\ &= (Y_1^{-1})^{(1)} (S_{2,1}^{-1} F^{(1)} S_{2,1}) Y_1^{(1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 F^{(1)} \bar{D}_1^{-1} &= (S_{1,3} X_1^{(3)}) F^{(1)} (S_{1,3} X_1^{(3)})^{-1} \\ &= (X_1^{(1)} S_{1,3}) F^{(1)} (X_1^{(1)} S_{1,3})^{-1} \\ &= X_1^{(1)} (S_{1,3} F^{(1)} S_{1,3}^{-1}) (X_1^{-1})^{(1)}. \end{aligned}$$

Посмотрим, как действуют операторы $S_{2,1}^{-1} F^{(1)} S_{2,1}$ и $S_{1,3} F^{(1)} S_{1,3}^{-1}$ на базисный вектор $u = w \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,1})$ пространства T :

$$\begin{aligned} S_{2,1}^{-1} F^{(1)} S_{2,1}(u) &= S_{2,1}^{-1} F^{(1)} (w \otimes (\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,1}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3})) \\ &= S_{2,1}^{-1} (w \otimes (G(\bigotimes_{k=2}^{m+1} v_{k,1}) \otimes (\bigotimes_{n=m+2}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\ &= w \otimes (v_{1,1} \otimes G(\bigotimes_{k=2}^{m+1} v_{k,1}) \otimes (\bigotimes_{n=m+2}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\ &= (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{1,3} F^{(1)} S_{1,3}^{-1}(u) &= S_{1,3} F^{(1)} (w \otimes (\bigotimes_{n=2}^{\infty} v_{n,1}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\ &= S_{1,3} (w \otimes G(\bigotimes_{k=2}^{m+1} v_{k,1}) \otimes (\bigotimes_{n=m+2}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (v_{1,1} \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}))) \\ &= w \otimes (v_{1,1} \otimes G(\bigotimes_{k=2}^{m+1} v_{k,1}) \otimes (\bigotimes_{n=m+2}^{\infty} v_{n,1})) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,2}) \otimes (\bigotimes_{n=1}^{\infty} v_{n,3}) \\ &= (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)}. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу замечания 5 и леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} \bar{D}_2^{-1} F^{(1)} \bar{D}_2 &= (Y_1^{-1})^{(1)} (S_{2,1}^{-1} F^{(1)} S_{2,1}) Y_1^{(1)} \\ &= (Y_1^{-1})^{(1)} (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)} Y_1^{(1)} \\ &= (Y^{-1} \otimes \text{id}_V^{\otimes m})^{(1)} (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)} (Y \otimes \text{id}_V^{\otimes m})^{(1)} \\ &= ((Y^{-1} \otimes \text{id}_V^{\otimes m}) (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G) (Y \otimes \text{id}_V^{\otimes m}))^{(1)} \\ &= (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 F^{(1)} \bar{D}_1^{-1} &= X_1^{(1)} (S_{1,3} F^{(1)} S_{1,3}^{-1}) (X_1^{-1})^{(1)} \\ &= X_1^{(1)} (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)} (X_1^{-1})^{(1)} \\ &= (X \otimes \text{id}_V^{\otimes m})^{(1)} (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)} (X^{-1} \otimes \text{id}_V^{\otimes m})^{(1)} \\ &= ((X \otimes \text{id}_V^{\otimes m}) (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G) (X^{-1} \otimes \text{id}_V^{\otimes m}))^{(1)} \\ &= (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes G)^{(1)}. \end{aligned}$$

Таким образом для случая $k = 1$ лемма доказана. Утверждение для $k > 1$ получается k -кратным применением изложенных выше рассуждений. \square

Лемма 6. Для любой группы D с образующими d_1, d_2, d_3 соотношения:

$$d_2^{-2}d_1d_2^2d_1^{-1} = (d_2^{-1}u_3d_2)u_3,$$

$$d_2^{-1}d_1^2d_2d_1^{-2} = u_3(d_1u_3d_1^{-1}).$$

$$u_1 = d_2^2((d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3)d_2^{-2},$$

$$u_2 = d_1^{-2}(w_3u_3(d_1w_3d_1^{-1})^{-1})d_1^2.$$

$$(7) \quad d_2^{-2}(d_1u_1)d_2^2d_1^{-1} = (d_2^{-1}u_3d_2)u_3(d_1((d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3)d_1^{-1}),$$

$$(8) \quad d_2^{-2}(u_1d_1)d_2^2d_1^{-1} = (d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3(d_2^{-1}u_3d_2)u_3.$$

$$(9) \quad d_2^{-1}d_1^2(d_2u_2)d_1^{-2} = u_3(d_1u_3d_1^{-1})(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1}),$$

$$(10) \quad d_2^{-1}d_1^2(u_2d_2)d_1^{-2} = d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1}).$$

$$w_1 = d_2w_3d_2^{-1},$$

$$w_2 = d_1^{-1}w_3d_1.$$

$$d_2^{-1}(w_1d_1)d_2d_1^{-1} = w_3u_3,$$

$$d_2^{-1}(d_1w_1)d_2d_1^{-1} = u_3(d_1w_3d_1^{-1}).$$

$$d_2^{-1}d_1(w_2d_2)d_1^{-1} = (d_2^{-1}w_3d_2)u_3,$$

$$d_2^{-1}d_1(d_2w_2)d_1^{-1} = u_3w_3.$$

$$d_1d_2^{-2}(w_2u_1)d_2^2d_1^{-1} = u_3^{-1}(d_2^{-1}u_3d_2)^{-1}d_2^{-2}w_3d_2^2(d_2^{-1}u_3d_2)u_3d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1},$$

$$d_1d_2^{-2}(u_1w_2)d_2^2d_1^{-1} = d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1}u_3^{-1}(d_2^{-1}u_3d_2)^{-1}d_2^{-2}w_3d_2^2(d_2^{-1}u_3d_2)u_3.$$

$$d_1^2d_2^{-1}(w_1u_2)d_2d_1^{-2} = d_1^2w_3d_1^{-2}(d_1u_3d_1^{-1})^{-1}u_3^{-1}d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1}),$$

$$d_1^2d_2^{-1}(u_2w_1)d_2d_1^{-2} = (d_1u_3d_1^{-1})^{-1}u_3^{-1}d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1})d_1^2w_3d_1^{-2}.$$

$$d_1d_2^{-1}(w_1w_2)d_2d_1^{-1} = (d_1w_3d_1^{-1})u_3^{-1}(d_2^{-1}w_3d_2)u_3,$$

$$d_1d_2^{-1}(w_2w_1)d_2d_1^{-1} = u_3^{-1}(d_2^{-1}w_3d_2)u_3(d_1w_3d_1^{-1}),$$

где

$$u_i = d_{i-1}^{-1}d_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}^{-1},$$

$$w_i = d_{i+1}d_id_{i-1},$$

получаются как следствия групповых соотношений:

$$d_id_i^{-1} = d_i^{-1}d_i = 1,$$

где $i \in \mathbb{Z}_3$.

Доказательство. Соотношения из условия леммы выводятся из групповых соотношений следующим образом:

$$\begin{aligned}
d_2^{-2}d_1d_2^2d_1^{-1} &= d_2^{-2}d_1d_2(d_1^{-1}d_2d_2^{-1}d_1)d_2d_1^{-1} \\
&= d_2^{-2}d_1d_2d_1^{-1}d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1}) \\
&= (d_2^{-1}d_2^{-1})d_1d_2d_1^{-1}d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1}) \\
&= d_2^{-1}(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1}) \\
&= (d_2^{-1}u_3d_2)u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1}d_1^2d_2d_1^{-2} &= d_2^{-1}d_1(d_2d_1^{-1}d_1d_2^{-1})d_1d_2d_1^{-1}d_1^{-1} \\
&= (d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})d_1(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})d_1^{-1} \\
&= u_3(d_1u_3d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= d_3^{-1}d_2d_3d_2^{-1} \\
&= d_3^{-1}d_2d_3(d_2d_2^{-1})d_2^{-1} \\
&= d_3^{-1}d_2(d_1^{-1}d_1)d_3d_2d_2^{-2} \\
&= d_3^{-1}(d_1^{-1}d_2d_2^{-1}d_1)d_2d_1^{-1}(d_1d_3d_2)d_2^{-2} \\
&= (d_2d_2^{-1})d_3^{-1}d_1^{-1}d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1d_3d_2)d_2^{-2} \\
&= d_2(d_2^{-1}d_3^{-1}d_1^{-1})d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1d_3d_2)d_2^{-2} \\
&= d_2(d_1d_3d_2)^{-1}d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1d_3d_2)d_2^{-2} \\
&= d_2(d_2d_2^{-1})(d_1d_3d_2)^{-1}d_2(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1d_3d_2)d_2^{-2} \\
&= d_2^2((d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3)d_2^{-2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= d_1^{-1}d_3d_1d_3^{-1} \\
&= d_1^{-1}d_3d_1d_3^{-1}(d_1^{-1}d_1) \\
&= d_1^{-1}d_3d_1(d_2d_1^{-1}d_1d_2^{-1})d_3^{-1}d_1^{-1}d_1 \\
&= d_1^{-1}d_3d_1d_2d_1^{-1}d_1(d_2^{-1}d_3^{-1}d_1^{-1})d_1 \\
&= d_1^{-1}(d_1^{-1}d_1)d_3(d_2d_2^{-1})d_1d_2d_1^{-1}d_1(d_1d_3d_2)^{-1}(d_1^{-1}d_1)d_1 \\
&= d_1^{-1}d_1^{-1}(d_1d_3d_2)(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1(d_1d_3d_2)^{-1}d_1^{-1})d_1d_1 \\
&= d_1^{-2}(d_1d_3d_2)(d_2^{-1}d_1d_2d_1^{-1})(d_1(d_1d_3d_2)d_1^{-1})^{-1}d_1^2 \\
&= d_1^{-2}(w_3u_3(d_1w_3d_1^{-1})^{-1})d_1^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-2}(d_1u_1)d_2^2d_1^{-1} &= d_2^{-2}(d_1(d_2^2(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_2^{-2}))d_2^2d_1^{-1} \\
&= d_2^{-2}d_1d_2^2(d_1^{-1}d_1)(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)(d_2^{-2}d_2^2)d_1^{-1} \\
&= (d_2^{-2}d_1d_2^2d_1^{-1})d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1} \\
&= (d_2^{-1}u_3d_2)u_3d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-2}(u_1 d_1) d_2^2 d_1^{-1} &= d_2^{-2}((d_2^2(d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_2^{-2}) d_1) d_2^2 d_1^{-1} \\
&= (d_2^{-2} d_2^2)(d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3)(d_2^{-2} d_1 d_2^2 d_1^{-1}) \\
&= (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3)(d_2^{-2} d_1 d_2^2 d_1^{-1}) \\
&= (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3)(d_2^{-1} u_3 d_2) u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} d_1^2 (d_2 u_2) d_1^{-2} &= d_2^{-1} d_1^2 d_2 (d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2) d_1^{-2} \\
&= (d_2^{-1} d_1^2 d_2 d_1^{-2})(w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) \\
&= u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1})(w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} d_1^2 (u_2 d_2) d_1^{-2} &= d_2^{-1} d_1^2 (d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2^2) d_2 d_1^{-2} \\
&= d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2 d_2 d_1^{-2} \\
&= d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) (d_2 d_2^{-1}) d_1^2 d_2 d_1^{-2} \\
&= d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 (d_2^{-1} d_1^2 d_2 d_1^{-2}) \\
&= d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

$$w_1 = d_2 d_1 d_3 = d_2 (d_1 d_3 d_2) d_2^{-1} = d_2 w_3 d_2^{-1}.$$

$$w_2 = d_3 d_2 d_1 = d_1^{-1} (d_1 d_3 d_2) d_1 = d_1^{-1} w_3 d_1.$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} (w_1 d_1) d_2 d_1^{-1} &= d_2^{-1} ((d_2 w_3 d_2^{-1}) d_1) d_2 d_1^{-1} \\
&= w_3 (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) \\
&= w_3 u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} (d_1 w_1) d_2 d_1^{-1} &= d_2^{-1} (d_1 (d_2 w_3 d_2^{-1})) d_2 d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_1 d_2 w_3 d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_1 d_2 (d_1^{-1} d_1) w_3 d_1^{-1} \\
&= (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) d_1 w_3 d_1^{-1} \\
&= u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} d_1 (w_2 d_2) d_1^{-1} &= d_2^{-1} d_1 ((d_1^{-1} t_1 d_1) d_2) d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} w_3 d_1 d_2 d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} w_3 (d_2 d_2^{-1}) d_1 d_2 d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} w_3 d_2 (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) \\
&= (d_2^{-1} w_3 d_2) u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-1} d_1 (d_2 w_2) d_2 d_1^{-1} &= d_2^{-1} d_1 (d_2 (d_1^{-1} w_1 d_1)) d_1^{-1} \\
&= d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1} w_1 \\
&= u_3 w_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2^{-2} (w_2 u_1) d_2^2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-2} (d_1^{-1} w_3 d_1) (d_2^2 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_2^{-2}) d_2^2 d_1^{-1} \\
&= d_1 d_2^{-2} d_1^{-1} w_3 d_1 d_2^2 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} \\
&= d_1 d_2^{-2} d_1^{-1} (d_2^2 d_2^{-2}) w_3 (d_2^2 d_2^{-2}) d_1 d_2^2 (d_1^{-1} d_1) (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} \\
&= (d_1 d_2^{-2} d_1^{-1} d_2^2) d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-2} d_1 d_2^2 d_1^{-1}) d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} \\
&= u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3 d_2)^{-1} d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 d_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2^{-2} (u_1 w_2) d_2^2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-2} (d_2^2 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_2^{-2}) (d_1^{-1} w_3 d_1) d_2^2 d_1^{-1} \\
&= d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_2^{-2} d_1^{-1} w_3 d_1 d_2^2 d_1^{-1} \\
&= d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) (d_1^{-1} d_1) d_2^{-2} d_1^{-1} (d_2^2 d_2^{-2}) w_3 (d_2^2 d_2^{-2}) d_1 d_2^2 d_1^{-1} \\
&= d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} (d_1 d_2^{-2} d_1^{-1} d_2^2) d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-2} d_1 d_2^2 d_1^{-1}) \\
&= d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3 d_2)^{-1} d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1^2 d_2^{-1} (w_1 u_2) d_2 d_1^{-2} &= d_1^2 d_2^{-1} (d_2 w_3 d_2^{-1}) (d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2) d_2 d_1^{-2} \\
&= d_1^2 w_3 d_2^{-1} d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2 d_2 d_1^{-2} \\
&= d_1^2 w_3 (d_1^{-2} d_1^2) d_2^{-1} d_1^{-2} (d_2 d_2^{-1}) (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) (d_2 d_2^{-1}) d_1^2 d_2 d_1^{-2} \\
&= d_1^2 w_3 d_1^{-2} (d_1^2 d_2^{-1} d_1^{-2} d_2) d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 (d_2^{-1} d_1^2 d_2 d_1^{-2}) \\
&= d_1^2 w_3 d_1^{-2} (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1} d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1^2 d_2^{-1} (u_2 w_1) d_2 d_1^{-2} &= d_1^2 d_2^{-1} (d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2) (d_2 w_3 d_2^{-1}) d_2 d_1^{-2} \\
&= d_1^2 d_2^{-1} d_1^{-2} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_1^2 d_2 w_3 d_1^{-2} \\
&= d_1^2 d_2^{-1} d_1^{-2} (d_2 d_2^{-1}) (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) (d_2 d_2^{-1}) d_1^2 d_2 (d_1^{-2} d_1^2) w_3 d_1^{-2} \\
&= (d_1^2 d_2^{-1} d_1^{-2} d_2) d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 (d_2^{-1} d_1^2 d_2 d_1^{-2}) d_1^2 w_3 d_1^{-2} \\
&= (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1} d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) d_1^2 w_3 d_1^{-2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2^{-1} (w_1 w_2) d_2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-1} (d_2 w_3 d_2^{-1}) (d_1^{-1} w_3 d_1) d_2 d_1^{-1} \\
&= d_1 w_3 d_2^{-1} d_1^{-1} w_3 d_1 d_2 d_1^{-1} \\
&= d_1 w_3 (d_1^{-1} d_1) d_2^{-1} d_1^{-1} (d_2 d_2^{-1}) w_3 (d_2 d_2^{-1}) d_1 d_2 d_1^{-1} \\
&= d_1 w_3 d_1^{-1} (d_1 d_2^{-1} d_1^{-1} d_2) d_2^{-1} w_3 d_2 (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) \\
&= (d_1 w_3 d_1^{-1}) u_3^{-1} (d_2^{-1} w_3 d_2) u_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2^{-1} (w_2 w_1) d_2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-1} (d_1^{-1} w_3 d_1) (d_2 w_3 d_2^{-1}) d_2 d_1^{-1} \\
&= d_1 d_2^{-1} d_1^{-1} w_3 d_1 d_2 w_3 d_1^{-1} \\
&= d_1 d_2^{-1} d_1^{-1} (d_2 d_2^{-1}) w_3 (d_2 d_2^{-1}) d_1 d_2 (d_1^{-1} d_1) w_3 d_1^{-1} \\
&= (d_1 d_2^{-1} d_1^{-1} d_2) d_2^{-1} w_3 d_2 (d_2^{-1} d_1 d_2 d_1^{-1}) d_1 w_3 d_1^{-1} \\
&= u_3^{-1} (d_2^{-1} w_3 d_2) u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Перейдем к доказательству теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Основное утверждение, которое потребуется нам для доказательства теоремы, заключается в следующем

Предложение 1. *Соотношения в группе D_3 можно переписать в следующем виде*

$$\begin{aligned} d_1 d_3 d_2 &= 1, \\ d_3 u_3 &= u_3 d_3, \quad u_2 u_3 = u_3 u_2, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \\ (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) &= u_3 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3, \\ (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3 d_2) &= u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Напомним, что соотношения в группе D_3 имеют вид

$$\begin{aligned} d_3 d_2 d_1 &= 1, \\ d_i u_i &= u_i d_i, \\ u_i u_{i+1} &= u_{i+1} u_i, \end{aligned}$$

где $u_i = d_{i-1}^{-1} d_{i+1} d_{i-1} d_{i+1}^{-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$. Очевидно, что эту систему соотношений можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_3 &= 1, \\ d_3 u_3 &= u_3 d_3, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \quad u_2 u_3 = u_3 u_2, \\ d_2^{-2} (d_1 u_1) d_2^2 d_1^{-1} &= d_2^{-2} (u_1 d_1) d_2^2 d_1^{-1}, \\ d_2^{-1} d_1^2 (d_2 u_2) d_1^{-2} &= d_2^{-1} d_1^2 (u_2 d_2) d_1^{-2}, \\ u_1 u_2 &= u_2 u_1, \end{aligned}$$

где $w_3 = d_1 d_3 d_2$. Используя замечание 1 и соотношений (8), (7), (10), (9) леммы 6, получаем, что эта система соотношений эквивалентна системе

$$\begin{aligned} w_3 &= 1, \\ d_3 u_3 &= u_3 d_3, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \quad u_2 u_3 = u_3 u_2, \\ (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 (d_1 ((d_2^{-1} w_3 d_2)^{-1} u_3 w_3) d_1^{-1}) &= (d_2^{-1} w_3 d_2)^{-1} u_3 w_3 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3, \\ u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) &= d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}). \end{aligned}$$

В силу соотношения $w_3 = 1$, в последних двух равенствах мы можем сократить слова w_3 , $d_2^{-1} w_3 d_2$, $d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}$, в результате чего получим эквивалентную систему вида

$$\begin{aligned} d_1 d_3 d_2 &= 1, \\ d_3 u_3 &= u_3 d_3, \quad u_2 u_3 = u_3 u_2, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \\ (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) &= u_3 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3, \\ (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3 d_2) &= u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1})^{-1} u_3^{-1}. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Используя это предложение, лемму 4 и следствие 1, мы получаем, что для того, чтобы обратимые операторы X , Y , Z были порождающими для некоторого P_1 -представления ρ группы D_3 с определяющим оператором R , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены

соотношения

$$\begin{aligned}\rho(u_3) &= (\tau_0 Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1})^{(1)} = R_0^{(1)} \\ \rho(d_1 d_3 d_2) &= (XZY)^{(1)} = \text{id}_T, \\ (\rho(d_2)^{-1} \rho(u_3) \rho(d_2)) \rho(u_3) (\rho(d_1) \rho(u_3) \rho(d_1)^{-1}) &= \rho(u_3) (\rho(d_2)^{-1} \rho(u_3) \rho(d_2)) \rho(u_3), \\ \rho(u_3) (\rho(d_1) \rho(u_3) \rho(d_1)^{-1}) \rho(u_3) &= (\rho(d_2)^{-1} \rho(u_3) \rho(d_2)) \rho(u_3) (\rho(d_1) \rho(u_3) \rho(d_1)^{-1}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho(d_1) &= S_{1,3} X_1^{(3)}, \quad \rho(d_2) = S_{2,1} Y_1^{(1)}, \quad \rho(d_3) = S_{3,2} Z_1^{(2)}, \\ \rho(u_3) &= \rho(d_2)^{-1} \rho(d_1) \rho(d_2) \rho(d_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Используя лемму 5, мы получаем, что

$$\rho(d_1) \rho(u_3) \rho(d_1)^{-1} = \rho(d_2)^{-1} \rho(u_3) \rho(d_2) = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes R)^{(1)}.$$

Таким образом мы можем переписать необходимые и достаточные условия существования P_1 -представления в виде

$$\begin{aligned}(\text{id}_W \otimes \tau) Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes R, \\ XZY &= \text{id}_W \otimes \text{id}_V, \\ \text{id}_W \otimes ((\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)) &= \text{id}_W \otimes ((R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)), \\ \text{id}_W \otimes ((R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)) &= \text{id}_W \otimes ((\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)).\end{aligned}$$

Эти соотношения, как нетрудно видеть, эквивалентны следующим

$$\begin{aligned}Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes \tau R, \\ XZY &= \text{id}_W \otimes \text{id}_V, \\ (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R) &= (R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

В качестве очевидного следствия этой теоремы получаем

Следствие 3. Для построения P_1 -представления ρ группы D_3 с определяющим оператором R , задающим решение уравнения Янга-Бакстера, достаточно найти пару обратимых операторов $X: W \otimes V \rightarrow W \otimes V$, $Y: W \otimes V \rightarrow W \otimes V$, удовлетворяющих соотношению

$$Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1} = \text{id}_W \otimes (\tau R).$$

Доказательство теоремы 2. Ключевую роль в доказательстве теоремы будет играть следующее утверждение

Предложение 2. Соотношения в группе \check{D}_3 можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}u_3 d_3 &= d_3 u_3, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \quad u_3 u_2 = u_2 u_3, \quad u_3 w_1 = w_1 u_3, \quad u_3 w_2 = w_2 u_3, \\ w_3 d_3 &= d_3 w_3, \quad w_3 u_1 = u_1 w_3, \quad w_3 u_2 = u_2 w_3, \quad w_3 w_1 = w_1 w_3, \quad w_3 w_2 = w_2 w_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3u_3 &= u_3(d_1w_3d_1^{-1}), \\
(d_2^{-1}w_3d_2)u_3 &= u_3w_3, \\
(d_1w_3d_1^{-1})u_3^{-1}(d_2^{-1}w_3d_2)u_3 &= u_3^{-1}(d_2^{-1}w_3d_2)u_3(d_1w_3d_1^{-1}), \\
(d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3(d_2^{-1}u_3d_2)u_3 &= (d_2^{-1}u_3d_2)u_3(d_1((d_2^{-1}w_3d_2)^{-1}u_3w_3)d_1^{-1}), \\
d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1}) &= u_3(d_1u_3d_1^{-1})(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1}), \\
l_1 &= l_2, \\
l_3 &= l_4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_3^{-1}(d_2^{-1}u_3^{-1}d_2)d_2^{-2}w_3d_2^2(d_2^{-1}u_3d_2)u_3d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1}, \\
l_2 &= d_1(d_2^{-1}w_3^{-1}d_2u_3w_3)d_1^{-1}u_3^{-1}(d_2^{-1}u_3^{-1}d_2)d_2^{-2}w_3d_2^2(d_2^{-1}u_3d_2)u_3, \\
l_3 &= d_1^2w_3d_1^{-2}(d_1u_3^{-1}d_1^{-1})u_3^{-1}d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1}), \\
l_4 &= (d_1u_3^{-1}d_1^{-1})u_3^{-1}d_2^{-1}(w_3u_3d_1w_3^{-1}d_1^{-1})d_2u_3(d_1u_3d_1^{-1})d_1^2w_3d_1^{-2}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Напомним, что, в силу леммы 1, в качестве соотношений в группе \check{D}_3 можно выбрать следующие

$$\begin{aligned}
u_i d_i &= d_i u_i, \\
w_i d_i &= d_i w_i, \\
u_i u_{i+1} &= u_{i+1} u_i, \\
w_i u_{i+1} &= u_{i+1} w_i, \\
u_i w_{i+1} &= w_{i+1} u_i, \\
w_i w_{i+1} &= w_{i+1} w_i,
\end{aligned}$$

где $u_i = d_{i-1}^{-1}d_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}^{-1}$, $w_i = d_{i+1}d_i d_{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}_3$. Очевидно, что эту систему соотношений можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}
u_1 u_2 &= u_2 u_1, \\
u_3 d_3 &= d_3 u_3, \quad u_3 u_1 = u_1 u_3, \quad u_3 u_2 = u_2 u_3, \quad u_3 w_1 = w_1 u_3, \quad u_3 w_2 = w_2 u_3, \\
w_3 d_3 &= d_3 w_3, \quad w_3 u_1 = u_1 w_3, \quad w_3 u_2 = u_2 w_3, \quad w_3 w_1 = w_1 w_3, \quad w_3 w_2 = w_2 w_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_2^{-2}(d_1 u_1) d_2^2 d_1^{-1} &= d_2^{-2}(u_1 d_1) d_2^2 d_1^{-1}, \\
d_2^{-1} d_1^2 (d_2 u_2) d_1^{-2} &= d_2^{-1} d_1^2 (u_2 d_2) d_1^{-2}, \\
d_2^{-1} (w_1 d_1) d_2 d_1^{-1} &= d_2^{-1} (d_1 w_1) d_2 d_1^{-1}, \\
d_2^{-1} d_1 (w_2 d_2) d_1^{-1} &= d_2^{-1} d_1 (d_2 w_2) d_1^{-1}, \\
d_1 d_2^{-2} (w_2 u_1) d_2^2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-2} (u_1 w_2) d_2^2 d_1^{-1}, \\
d_1^2 d_2^{-1} (w_1 u_2) d_2 d_1^{-2} &= d_1^2 d_2^{-1} (u_2 w_1) d_2 d_1^{-2}, \\
d_1 d_2^{-1} (w_1 w_2) d_2 d_1^{-1} &= d_1 d_2^{-1} (w_2 w_1) d_2 d_1^{-1}.
\end{aligned}$$

Используя лемму 6 и замечание 2, получаем, что этот набор соотношений эквивалентен указанному в условии утверждения. \square

Используя это предложение, лемму 4 и следствие 2, мы получаем, что для того, чтобы обратимые операторы X , Y , Z были порождающими для некоторого P_1 -представления $\check{\rho}$

группы \check{D}_3 с определяющим операторами R и H , необходимо и достаточно, чтобы были выполнены соотношения

$$\begin{aligned}\check{\rho}(u_3) &= (\tau_0 Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1})^{(1)} = R_0^{(1)}, \\ \check{\rho}(w_3) &= (XZY)^{(1)} = H_0^{(1)}, \\ \check{\rho}(w_3 u_3) &= \check{\rho}(u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1})), \\ \check{\rho}((d_2^{-1} w_3 d_2) u_3) &= \check{\rho}(u_3 w_3), \\ \check{\rho}((d_1 w_3 d_1^{-1}) u_3^{-1} (d_2^{-1} w_3 d_2) u_3) &= \check{\rho}(u_3^{-1} (d_2^{-1} w_3 d_2) u_3 (d_1 w_3 d_1^{-1})), \\ \check{\rho}((d_2^{-1} w_3 d_2)^{-1} u_3 w_3 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3) &= \check{\rho}((d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 (d_1 ((d_2^{-1} w_3 d_2)^{-1} u_3 w_3) d_1^{-1})), \\ \check{\rho}(d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1})) &= \check{\rho}(u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1})), \\ \check{\rho}(l_1) &= \check{\rho}(l_2), \\ \check{\rho}(l_3) &= \check{\rho}(l_4),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\check{\rho}(d_1) &= S_{1,3} X_1^{(3)}, \quad \check{\rho}(d_2) = S_{2,1} Y_1^{(1)}, \quad \check{\rho}(d_3) = S_{3,2} Z_1^{(2)}, \\ l_1 &= u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3^{-1} d_2) d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3 d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1}, \\ l_2 &= d_1 (d_2^{-1} w_3^{-1} d_2 u_3 w_3) d_1^{-1} u_3^{-1} (d_2^{-1} u_3^{-1} d_2) d_2^{-2} w_3 d_2^2 (d_2^{-1} u_3 d_2) u_3, \\ l_3 &= d_1^2 w_3 d_1^{-2} (d_1 u_3^{-1} d_1^{-1}) u_3^{-1} d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}), \\ l_4 &= (d_1 u_3^{-1} d_1^{-1}) u_3^{-1} d_2^{-1} (w_3 u_3 d_1 w_3^{-1} d_1^{-1}) d_2 u_3 (d_1 u_3 d_1^{-1}) d_1^2 w_3 d_1^{-2},\end{aligned}$$

и если a — слово в образующих d_1, d_2, d_3 вида

$$a = \prod_{k=1}^n d_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

то через $\check{\rho}(a)$ мы обозначаем оператор, заданный формулой

$$\check{\rho}(a) = \prod_{k=1}^n \check{\rho}(d_{i_k})^{\varepsilon_k},$$

где $n \in \mathbb{N}$, и $\varepsilon_k \in \mathbb{Z}$, $i_k \in \mathbb{Z}_3$ для всех $1 \leq k \leq n$. Применяя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned}\check{\rho}(d_1) \check{\rho}(u_3) \check{\rho}(d_1)^{-1} &= \check{\rho}(d_2)^{-1} \check{\rho}(u_3) \check{\rho}(d_2) = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes R)^{(1)}, \\ \check{\rho}(d_1) \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_1)^{-1} &= \check{\rho}(d_2)^{-1} \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_2) = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes H)^{(1)}, \\ \check{\rho}(d_1)^2 \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_1)^{-2} &= \check{\rho}(d_2)^{-2} \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_2)^2 = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes H)^{(1)}, \\ \check{\rho}(d_1) \check{\rho}(d_2)^{-1} \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_2) \check{\rho}(d_1)^{-1} &= \check{\rho}(d_2)^{-1} \check{\rho}(d_1) \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_1)^{-1} \check{\rho}(d_2) = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes \text{id}_V \otimes H)^{(1)}.\end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \check{\rho}(u_3), \quad \sigma_2 = \check{\rho}(d_1) \check{\rho}(u_3) \check{\rho}(d_1)^{-1}, \\ t_1 &= \check{\rho}(w_3), \quad t_2 = \check{\rho}(d_1) \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_1)^{-1}, \quad t_3 = \check{\rho}(d_1)^2 \check{\rho}(w_3) \check{\rho}(d_1)^{-2}.\end{aligned}$$

Тогда предыдущие соотношения переписутся в виде

$$(11) \quad \sigma_1 = (\text{id}_W \otimes R)^{(1)}, \quad \sigma_2 = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes R)^{(1)},$$

$$(12) \quad t_1 = (\text{id}_W \otimes H)^{(1)}, \quad t_2 = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes H)^{(1)}, \quad t_3 = (\text{id}_W \otimes \text{id}_V \otimes \text{id}_V \otimes H)^{(1)}.$$

Из этих формул получаются следующие соотношения на операторы $\sigma_1, \sigma_2, t_1, t_2, t_3$:

$$(13) \quad t_1 t_2 = t_2 t_1, \quad t_1 t_3 = t_3 t_1, \quad t_2 t_3 = t_3 t_2, \quad \sigma_1 t_3 = t_3 \sigma_1, \quad \sigma_2 t_1 = t_1 \sigma_2.$$

Система необходимых и достаточных условий существования P_1 -представления в новых обозначениях запишется следующим образом:

$$(14) \quad (\text{id}_W \otimes \tau) \circ (Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1}) = \text{id}_W \otimes R, \\ XZY = \text{id}_W \otimes H,$$

$$(15) \quad t_1 \sigma_1 = \sigma_1 t_2,$$

$$t_2 \sigma_1 = \sigma_1 t_1,$$

$$t_2 \sigma_1^{-1} t_2 \sigma_1 = \sigma_1^{-1} t_2 \sigma_1 t_2,$$

$$\sigma_2 \sigma_1 t_3^{-1} \sigma_2 t_2 = t_2^{-1} \sigma_1 t_1 \sigma_2 \sigma_1,$$

$$\sigma_1 \sigma_2 t_1 \sigma_1 t_2^{-1} = t_2 \sigma_2 t_3^{-1} \sigma_1 \sigma_2,$$

$$\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} t_3 \sigma_2 \sigma_1 t_3^{-1} \sigma_2 t_2 = t_3^{-1} \sigma_2 t_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} t_3 \sigma_2 \sigma_1,$$

$$t_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} t_2 \sigma_2 t_3^{-1} \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} t_2 \sigma_2 t_3^{-1} \sigma_1 \sigma_2 t_3.$$

Используя формулы (11), (12), мы можем переписать соотношения (14), (15) в виде

$$(H \otimes \text{id}_V) \circ R = R \circ (\text{id}_V \otimes H),$$

$$(\text{id}_V \otimes H) \circ R = R \circ (H \otimes \text{id}_V).$$

В частности получаем:

$$(16) \quad t_2 \sigma_2 = \sigma_2 t_3, \quad t_3 \sigma_2 = \sigma_2 t_2.$$

Воспользовавшись этими соотношениями и соотношениями (11), (12), (13), мы можем переписать систему необходимых и достаточных условий существования P_1 -представления в виде

$$(\text{id}_W \otimes \tau) \circ (Y_2^{-1} X_1 Y_2 X_1^{-1}) = \text{id}_W \otimes R,$$

$$XZY = \text{id}_W \otimes H,$$

$$(H \otimes \text{id}_V) \circ R = R \circ (\text{id}_V \otimes H),$$

$$(\text{id}_V \otimes H) \circ R = R \circ (H \otimes \text{id}_V),$$

$$(17) \quad \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1,$$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2,$$

$$\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} t_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} t_3 \sigma_2 \sigma_1,$$

$$t_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 t_3.$$

Соотношение (17) можно переписать в виде

$$(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R) = (R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V).$$

Воспользовавшись этим соотношением и соотношениями (13), (16), мы можем записать систему необходимых и достаточных условий существования P_1 -представления в виде

$$\begin{aligned}(Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1}) &= \text{id}_W \otimes \tau R, \\ XZY &= \text{id}_W \otimes H, \\ (H \otimes \text{id}_V) \circ R &= R \circ (\text{id}_V \otimes H), \\ (\text{id}_V \otimes H) \circ R &= R \circ (H \otimes \text{id}_V), \\ (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R) &= (R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

В качестве очевидного следствия этой теоремы получаем

Следствие 4. *Для того чтобы обратимые операторы X, Y, Z были порождающими для некоторого P_1 -представления $\check{\rho}$ группы \check{D}_3 с определяющим оператором R и определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, необходимо и достаточно, чтобы R являлся решением уравнения Янга-Бакстера*

$$(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V) = (\text{id}_V \otimes R)(R \otimes \text{id}_V)(\text{id}_V \otimes R),$$

и были выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} &= \text{id}_W \otimes (\tau R), \\ XZY &= \lambda \cdot \text{id}_W \otimes \text{id}_V.\end{aligned}$$

Таким образом для построения P_1 -представления $\check{\rho}$ группы \check{D}_3 с определяющим оператором R , задающим решение уравнения Янга-Бакстера, и определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, достаточно найти пару операторов $X, Y \in \text{Aut}(W \otimes V)$, удовлетворяющих соотношению

$$Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} = \text{id}_W \otimes (\tau R).$$

3. КОНСТРУКЦИЯ P_1 -ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ R -МАТРИЦ

В силу следствий 3, 4 предыдущего параграфа, задача построения P_1 -представления группы D_3 и P_1 -представления группы \check{D}_3 со скалярным оператором H сводится к задаче построения операторов $X, Y \in \text{Aut}(W \otimes V)$, удовлетворяющих соотношению

$$(18) \quad Y_2^{-1}X_1Y_2X_1^{-1} = \text{id}_W \otimes (\tau R)$$

для некоторой R -матрицы, где операторы X_1 и Y_2 на пространстве $W \otimes V \otimes V$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}X_1 &= X \otimes \text{id}_V, \\ Y_2 &= (\text{id}_W \otimes \tau)(Y \otimes \text{id}_V)(\text{id}_W \otimes \tau).\end{aligned}$$

В дальнейшем нам будет удобнее рассматривать не сами операторы X и Y , а соответствующие им матрицы с коэффициентами из $\text{End}(W)$, где через $\text{End}(W)$ обозначено кольцо линейных операторов на пространстве W . Конкретнее, если нам дана пара пространств V, W , в первом из которых фиксирован конечный базис v_1, \dots, v_m , то оператору X на пространстве $W \otimes V$ ставится в соответствие матрица размера m на m с коэффициентами x_j^i из кольца $\text{End}(W)$ по следующему правилу:

$$X(u \otimes v_j) = x_j^i(u) \otimes v_i,$$

где u — вектор пространства W . Очевидно, что такой набор x_j^i существует для любого оператора X , определен оператором однозначно, и соответствие $X \rightarrow (x_j^i)$ задает изоморфизм

алгебр $\text{End}(W \otimes V)$ и $M_m(\text{End}(W))$, где через $M_m(\text{End}(W))$ мы обозначаем алгебру матриц размера $m \times m$ с коэффициентами из кольца $\text{End}(W)$.

Определение 6. Будем говорить, что набор операторов x_j^i на пространстве W удовлетворяет условию обратимости, если соответствующий этому набору элемент пространства $M_m(\text{End}(W))$ является обратимым. Здесь подразумевается, что операторные индексы i, j пробегают все значения от 1 до m .

Лемма 7. Рассмотрим четыре набора операторов $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$ на пространстве W , а $1 \leq i, j \leq 2$. Пусть $a_2^1 = b_1^2 = c_2^2 = d_1^1 = 0$. Для того, чтобы наборы операторов $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$ удовлетворяли условию обратимости, необходимо и достаточно, чтобы a_1^1 и a_2^2, b_1^1 и b_2^2, c_1^1 и c_2^2, d_1^1 и d_2^2 были обратимы.

Доказательство. Матрицы, соответствующие наборам $a_j^i, b_j^i, c_j^i, d_j^i$, имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & d_2^1 \\ d_1^1 & d_2^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что если операторы $a_1^1, a_2^2, b_1^1, b_2^2, c_1^1, c_2^2, d_1^1, d_2^2$ — обратимы, то обратными к A, B, C, D будут матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (a_1^1)^{-1} & 0 \\ -(a_2^2)^{-1}a_1^2(a_1^1)^{-1} & (a_2^2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} (b_1^1)^{-1} & -(b_1^1)^{-1}b_2^1(b_2^2)^{-1} \\ 0 & (b_2^2)^{-1} \end{pmatrix} \\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (c_1^1)^{-1} \\ (c_2^1)^{-1} & -(c_2^1)^{-1}c_1^1(c_2^2)^{-1} \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -(d_1^1)^{-1}d_2^1(d_2^2)^{-1} & (d_1^1)^{-1} \\ (d_2^1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Наоборот, если A, B, C, D обратимы, то легко показать, что диагональные элементы матриц A, B и элементы матриц C, D , расположенные на побочной диагонали, должны быть обратимы. \square

Пусть $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ — решение уравнения Янга-Бакстера, а X и Y операторы на пространстве $W \otimes V$, удовлетворяющие соотношению (13) для данной R -матрицы. Определим операторы $A: W \otimes V \rightarrow W \otimes V$ и $B: W \otimes V \rightarrow W \otimes V$ и оператор $G: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ следующим образом:

$$A = X, B = Y^{-1}, G = \tau R.$$

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$(19) \quad B_2 A_1 = G_0 A_1 B_2.$$

Выберем в пространстве V некоторый базис v_1, \dots, v_n и построим базис v_{ij} в пространстве $V \otimes V$ следующим образом:

$$v_{ij} = v_i \otimes v_j,$$

где $1 \leq i, j \leq n$.

Операторам A, B, A_1, B_2, G_0 сопоставляются матрицы $(a_j^i), (b_j^i), ((a_1)_{jl}^{ik}), ((b_2)_{jl}^{ik}), ((g_0)_{jl}^{ik})$ с коэффициентами из $\text{End}(W)$, а оператору G — матрица с коэффициентами $g_{jl}^{ik} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j, k, l \leq n$.

Лемма 8. Выполняются следующие равенства

$$(a_1)_{jl}^{ik} = a_l^k \delta_j^i, \\ (b_2)_{jl}^{ik} = b_j^i \delta_l^k,$$

где δ_j^i — символ Кронекера $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Кроме того уравнение (19) эквивалентно следующей системе уравнений

$$(20) \quad b_j^i a_l^k = g_{\alpha\beta}^{ik} a_l^\beta b_j^\alpha,$$

где $1 \leq i, j, k, l \leq n$, и по каждому из индексов α, β производится суммирование от 1 до n .

Доказательство. Для операторов A_1, B_2 выполнены соотношения

$$\begin{aligned} A_1(w \otimes v_l \otimes v_j) &= a_l^k(w) \otimes v_k \otimes v_j, \\ B_2(w \otimes v_l \otimes v_j) &= b_j^i(w) \otimes v_l \otimes v_i. \end{aligned}$$

Из этих формул сразу следует первое утверждение леммы. Заметим теперь, что, поскольку указанное в начале параграфа соответствие между операторами и матрицами является изоморфизмом соответствующих алгебр, то уравнение (19) эквивалентно системе

$$(21) \quad (b_2)_{\alpha\beta}^{ik} (a_1)_{jl}^{\alpha\beta} = (g_0)_{\alpha\beta}^{ik} (a_1)_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} (b_2)_{jl}^{\gamma\delta}.$$

Но в силу того, что $G_0 = \text{id}_W \otimes G$, имеем

$$(g_0)_{jl}^{ik}(w) = g_{jl}^{ik} w.$$

Таким образом, заменяя в уравнениях (21) $(g_0)_{jl}^{ik}$ на g_{jl}^{ik} и $(a_1)_{jl}^{ik}, (b_2)_{jl}^{ik}$ на их выражения через a_l^k, b_j^i , получаем второе утверждение леммы. \square

Согласно этой лемме задача построения P_1 -представления группы D_3 в случае конечномерного пространства V и фиксированного оператора R сводится к решению системы уравнений (20) относительно неизвестных операторов $b_j^i, a_l^k \in \text{End}(W)$, таких, что они удовлетворяют условию обратимости. В этой работе мы будем строить представления группы D_3 для случая, когда $\dim V = 2$, и существует базис v_1, v_2 пространства V такой, что матрица оператора R в соответствующем базисе пространства $V \otimes V$ представляется в виде

$$(22) \quad R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

либо в виде

$$(23) \quad R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-3} & q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix},$$

где $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Лемма 9. Пусть $\dim W = n$. Если q не является корнем степени $2n$ из единицы, то для R -матрицы (22) не существует решений уравнения (19).

Доказательство. Поскольку пространство $W \otimes V \otimes V$ конечномерно, то определена функция $\det: \text{End}(W \otimes V \otimes V) \rightarrow \mathbb{C}$ — определитель оператора. Нетрудно проверить, что $\det(G) = q^{2n}$, в то время как $\det(BAB^{-1}A^{-1}) = 1$. Отсюда сразу следует утверждение леммы. \square

Нетрудно показать, что в случае R -матрицы (22) система уравнений (20) принимает вид

$$(24) \quad b_1^1 a_1^1 = q a_1^1 b_1^1,$$

$$(25) \quad b_1^1 a_2^1 = q a_2^1 b_1^1,$$

$$(26) \quad b_2^1 a_1^1 = q a_1^1 b_2^1,$$

$$(27) \quad b_2^1 a_2^1 = q a_2^1 b_2^1,$$

$$(28) \quad b_1^1 a_1^2 = a_1^2 b_1^1 + (q - q^{-1}) a_1^1 b_1^2,$$

$$(29) \quad b_1^1 a_2^2 = a_2^2 b_1^1 + (q - q^{-1}) a_2^1 b_1^2,$$

$$(30) \quad b_2^1 a_1^2 = a_1^2 b_2^1 + (q - q^{-1}) a_1^1 b_2^2,$$

$$(31) \quad b_2^1 a_2^2 = a_2^2 b_2^1 + (q - q^{-1}) a_2^1 b_2^2,$$

$$(32) \quad b_1^2 a_1^1 = a_1^1 b_1^2,$$

$$(33) \quad b_1^2 a_2^1 = a_2^1 b_1^2,$$

$$(34) \quad b_2^2 a_1^1 = a_1^1 b_2^2,$$

$$(35) \quad b_2^2 a_2^1 = a_2^1 b_2^2,$$

$$(36) \quad b_1^2 a_1^2 = q a_1^2 b_1^2,$$

$$(37) \quad b_1^2 a_2^2 = q a_2^2 b_1^2,$$

$$(38) \quad b_2^2 a_1^2 = q a_1^2 b_2^2,$$

$$(39) \quad b_2^2 a_2^2 = q a_2^2 b_2^2.$$

Эту систему мы в дальнейшем будем называть *системой 1*.

Теорема 3. Для любого $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует P_1 -представление группы D_3 с определяющей R -матрицей (22) и бесконечномерным пространством переплета W .

Если q — примитивный корень m -ой степени из 1, то существуют P_1 -представление группы D_3 с определяющей R -матрицей (22) и конечномерным пространством переплета W , $\dim W = m^2$.

Доказательство. Доказательство теоремы заключается в явном построении операторов a_j^i, b_j^i , задающих решение системы 1 и удовлетворяющих условию обратимости. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство \bar{U} с базисом $\{e_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$. Через U_m обозначим линейную оболочку векторов $\{e_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Очевидно, что \bar{U} представляется в виде прямой суммы подпространств U_m . Соответствующие этому разложению проекторы обозначим через p_m

$$p_m(e_{k,n}) = \delta_{km} e_{k,n},$$

где δ_{km} — символ Кронекера.

Положим

$$\begin{aligned} a_1^1(e_{m,n}) &= q^m e_{m,n}, & b_1^2(e_{m,n}) &= q^m e_{m,n}, \\ a_2^1(e_{m,n}) &= 0, & b_2^2(e_{m,n}) &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что для таких операторов соотношения (32), (33), (34), (35) выполнены. Определим операторы

$$\begin{aligned} b_1^1(k) &= p_{k-1} b_1^1 p_k, & b_2^1(k) &= p_{k-1} b_2^1 p_k, \\ a_1^2(k) &= p_k a_1^2 p_{k-1}, & a_2^2(k) &= p_k a_2^2 p_{k-1}. \end{aligned}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Лемма 10. *Для того, чтобы выполнялись соотношения (24), (25), (26), (27), (36), (37), (38), (39), необходимо и достаточно, чтобы операторы $b_1^1, b_2^1, a_1^2, a_2^2$ удовлетворяли условиям*

$$\begin{aligned} b_1^1(e_{k,n}) &= b_1^1(k)(e_{k,n}), & b_2^1(e_{k,n}) &= b_2^1(k)(e_{k,n}), \\ a_1^2(e_{k,n}) &= a_1^2(k)(e_{k,n}), & a_2^2(e_{k,n}) &= a_2^2(k)(e_{k,n}). \end{aligned}$$

Доказательство. Очевидно. □

Рассмотрим векторное пространство U с базисом $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ зафиксируем изоморфизм между пространствами U_m и пространством U такой, что вектор $e_{m,n}$ переходит в вектор e_n при этом изоморфизме. Тем самым отображения $b_1^1(k), b_2^1(k), a_1^2(k), a_2^2(k)$ можно рассматривать как операторы на пространстве U (мы будем обозначать эти операторы также как и соответствующие отображения). Используя эти соглашения, перепишем соотношения (28) в виде

$$(40) \quad a_1^2(k)b_2^1(k) = b_2^1(k+1)a_1^2(k+1),$$

$$(41) \quad a_2^2(k)b_2^1(k) = b_2^1(k+1)a_2^2(k+1),$$

$$(42) \quad a_1^2(k)b_1^1(k) + (q + q^{-1})q^{2k}\text{id}_U = b_1^1(k+1)a_1^2(k+1),$$

$$(43) \quad a_2^2(k)b_1^1(k) = b_1^1(k+1)a_2^2(k+1),$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$\begin{aligned} b_2^1(k) &= \text{id}_U, & b_1^1(k) &= q^{2k}b_1, \\ a_1^2(k) &= a_1^2(0) = a_1, & a_2^2(k) &= a_2^2(0) = a_2, \end{aligned}$$

где b_1, a_1, a_2 — операторы на пространстве U , $k \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношения (40), (41) будут выполнены, а соотношения (42), (43) будут эквивалентны паре соотношений на операторы b_1, a_1, a_2 вида

$$(44) \quad a_2b_1 = q^2b_1a_2,$$

$$(45) \quad a_1b_1 + (q - q^{-1})\text{id}_U = q^2b_1a_1.$$

Определим операторы b_1, a_1, a_2 следующим образом:

$$a_2(e_n) = q^{2n}e_n, \quad a_1(e_n) = a_n e_{n-1}, \quad b_1(e_n) = b_{n+1}e_{n+1},$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Соотношения (44), (45) переписываются в виде следующей системы уравнений

$$c_{k+1} + (q - q^{-1}) = q^2c_k,$$

где $c_k = a_k b_k$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Ее решение имеет вид

$$c_k = q^{2k}c_0 - (q^{2k} - 1)q^{-1}$$

для любого $c_0 \in \mathbb{C}$. В частности, полагая $a_k = 1, b_k = q^{-1}$ для всех k , получаем решение системы 1. Выпишем теперь явные формулы для операторов a_j^i, b_j^i .

$$(46) \quad a_1^1(e_{m,n}) = q^m e_{m,n}, \quad a_2^1(e_{m,n}) = 0, \quad a_1^2(e_{m,n}) = e_{m+1,n-1}, \quad a_2^2(e_{m,n}) = q^{2n} e_{m+1,n},$$

$$(47) \quad b_1^1(e_{m,n}) = q^{2m-1} e_{m-1,n+1}, \quad b_2^1(e_{m,n}) = e_{m-1,n}, \quad b_1^2(e_{m,n}) = q^m e_{m,n}, \quad b_2^2(e_{m,n}) = 0.$$

Из этих формул и леммы 7 следует, что операторы A и B обратимы.

Таким образом, рассматривая в качестве пространства переплета W пространство \bar{U} и определяя операторы a_j^i, b_j^i на W с помощью формул (46), (47), получаем первое утверждение теоремы. В том случае, если q — примитивный корень k -ой степени из 1, из этого представления

мы можем сконструировать конечномерное представление следующим образом. Рассмотрим в качестве W пространство \bar{U}_k размерности k^2 с базисом $\bar{e}_{m,n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}_k$. Определим операторы a_j^i, b_j^i , используя следующие формулы

$$\begin{aligned} a_1^1(\bar{e}_{m,n}) &= q^m \bar{e}_{m,n}, & a_2^1(\bar{e}_{m,n}) &= 0, & a_1^2(\bar{e}_{m,n}) &= \bar{e}_{m+1,n-1}, & a_2^2(\bar{e}_{m,n}) &= q^{2n} \bar{e}_{m+1,n}, \\ b_1^1(\bar{e}_{m,n}) &= q^{2m-1} \bar{e}_{m-1,n+1}, & b_2^1(\bar{e}_{m,n}) &= \bar{e}_{m-1,n}, & b_1^2(\bar{e}_{m,n}) &= q^m \bar{e}_{m,n}, & b_2^2(\bar{e}_{m,n}) &= 0. \end{aligned}$$

Эти формулы отличаются от формул для бесконечномерного случая только тем, что мы рассматриваем все индексы по модулю k . Легко видеть, что операторы, определенные при помощи этих формул, корректно определены в случае $q = \sqrt[k]{1}$, задают решение системы 1, и соответствующие им операторы A и B обратимы. Тем самым теорема полностью доказана. \square

Следствие 5. Для любого $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует P_1 -представление группы \check{D}_3 с определяющей R -матрицей (22), определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и бесконечномерным пространством переплета W .

Если q — примитивный корень m -ой степени из 1, то существуют P_1 -представление группы D_3 с определяющей R -матрицей (22), определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и конечномерным пространством переплета W , $\dim W = m^2$.

В случае R -матрицы (23) система уравнений (20) принимает вид

$$\begin{aligned} b_1^1 a_1^1 &= q a_1^1 b_1^1, \\ b_1^1 a_2^1 &= q a_2^1 b_1^1, \\ b_2^1 a_1^1 &= q a_1^1 b_2^1, \\ b_2^1 a_2^1 &= q a_2^1 b_2^1, \\ q b_1^1 a_1^2 &= a_1^2 b_1^1, \\ q b_1^1 a_2^2 &= a_2^2 b_1^1, \\ q b_2^1 a_1^2 &= a_1^2 b_2^1, \\ q b_2^1 a_2^2 &= a_2^2 b_2^1, \\ q b_1^2 a_1^1 &= a_1^1 b_1^2 + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 b_1^1, \\ q b_1^2 a_2^1 &= a_2^1 b_1^2 + (q^2 - q^{-2}) a_2^2 b_1^1, \\ q b_2^2 a_1^1 &= a_1^1 b_2^2 + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 b_2^1, \\ q b_2^2 a_2^1 &= a_2^1 b_2^2 + (q^2 - q^{-2}) a_2^2 b_2^1, \\ b_1^2 a_1^2 &= q a_1^2 b_1^2, \\ b_1^2 a_2^2 &= q a_2^2 b_1^2, \\ b_2^2 a_1^2 &= q a_1^2 b_2^2, \\ b_2^2 a_2^2 &= q a_2^2 b_2^2. \end{aligned}$$

Эту систему мы в дальнейшем будем называть *системой 2*.

Теорема 4. Для любого $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует P_1 -представление группы D_3 с определяющей R -матрицей (23) и бесконечномерным пространством переплета W .

Если q — примитивный корень m -ой степени из 1, то существуют P_1 -представление группы D_3 с определяющей R -матрицей (23) и конечномерным пространством переплета W , $\dim W = m$.

Доказательство. Доказательство заключается в явном построении операторов a_j^i, b_j^i , задающих решение системы 2 и удовлетворяющих условию обратимости. Рассмотрим векторное пространство U с базисом $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Положим

$$(48) \quad b_2^1(e_n) = 0, \quad a_2^2(e_n) = 0$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Предложение 3. *Для того, чтобы наборы операторов a_j^i, b_j^i , удовлетворяющие условиям (48) задавали решение системы 2 и отвечали условию обратимости необходимо и достаточно, чтобы операторы a_j^i, b_j^i удовлетворяли следующей системе уравнений:*

$$b_2^1 = 0,$$

$$a_2^2 = 0,$$

$$a_1^1(b_1^1 b_2^2) = (b_1^1 b_2^2) a_1^1,$$

$$a_1^2(b_1^1 b_2^2) = (b_1^1 b_2^2) a_1^2,$$

$$(a_1^2 a_2^1)(b_1^1 b_2^2) = (b_1^1 b_2^2)(a_1^2 a_2^1),$$

$$(a_1^2 a_2^1) b_2^2 = b_2^2 (a_1^2 a_2^1),$$

$$(a_1^2 a_2^1)(b_1^2 b_2^2) = (a_1^2 a_2^1)(b_1^2 b_2^2),$$

$$q a_1^2 b_2^2 = b_2^2 a_1^2,$$

$$a_1^1 b_2^2 = q b_2^2 a_1^1,$$

$$q^2 a_1^2 (b_1^2 b_2^2) = (b_1^2 b_2^2) a_1^2,$$

$$q^2 (b_1^2 b_2^2) a_1^1 = a_1^1 (b_1^2 b_2^2) + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 (b_1^2 b_2^2),$$

и операторы b_1^1, b_2^2, a_2^1 и a_1^2 были обратимы. Эту систему в дальнейшем мы будем называть системой 2'.

Доказательство. Из леммы (7) следует, что для того, чтобы для операторов a_j^i, b_j^i , удовлетворяющих условиям (48), было выполнено условие обратимости, необходимо и достаточно, чтобы операторы b_1^1, b_2^2, a_2^1 и a_1^2 были обратимы. Очевидно, что, в силу выполнения соотношений (48), мы можем переписать систему 2 в виде

$$a_1^1 b_2^2 = q b_2^2 a_1^1,$$

$$a_2^1 b_2^2 = q b_2^2 a_2^1,$$

$$q a_1^2 b_2^2 = b_2^2 a_1^2,$$

$$q a_1^1 b_1^1 = b_1^1 a_1^1,$$

$$q a_2^1 b_1^1 = b_1^1 a_2^1,$$

$$a_1^2 b_1^1 = q b_1^1 a_1^2,$$

$$a_2^1 b_1^1 = q b_1^1 a_2^1,$$

$$q a_1^2 b_1^2 = b_1^2 a_1^2,$$

$$q b_1^2 a_1^1 = a_1^1 b_1^2 + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 b_1^1.$$

От этой системы, в силу обратимости оператора b_2^2 , мы можем перейти к эквивалентной системе вида

$$(49) \quad a_1^1 b_2^2 = q b_2^2 a_1^1, \quad a_2^1 b_2^2 = q b_2^2 a_2^1, \quad q a_1^2 b_2^2 = b_2^2 a_1^2,$$

$$\begin{aligned} (q a_1^2 b_1^2) b_2^2 &= (b_1^2 a_1^2) b_2^2, \\ (q a_2^1 b_1^1) b_2^2 &= (b_1^1 a_2^1) b_2^2, \\ (a_2^1 b_1^2) b_2^2 &= (q b_1^2 a_2^1) b_2^2, \\ (q a_1^1 b_1^1) b_2^2 &= (b_1^1 a_1^1) b_2^2, \\ (a_1^2 b_1^1) b_2^2 &= (q b_1^1 a_1^2) b_2^2, \\ (q b_1^2 a_1^1) b_2^2 &= (a_1^1 b_1^2 + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 b_1^1) b_2^2, \end{aligned}$$

Перепишем последние 6 соотношений этой системы, используя (49). Получаем систему соотношений

$$a_1^1 b_2^2 = q b_2^2 a_1^1, \quad q a_1^2 b_2^2 = b_2^2 a_1^2,$$

$$\begin{aligned} a_1^2 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^2, \quad q a_1^2 (b_1^2 b_2^2) = q^{-1} (b_1^2 b_2^2) a_1^2, \\ a_2^1 b_2^2 &= q b_2^2 a_2^1, \\ q a_2^1 (b_1^1 b_2^2) &= q (b_1^1 b_2^2) a_2^1, \\ a_2^1 (b_1^2 b_2^2) &= q^2 (b_1^2 b_2^2) a_2^1, \\ q a_1^1 (b_1^1 b_2^2) &= q (b_1^1 b_2^2) a_1^1, \\ q^2 (b_1^2 b_2^2) a_1^1 &= a_1^1 (b_1^2 b_2^2) + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 (b_1^1 b_2^2). \end{aligned}$$

Теперь от этой системы, в силу обратимости оператора a_1^2 , мы можем перейти к эквивалентной системе вида

$$(50) \quad a_1^1 b_2^2 = q b_2^2 a_1^1, \quad q a_1^2 b_2^2 = b_2^2 a_1^2,$$

$$(51) \quad \begin{aligned} a_1^2 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^2, \quad q^2 a_1^2 (b_1^2 b_2^2) = (b_1^2 b_2^2) a_1^2, \\ a_1^2 (a_2^1 b_2^2) &= a_1^2 (q b_2^2 a_2^1), \\ a_1^2 (a_2^1 (b_1^1 b_2^2)) &= a_1^2 ((b_1^1 b_2^2) a_2^1), \\ a_1^2 (a_2^1 (b_1^2 b_2^2)) &= a_1^2 (q^2 (b_1^2 b_2^2) a_2^1), \\ a_1^1 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^1, \\ q^2 (b_1^2 b_2^2) a_1^1 &= a_1^1 (b_1^2 b_2^2) + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 (b_1^1 b_2^2), \end{aligned}$$

которая, в силу (50) и (51), эквивалентна системе соотношений

$$\begin{aligned}
(a_1^2 a_2^1) b_2^2 &= b_2^2 (a_1^2 a_2^1), \\
(a_1^2 a_2^1) (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) (a_1^2 a_2^1), \\
(a_1^2 a_2^1) (b_1^2 b_2^2) &= (b_1^2 b_2^2) (a_1^2 a_2^1), \\
a_1^1 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^1, \\
a_1^2 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^2, \\
a_1^1 b_2^2 &= q b_2^2 a_1^1, \\
q a_1^2 b_2^2 &= b_2^2 a_1^2, \\
q^2 a_1^2 (b_1^2 b_2^2) &= (b_1^2 b_2^2) a_1^2, \\
q^2 (b_1^2 b_2^2) a_1^1 &= a_1^1 (b_1^2 b_2^2) + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 (b_1^1 b_2^2).
\end{aligned}$$

Добавляя к этой системе соотношения (48), получаем систему из условия утверждения. \square

Определим операторы S и Q на пространстве U формулами

$$\begin{aligned}
S(e_n) &= e_{n+1}, \\
Q(e_n) &= q^n(e_n).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что операторы S и Q обратимы и удовлетворяют соотношениям

$$(52) \quad QS = qSQ, \quad S^{-1}Q = qQS^{-1}.$$

Предложение 4. Для любого $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ операторы a_j^i, b_j^i , определенные формулами

$$(53) \quad a_1^1 = q^{-2}QS^2, \quad a_2^1 = Q^{-1}, \quad a_1^2 = Q, \quad a_2^2 = 0,$$

$$(54) \quad b_1^1 = SQ, \quad b_2^1 = 0, \quad b_1^2 = S^{-1}Q, \quad b_2^2 = Q^{-1}S^{-1}.$$

задают решение системы 2 и удовлетворяют условию обратимости.

Доказательство. Поскольку $b_2^1 = a_2^2 = 0$, а операторы b_1^1, b_2^2, a_2^1 и a_1^2 являются обратимыми, то, в силу предложения 3, достаточно доказать, что a_j^i, b_j^i удовлетворяют системе 2'. Напомним, что система 2' имеет вид:

$$\begin{aligned}
b_2^1 &= 0, \\
a_2^2 &= 0, \\
a_1^1 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^1, \\
a_1^2 (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) a_1^2, \\
(a_1^2 a_2^1) (b_1^1 b_2^2) &= (b_1^1 b_2^2) (a_1^2 a_2^1), \\
(a_1^2 a_2^1) b_2^2 &= b_2^2 (a_1^2 a_2^1), \\
(a_1^2 a_2^1) (b_1^2 b_2^2) &= (a_1^2 a_2^1) (b_1^2 b_2^2), \\
q a_1^2 b_2^2 &= b_2^2 a_1^2, \\
a_1^1 b_2^2 &= q b_2^2 a_1^1, \\
q^2 a_1^2 (b_1^2 b_2^2) &= (b_1^2 b_2^2) a_1^2, \\
q^2 (b_1^2 b_2^2) a_1^1 &= a_1^1 (b_1^2 b_2^2) + (q^2 - q^{-2}) a_1^2 (b_1^1 b_2^2).
\end{aligned}$$

Используя формулы (53), (54), получаем, что

$$\begin{aligned} b_2^1 &= 0, \quad a_2^2 = 0, \\ a_1^2 a_2^1 &= \text{id}_U, \quad b_1^1 b_2^2 = \text{id}_U, \quad b_1^2 b_2^1 = S^{-2}, \\ a_1^2 &= Q, \quad a_1^1 = q^{-2} Q S^2, \quad b_2^2 = Q^{-1} S^{-1}. \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что первые семь соотношений системы 2' выполняются автоматически, а остальные записываются в виде

$$\begin{aligned} q S^{-1} &= Q^{-1} S^{-1} Q, \\ q^{-2} Q S^2 Q^{-1} S^{-1} &= q Q^{-1} S^{-1} q^{-2} Q S^2, \\ q^2 Q S^{-2} &= S^{-2} Q, \\ q^2 (S^{-1} Q Q^{-1} S^{-1} q^{-2} Q S^2) &= q^{-2} Q S^2 S^{-1} Q Q^{-1} S^{-1} + (q^2 - q^{-2}) Q. \end{aligned}$$

Из (52) несложно получить, что все эти соотношения выполнены. \square

Таким образом, рассматривая в качестве пространства переплета W пространство U и определяя операторы a_j^i, b_j^i на W с помощью формул (53), (54), получаем первое утверждение теоремы. В том случае, если q — примитивный корень m -ой степени из 1, из этого представления мы можем сконструировать конечномерное следующим образом. Рассмотрим в качестве W пространство U_m размерности m с базисом \bar{e}_n , где $n \in \mathbb{Z}_m$. Зададим операторы Q_m, S_m на пространстве W с помощью формул

$$\begin{aligned} S_m(e_n) &= e_{n+1}, \\ Q_m(e_n) &= q^n(e_n), \end{aligned}$$

где $n \in \mathbb{Z}_m$.

Операторы a_j^i и b_j^i определим как

$$\begin{aligned} a_1^1 &= q^{-2} Q_m S_m^2, \quad a_2^1 = Q_m^{-1}, \quad a_1^2 = Q_m, \quad a_2^2 = 0, \\ b_1^1 &= S_m Q_m, \quad b_2^1 = 0, \quad b_1^2 = S_m^{-1} Q_m, \quad b_2^2 = Q_m^{-1} S_m^{-1}. \end{aligned}$$

Эти формулы отличаются от формул для бесконечномерного случая только тем, что мы рассматриваем индексы базисных векторов по модулю m . Легко видеть, что операторы, заданные при помощи этих формул, корректно определены в случае $q = \sqrt[m]{1}$, задают решение системы 2, и соответствующие им операторы A и B обратимы. Тем самым теорема полностью доказана. \square

Следствие 6. Для любого $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ существует P_1 -представление группы \check{D}_3 с определяющей R -матрицей (23), определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и конечномерным пространством переплета W .

Если q — примитивный корень m -ой степени из 1, то существуют P_1 -представление группы \check{D}_3 с определяющей R -матрицей (23), определяющим оператором $H = \lambda \cdot \text{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и конечномерным пространством переплета W , $\dim W = m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. А. Дынников, Конечно определенные группы и полугруппы в теории узлов, *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы, Сборник статей, Тр. МИАН*, **231**, Наука, М., (2000), 231–248
- [2] И. А. Дынников, Трехстраничный подход в теории узлов. Универсальная полугруппа, *Функц. анализ и его прил.*, **34:1** (2000), 29–40
- [3] V. G. Turaev, The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.* **92** (1988), 527-553

- [4] В. Г. Тураев, Операторные инварианты связок и R-матрицы, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53:5** (1989), 1073—1107

Раздел 12.

Исследование характера Чженя калибровочно-инвариантных семейств

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $p : \mathcal{G} \rightarrow B$ — расслоение *компактных* групп. Напомним, что это означает, что каждый слой $\mathcal{G}_b := p^{-1}(b)$ является компактной группой и что локально \mathcal{G} имеет вид $U \times G$, где $U \subset B$ открыто, а G — фиксированная компактная группа. Пусть X и B — локально-компактные пространства, а $\pi_X : X \rightarrow B$ — непрерывное отображение. В настоящей работе, так же, как и в [15], это отображение будет предполагаться локально-тривиальным расслоением. Часть настоящих результатов может быть обобщена на случай более общих отображений.

Пусть \mathcal{G} действует на X . Это действие всегда будет предполагаться послойным. Тогда мы можем поставить в соответствие этому действию \mathcal{G} на X группы \mathcal{G} -эquivарантной K -теории $K_{\mathcal{G}}^i(X)$, как было сделано в [15]. Мы напомним и слегка обобщим это определение в параграфе 2.

Для компактного X группа $K_{\mathcal{G}}^0(X)$ определяется как группа Гротендика \mathcal{G} -эquivарантных векторных расслоений на X . Если X не является компактным, то мы определяем группы $K_{\mathcal{G}}^0(X)$, используя послойные одноточечные компактификации. Мы будем называть эти группы просто *группами калибровочно-инвариантной K -теории X* , когда нам не нужно явно указывать \mathcal{G} . Причиной для рассмотрения групп калибровочно-инвариантной K -теории является то, что они служат естественной областью значений для индекса калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов. В свою очередь, причиной изучения калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов и их индекса является их связь со спектральной теорией и граничными задачами на некомпактных многообразиях. Некоторые возможные связи с полями Рамона-Рамона в теории струн были указаны в [9, 15]. См. также [1, 10, 13, 14].

В данной работе мы продолжаем изучение калибровочно-эquivарантной K -теории. Мы начинаем с предъявления двух альтернативных определений относительных $K_{\mathcal{G}}$ -групп, основанных на комплексах векторных расслоений. (В настоящей работе все векторные расслоения предполагаются комплексными, за исключением касательных расслоений и тех случаев, где это специально оговаривается.) Эти альтернативные определения, имеющие классические аналоги [2, 11], дают удобное описание для изучения произведений, особенно в относительном и некомпактном случаях. Произведения особенно полезны для доказательства изоморфизма Тома в калибровочно-эquivарантной теории, который является одним из важных результатов настоящей работы. Пусть $E \rightarrow X$ — \mathcal{G} -эquivарантный комплекс векторных расслоений. Тогда изоморфизм Тома — это естественный изоморфизм

$$(1) \quad \tau_E : K_{\mathcal{G}}^i(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^i(E).$$

(Имеется также вариант этого результата для spin^c -векторных расслоений, но мы его не будем обсуждать в настоящей работе, поскольку он нам не нужен для теоремы об индексе.) Изоморфизм Тома позволяет определить отображения Гизина (или отображения прямого образа) в K -теории. Как это хорошо известно из классической работы Атья и Зингера [4], изоморфизм Тома и отображения Гизина являются одними из главных ингредиентов, используемых при определении и изучении топологического индекса. Фактически, мы будем двигаться по направлению из указанной работы, чтобы определить топологический индекс для калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов. Некоторые другие подходы к изоморфизму Тома в общей постановке некоммутативной геометрии послужили предметом работ [7, 8, 12, 16, 13] и многих других.

Калибровочно-эквивариантная K -теория во многом ведет себя подобно обычной эквивариантной K -теории, но имеются и новые феномены. Например, группы $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ могут сводиться к $K^0(B)$, если \mathcal{G} имеет “много скручиваний” [15, Proposition 3.6]. Такого никогда не бывает у эквивариантной K -теории, когда действие группы тривиально, но сама группа нетривиальна. В [15] мы подходили к проблеме с двух сторон: во-первых, мы нашли условия на расслоение групп $p : \mathcal{G} \rightarrow B$, которое гарантирует, что $K_{\mathcal{G}}^0(X)$ не слишком мало (это условие названо *конечность голономии* и мы напомним его ниже), и, во-вторых, мы изучали замену для $K_{\mathcal{G}}^0(X)$, которая никогда не бывает слишком маленькой (эта замена — $K(C^*(\mathcal{G}))$, K -теория C^* -алгебры расслоения компактных групп \mathcal{G}).

В этой работе нам снова понадобится условие конечной голономии, так что мы напомним его сейчас. Чтобы определить условие конечной голономии, мы вводим *накрытие представлений* \mathcal{G} , обозначаемое $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow B$. Как пространство, $\widehat{\mathcal{G}}$ является объединением всех пространств представлений $\widehat{\mathcal{G}}_b$ слоев \mathcal{G}_b расслоения компактных групп \mathcal{G} . Одной из мер скрученности расслоения \mathcal{G} является голономия, связанная с покрытием $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow B$. Мы говорим, что \mathcal{G} имеет *конечную голономию в смысле теории представлений*, если $\widehat{\mathcal{G}}$ — объединение компактно-открытых подмножеств. (Эквивалентные условия могут быть получены в терминах фундаментальных групп, когда B линейно связно, см. Предложение 3 ниже.)

Пусть $C^*(\mathcal{G})$ — обертывающая C^* -алгебра расслоения компактных групп \mathcal{G} . Мы доказали в [15, Theorem 5.2], что

$$(2) \quad K_{\mathcal{G}}^j(B) \cong K_j(C^*(\mathcal{G})),$$

при условии, что \mathcal{G} имеет конечную голономию в смысле теории представлений. Это гарантирует, что $K_{\mathcal{G}}^j(B)$ не слишком мало. Это также нам указывает альтернативное (алгебраическое) определение групп $K_{\mathcal{G}}^i(X)$.

Работа имеет следующую структуру. Мы начинаем с определения калибровочно-эквивариантной K -теории и некоторых базовых результатов из [15], большинство из которых связано с “условием конечной голономии,” условием на расслоения компактных групп, которое мы напоминаем в параграфе 2. В параграфе 3 мы даем эквивалентное определение калибровочно-эквивариантной K -теории в терминах комплексов векторных расслоений. Это окажется особенно полезным при изучении топологического индекса. В параграфе 4 мы устанавливаем изоморфизм Тома в калибровочно-эквивариантной K -теории и в параграфе 5 мы определяем и изучаем отображения Гизина. Свойства отображений Гизина позволяют определить в параграфе 6 топологический индекс и установить его основные свойства. В параграфе 7 мы развиваем аксиоматический подход к понятию индекса, а в параграфе 8 доказываем теорему об индексе.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

Напомним определение калибровочно-эквивариантной K -теории и некоторые основные результаты из [15]. Значительную часть обсуждения займет обсуждение условия конечной голономии для расслоения компактных групп $p : \mathcal{G} \rightarrow B$.

*Все векторные расслоения в настоящей работе предполагаются **комплексными** векторными расслоениями, если не оговорено противное, за исключением касательных расслоений разнообразных многообразий, появляющихся ниже.*

2.1. Расслоения компактных групп и условия конечной голономии. Мы начинаем с определения расслоений компактных и локально-компактных групп. Затем мы изучаем условия конечной голономии для расслоений компактных групп.

Определение 1. Пусть B — локально-компактное пространство и G — локально-компактная группа. Обозначим через $\text{Aut}(G)$ группу автоморфизмов G . *Расслоением локально-компактных групп \mathcal{G} с типичным слоем G над B называется, по определению, расслоение $\mathcal{G} \rightarrow B$ с типичным слоем G и структурной группой $\text{Aut}(G)$.*

Мы закрепляем эти обозначения. Именно, с этого места и далее в работе, если только явно не оговорено противное, B будет компактным пространством и $\mathcal{G} \rightarrow B$ будет расслоением компактных групп с типичным слоем G .

Теперь нам нужно ввести голономию в смысле теории представлений для расслоения групп Ли с компактными слоями $p : \mathcal{G} \rightarrow B$. Пусть $\text{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов G . По определению, тогда существует такое главное $\text{Aut}(G)$ -расслоение $\mathcal{P} \rightarrow B$, что

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{P} \times_{\text{Aut}(G)} G := (\mathcal{P} \times G) / \text{Aut}(G).$$

В дальнейшем мы считаем \mathcal{P} фиксированным.

Пусть $\widehat{\mathcal{G}}$ — несвязное объединение множеств $\widehat{\mathcal{G}}_b$ классов эквивалентности неприводимых представлений группы \mathcal{G}_b . С помощью естественного действия $\text{Aut}(G)$ на $\widehat{\mathcal{G}}$ мы можем естественным образом отождествить $\widehat{\mathcal{G}}$ с $\mathcal{P} \times_{\text{Aut}(G)} \widehat{G}$ как расслоение над B .

Пусть $\text{Aut}_0(G)$ — связная компонента единицы в $\text{Aut}(G)$. Группа $\text{Aut}_0(G)$ действует тривиально на множестве $\widehat{\mathcal{G}}$, поскольку последнее дискретно. Пусть

$$H_R := \text{Aut}(G) / \text{Aut}_0(G), \quad \mathcal{P}_0 := \mathcal{P} / \text{Aut}_0(G), \quad \text{and} \quad \widehat{\mathcal{G}} \simeq \mathcal{P}_0 \times_{H_R} \widehat{G}.$$

Выше пространство $\widehat{\mathcal{G}}$ определено корректно, поскольку \mathcal{P}_0 является H_R -главным расслоением. Пространство $\widehat{\mathcal{G}}$ мы будем называть *пространством представлений \mathcal{G}* , а накрытие $\widehat{\mathcal{G}} \rightarrow B$ будем называть *накрытием представлений, связанным с \mathcal{G}* .

Предположим теперь, что B — линейно связное односвязное пространство, и зафиксируем точку $b_0 \in B$. Обозначим, как обычно, через $\pi_1(B, b_0)$ фундаментальную группу B . Тогда расслоение \mathcal{P}_0 классифицируется морфизмом

$$(3) \quad \rho : \pi_1(B, b_0) \rightarrow H_R := \text{Aut}(G) / \text{Aut}_0(G),$$

который будет называться *голономией накрытия представлений, связанного с \mathcal{G}* .

Для наших дальнейших рассуждений, нам будет иногда нужно следующее условие конечной голономии.

Определение 2. Мы говорим, что \mathcal{G} имеет *конечную голономию в смысле теории представлений*, если каждое $\sigma \in \widehat{\mathcal{G}}$ содержится в компактно-открытом подмножестве $\widehat{\mathcal{G}}$.

В случаях, представляющих для нас интерес, это условие может быть переформулировано следующим образом [15].

Предложение 3. Пусть B — линейно-связное и локально односвязное пространство. Тогда \mathcal{G} имеет конечную голономию в смысле теории представлений тогда и только тогда, когда $\pi_1(B, b_0)\sigma \subset \widehat{G}$ является конечным множеством для любого неприводимого представления σ группы G .

С этого момента и далее мы будем предполагать, что \mathcal{G} имеет конечную голономию в смысле теории представлений.

2.2. Калибровочно-эквивариантная K -теория. Определим теперь группы калибровочно-эквивариантной K -теории “ \mathcal{G} -расслоений” $\pi_Y : Y \rightarrow B$. Наши определения хорошо известны в случае, когда B сводится к одной точке (ср. [2, 11]). Прежде всего, нам нужно зафиксировать обозначения.

Если $f_i : Y_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$ — два отображения, то обозначим через

$$(4) \quad Y_1 \times_B Y_2 := \{(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2, f_1(y_1) = f_2(y_2)\}$$

их расслоенное произведение. Пусть $p : \mathcal{G} \rightarrow B$ — расслоение локально-компактных групп и $\pi_Y : Y \rightarrow B$ — непрерывное отображение. Мы будем говорить, что \mathcal{G} действует на Y , если каждая группа \mathcal{G}_b действует непрерывно на $Y_b := \pi^{-1}(b)$ и индуцированное отображение μ

$$\mathcal{G} \times_B Y := \{(g, y) \in \mathcal{G} \times Y, p(g) = \pi_Y(y)\} \ni (g, y) \longrightarrow \mu(g, y) := gy \in Y$$

непрерывно. Если \mathcal{G} действует на Y , мы будем говорить, что Y является \mathcal{G} -пространством. Если, в дополнение к этому, $Y \rightarrow B$ является также локально тривиальным, то мы будем говорить, что Y является \mathcal{G} -расслоением. Это определение — частный случай определения действия дифференцируемого группоида на пространстве.

Пусть $\pi_Y : Y \rightarrow B$ — \mathcal{G} -расслоение, где \mathcal{G} — расслоение компактных групп над B . Напомним, что векторное расслоение $\tilde{\pi}_E : E \rightarrow Y$ называется \mathcal{G} -эквивариантным векторным расслоением, если

$$\pi_E := \pi_Y \circ \tilde{\pi}_E : E \rightarrow B$$

является \mathcal{G} -пространством, проекция

$$\tilde{\pi}_E : E_b := \pi_E^{-1}(b) \rightarrow Y_b := \pi_Y^{-1}(b)$$

является $\mathcal{G}_b := p^{-1}(b)$ эквивариантной, а индуцированное действие $E_y \rightarrow E_{gy}$ элемента $g \in \mathcal{G}$ между соответствующими слоями $E \rightarrow Y$ линейно для любых $y \in Y_b$, $g \in \mathcal{G}_b$ и $b \in B$.

Чтобы определить калибровочно-эквивариантную K -теория, прежде всего, мы напомним некоторые предварительные определения из [15]. Пусть $\tilde{\pi}_E : E \rightarrow Y$ — \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение и $\tilde{\pi}_{E'} : E' \rightarrow Y'$ — \mathcal{G}' -эквивариантное векторное расслоение, для двух расслоений компактных групп $\mathcal{G} \rightarrow B$ и $\mathcal{G}' \rightarrow B'$. Мы будем говорить, что $(\gamma, \varphi, \eta, \psi) : (\mathcal{G}', E', Y', B') \rightarrow (\mathcal{G}, E, Y, B)$ является γ -эквивариантным морфизмом векторных расслоений, если следующие пять условий выполнены:

- (i) $\gamma : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$, $\varphi : E' \rightarrow E$, $\eta : Y' \rightarrow Y$, и $\psi : B \rightarrow B'$,
- (ii) все получающиеся диаграммы коммутативны,
- (iii) $\varphi(ge) = \gamma(g)\varphi(e)$ для всех $e \in E'_b$ и всех $g \in \mathcal{G}'_b$,
- (iv) γ является групповым морфизмом на каждом слое и
- (v) f — морфизм векторных расслоений.

Мы будем говорить, что $\phi : E \rightarrow E'$ является γ -эквивариантным морфизмом векторных расслоений, если, по определению, он является частью морфизма $(\gamma, \varphi, \eta, \psi) : (\mathcal{G}', E', Y', B') \rightarrow (\mathcal{G}, E, Y, B)$. Заметим, что η и ψ определены γ и ϕ .

Как обычно, если $\psi : B' \rightarrow B$ — непрерывное [соотв., гладкое] отображение, то мы определяем обратный образ $(\psi^*(\mathcal{G}), \psi^*(E), \psi^*(Y), B')$ для \mathcal{G} -эквивариантного векторного

расслоения $E \rightarrow Y$ как $\psi^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \times_B B'$, $\psi^*(E) = E \times_B B'$ и $\psi^*(Y) = Y \times_B B'$. Если $B' \subset B$ и ψ — вложение, то эта конструкция задает ограничение \mathcal{G} -эquivариантного векторного расслоения $E \rightarrow Y$ на замкнутое инвариантное подмножество $B' \subset B$ базы расслоения \mathcal{G} , давая $\mathcal{G}_{B'}$ -эquivариантное векторное расслоение. Как правило \mathcal{G} будет фиксированным, тем не менее.

Пусть $p : \mathcal{G} \rightarrow B$ — расслоение компактных групп и $\pi_Y : Y \rightarrow B$ — \mathcal{G} -пространство. Множество классов изоморфных \mathcal{G} -эquivариантных векторных расслоений $\tilde{\pi}_E : E \rightarrow Y$ будет обозначаться через $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(Y)$. На этом множестве мы вводим моноидальную операцию, обозначаемую “+,” при помощи прямой суммы векторных расслоений. Это определяет моноидальную структуру на множестве $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(Y)$, как и в случае, когда B состоит из одной точки.

Определение 4. Пусть $\mathcal{G} \rightarrow B$ — расслоение компактных групп, действующее на \mathcal{G} -пространстве $Y \rightarrow B$. Предположим, что Y компактно. *Группа \mathcal{G} -эquivариантной K -теории* $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$ определяется как групповое пополнение моноида $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(Y)$.

Работая с калибровочно-эquivариантной K -теорией, мы будем использовать следующую терминологию и обозначения. Если $E \rightarrow Y$ — \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение на Y , то мы будем обозначать через $[E]$ его класс в $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$. Таким образом, $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$ состоит из разностей $[E] - [E^1]$. Группы $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$ также будут называться группами *калибровочно-эquivариантной K -теории*, если не нужно явно указывать \mathcal{G} . Если B сводится к точке, то \mathcal{G} является группой, а группы $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$ сводятся к обычным эquivариантным K -группам.

Имеется следующее простое наблюдение, касающееся калибровочно-эquivариантной K -теории. Прежде всего, хорошо знакомые свойства функториальности обычной эquivариантной K -теории распространяются на группы калибровочно-эquivариантной K -теории. Например, предположим, что расслоение компактных групп $\mathcal{G} \rightarrow B$ действует на расслоении $Y \rightarrow B$ и что, сходным образом, $\mathcal{G}' \rightarrow B'$ действует на расслоении $Y' \rightarrow B'$. Пусть $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ — морфизм расслоений компактных групп и $f : Y \rightarrow Y'$ — γ -эquivариантное отображение. Тогда мы получаем естественный групповой морфизм

$$(5) \quad (\gamma, f)^* : K_{\mathcal{G}'}^0(Y') \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(Y).$$

Если γ — тождественный морфизм, то будем обозначать $(\gamma, f)^* = f^*$.

\mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение $E \rightarrow Y$ над \mathcal{G} -пространством $Y \rightarrow B$, где Y компактно, называется *тривиальным*, если, по определению, существует такое \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение $E' \rightarrow B$, что E изоморфно обратному образу E' на Y . Иными словами, $E \simeq Y \times_B E'$. Если $\mathcal{G} \rightarrow B$ имеет конечную голономию в смысле теории представлений и Y — компактное \mathcal{G} -расслоение, то всякое \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение над Y может быть вложено в тривиальное \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение. Это вложение с необходимостью является вложением на прямое слагаемое.

Если $\mathcal{G} \rightarrow B$ не имеет конечной голономии, то можно привести примеры, когда \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение не может быть вложено в тривиальное \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение [15]. Также, близкий пример из [15] показывает, что группы $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$ могут быть очень маленькими, если голономия \mathcal{G} “велика.”

Дальнейшие наблюдения говорят о том, что из определения следует что тензорное произведение векторных расслоений определяет естественную кольцевую структуру на $K_{\mathcal{G}}^0(Y)$. Мы будем обозначать произведение двух элементов a и b в этом кольце через $a \otimes b$ или, просто, ab , если нет опасности перепутать. В частности, группы $K_{\mathcal{G}}^i(X)$ для $\pi_X : X \rightarrow B$ снабжены естественной структурой $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ -модуля, полученной с использованием обратного образа векторных расслоений на B , именно, $ab := \pi_X^*(a) \otimes b \in K_{\mathcal{G}}^0(X)$ для $a \in K_{\mathcal{G}}^0(B)$ и $b \in K_{\mathcal{G}}^0(X)$.

Определение калибровочно-эquivариантных K -групп распространяется на некомпактные \mathcal{G} -пространства Y как в случае equivариантной K -теории. Пусть Y — \mathcal{G} -расслоение. Тогда мы будем обозначать через $Y^+ := Y \cup B$ компактное пространство, полученное из Y одноточечной компактификацией каждого слоя (напомним, что B компактно). Необходимость рассмотрения пространства Y^+ является также основной причиной рассмотрения также расслоений B , на не гладких вдоль слоев. Тогда

$$K_{\mathcal{G}}^0(Y) := \ker (K_{\mathcal{G}}^0(Y^+) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(B)).$$

Также, как и в классическом случае, положим

$$K_{\mathcal{G}}^n(Y, Y') := K_{\mathcal{G}}^0((Y \setminus Y') \times \mathbb{R}^n)$$

для \mathcal{G} -подрасслоения $Y' \subset Y$. Тогда [15] мы получаем следующий результат о периодичности:

Теорема 5. *Имеются естественные изоморфизмы*

$$K_{\mathcal{G}}^n(Y, Y') \cong K_{\mathcal{G}}^{n-2}(Y, Y').$$

Калибровочно-эquivариантная K -теория функториальна относительно открытых вложений. Действительно, пусть $U \subset X$ — открытое \mathcal{G} -эquivариантное подрасслоение. Тогда результаты [15, Section 3] дают нам естественное отображение

$$(6) \quad i_* : K_{\mathcal{G}}^n(U) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^n(X).$$

Действительно, i_* есть ни что иное, как композиция $K_{\mathcal{G}}^n(U) \cong K_{\mathcal{G}}^n(X, X \setminus U) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^n(X)$.

2.3. Дополнительные результаты. Теперь мы доказываем некоторые другие результаты о калибровочно-эquivариантной K -теории.

Пусть $\mathcal{G} \rightarrow B$ и $\mathcal{H} \rightarrow B$ — два расслоения компактных групп над B . Напомним, что \mathcal{H} -расслоение $\pi_X : X \rightarrow B$ называется *свободным*, если действие каждой группы \mathcal{H}_b на слое X_b является свободным (т.е. $hx = x$, $x \in X_b$, влечет что h является единицей \mathcal{G}_b .) Нам понадобится следующий результат, который является обобщением результата [11, с. 69]. Для простоты будем писать $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ вместо $\mathcal{G} \times_B \mathcal{H}$.

Теорема 6. *Пусть $\pi_X : X \rightarrow B$ — $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ -расслоение, являющееся свободным как \mathcal{H} -расслоение. Пусть $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{H}$ — (послойное) отображение факторизации. Для любого \mathcal{G} -эquivариантного векторного расслоения $\tilde{\pi}_E : E \rightarrow X/\mathcal{H}$ определим индуцированное векторное расслоение*

$$\pi^*(E) := \{(x, \varepsilon) \in X \times E, \pi(x) = \tilde{\pi}_E(\varepsilon)\} \rightarrow X,$$

с действием $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$, заданным как $(g, h) \cdot (x, \varepsilon) := ((g, h)x, g\varepsilon)$. Тогда π^* задает естественный изоморфизм $K_{\mathcal{G}}^0(X/\mathcal{H}) \rightarrow K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(X)$.

Доказательство. Пусть $\pi^* : K_{\mathcal{G}}^0(X/\mathcal{H}) \rightarrow K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(X)$ — отображение индуцирования, как и выше. Мы построим отображение $r : K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X/\mathcal{H})$, удовлетворяющее $\pi^* \circ r = \text{Id}$ and $r \circ \pi^* = \text{Id}$. Пусть $\pi_F : F \rightarrow X$ — $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ -векторное расслоение. Поскольку действие \mathcal{H} на X свободно, то индуцированное отображение $\bar{\pi}_F : F/\mathcal{H} \rightarrow X/\mathcal{H}$ фактор-пространств является локально-тривиальным \mathcal{G} -расслоением. Ясно, что эта конструкция инвариантна при гомотопии, а значит, мы можем определить $r[F] := [F/\mathcal{H}]$.

Проверим теперь, что r в самом деле — обратный к π^* . Обозначим через $F \ni f \rightarrow \mathcal{H}f \in F/\mathcal{H}$ фактор-отображение. Пусть $F \rightarrow X$ — $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ -векторное расслоение. Начнем с того, что тотальное пространство $\pi^* \circ r(F)$ равно

$$\{(x, \mathcal{H}f) \in X \times (F/\mathcal{H}), \pi^*(x) = \bar{\pi}_F(\mathcal{H}f)\},$$

по определению. Тогда отображение $F \ni f \rightarrow (\pi_F(f), \mathcal{H}f) \in \pi^* \circ r(F)$ является изоморфизмом. Значит, $\pi^*r = \text{Id}$.

Далее, рассмотрим \mathcal{G} -векторное расслоение $\pi_E : E \rightarrow X/\mathcal{H}$. Тотальное пространство $r \circ \pi^*(E)$ совпадает с

$$\{(\mathcal{H}y, \varepsilon) \in (X/\mathcal{H}) \times E, \mathcal{H}y = \pi_E(\varepsilon)\},$$

поскольку \mathcal{H} действует только на первую компоненту $\pi^*(E)$. Тогда

$$E \rightarrow r \circ \pi^*(E), \quad \varepsilon \mapsto (\pi(\varepsilon), \varepsilon)$$

— изоморфизм. Значит, $r \circ \pi^* = \text{Id}$. □

См. также [15, Theorem 3.5].

Следствие 7. Пусть P — $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ -расслоение, которое является свободным как \mathcal{H} -расслоение. Также, пусть W — \mathcal{H} -расслоение. Тогда имеется естественный изоморфизм

$$K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(P \times_B W) \cong K_{\mathcal{G}}(P \times_{\mathcal{H}} W).$$

Доказательство. Положим $X := P \times_B W$ в предыдущей теореме. Тогда X — свободное \mathcal{H} -расслоение, поскольку таковым является P , а $X/\mathcal{H} =: P \times_{\mathcal{H}} W$. □

В следующем параграфе нам также понадобится следующая фактор-конструкция, связанная с тривиализацией векторного расслоения над подмножеством. Точнее, если $Y \subset X$ — \mathcal{G} -инвариантное замкнутое подрасслоение, то обозначим через $X/_B Y$ послойное фактор-пространство над B , т.е. факторпространство X по отношению к отношению эквивалентности \sim , $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x, y \in Y_b$, для некоторого $b \in B$.

Если E — \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение над \mathcal{G} -расслоением X , рассматриваемое вместе с \mathcal{G} -эквивариантной тривиализацией над \mathcal{G} -подрасслоением $Y \subset X$, то мы можем обобщить факторизационную (или схлопывающую) конструкцию из [2, §1.4], чтобы получить векторное расслоение над $X/_B Y$, где через $X/_B Y$ мы обозначаем послойное фактор-расслоение над B , как и выше.

Лемма 8. Пусть X — \mathcal{G} -расслоение и $Y \subset X$ — замкнутое \mathcal{G} -инвариантное подрасслоение. Пусть $E \rightarrow X$ — \mathcal{G} -векторное расслоение, а $\alpha : E|_Y \cong Y \times_B \mathcal{V}$ — \mathcal{G} -эквивариантная тривиализация, где $\mathcal{V} \rightarrow B$ — \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение. Тогда мы можем естественным образом связать с (E, α) естественно определенное векторное расслоение $E/\alpha \rightarrow X/_B Y$, которое зависит только от гомотопического класса α .

Доказательство. Пусть $p : Y \times_B \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ — естественная проекция. Введем следующее отношение эквивалентности на E :

$$e \sim e' \Leftrightarrow e, e' \in E|_Y \text{ и } p\alpha(e) = p\alpha(e').$$

Пусть тогда E/α есть E/\sim . Это локально-тривиальное векторное расслоение над $X/_B Y$. В самом деле, необходимо проверить это только в окрестности $Y/_B Y \cong B$. Пусть U — \mathcal{G} -инвариантное открытое подмножество X такое, что α может быть расширено до изоморфизма $\tilde{\alpha} : E|_U \cong U \times_B \mathcal{V}$. Мы получаем изоморфизм

$$\alpha' : (E|_U)/\alpha \cong (U/_B Y) \times_B \mathcal{V}, \quad \alpha'(e) = \tilde{\alpha}(e).$$

Более того, $(U/_B Y) \times_B \mathcal{V}$ — локально-тривиальное \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение.

Предположим, что α_0 и α_1 — гомотопные тривиализации $E|_Y$, т.е. такие тривиализации, что существует тривиализация $\beta : E \times I|_{Y \times I} \cong Y \times I \times_B \mathcal{V}$, $\beta|_{E \times \{0\}} = \alpha_0$ и $\beta|_{E \times \{1\}} = \alpha_1$. Пусть

$$f : X/_B Y \times I \rightarrow (X \times I)/_{(B \times I)}(Y \times I).$$

Тогда расслоение $f^*((E \times I)/\beta)$ над $X/BY \times I$ удовлетворяет $f^*((E \times I)/\beta)|_{(X/BY) \times \{i\}} = E/\alpha_i$, $i = 0, 1$. Значит, $E/\alpha_0 \cong E/\alpha_1$. \square

3. K -ТЕОРИЯ И КОМПЛЕКСЫ

Для определения изоморфизма Тома удобно работать с эквивалентным определением калибровочно-эквивариантной K -теории в терминах комплексов векторных расслоений. Это окажется особенно полезным при изучении топологического индекса.

Утверждения и доказательства этого параграфа, за исключением, быть может, леммы 12, следуют классической схеме [2, 11], поэтому наше изложение будет достаточно сжатым.

3.1. $L_{\mathcal{G}}^n$ -группы. Мы начнем с того, что приспособим некоторые хорошо известные понятия и конструкции к нашей ситуации.

Пусть $X \rightarrow B$ — локально-компактное, паракомпактное \mathcal{G} -расслоение. *Конечный комплекс \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений* над X — это комплекс

$$(E^*, d) = \left(\dots \xrightarrow{d_{i-1}} E^i \xrightarrow{d_i} E^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \right)$$

$i \in \mathbb{Z}$, образованный \mathcal{G} -эквивариантными векторными расслоениями над X , где лишь конечное число из E^i является ненулевыми. Точнее, E^i — \mathcal{G} -эквивариантные векторными расслоениями, d_i — \mathcal{G} -эквивариантные морфизмы, $d_{i+1}d_i = 0$ для всех i и $E^i = 0$ для достаточно больших $|i|$. Мы также будем использовать обозначение $(E^*, d) = (E^0, \dots, E^n, d_i : E^i|_Y \rightarrow E^{i+1}|_Y)$, если $E^i = 0$ для $i < 0$ и для $i > n$.

Как обычно, *морфизм комплексов* $f : (E^*, d) \rightarrow (F^*, \delta)$ — это такая последовательность морфизмов $f_i : E^i \rightarrow F^i$, что $f_{i+1}d_i = \delta_{i+1}f_i$, для всех i . Эти конструкции задают категорию конечных комплексов \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений. Изоморфизм в этой категории будет обозначаться $(E^*, d) \cong (F^*, \delta)$.

Далее мы будем рассматривать пару (X, Y) , образованную \mathcal{G} -расслоениями, где X — компактное \mathcal{G} -расслоение, если явно не оговорено другое.

Определение 9. Пусть X — компактное \mathcal{G} -расслоение и Y — замкнутое \mathcal{G} -инвариантное подрасслоение. Обозначим через $C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ множество (классов изоморфных) последовательностей

$$(E^*, d) = (E^0, E^1, \dots, E^n, d_k : E^k|_Y \rightarrow E^{k+1}|_Y)$$

таких \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений над X , что $(E^k|_Y, d)$ точна, если мы полагаем $E^j = 0$ для $j < 0$ или $j > n$.

Снабдим $C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ структурой полугруппы, задаваемой прямой суммой комплексов. Элемент из $C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ называется *элементарным*, если он изоморфен комплексу вида

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow E \xrightarrow{\text{Id}} E \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

Два комплекса $(E^*, d), (F^*, \delta) \in C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда имеются такие элементарные комплексы $Q^1, \dots, Q^k, P^1, \dots, P^m \in C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$, что

$$E \oplus Q_1 \oplus \dots \oplus Q_k \cong F \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_m.$$

Мы пишем в этом случае $E \simeq F$. Полугруппа классов эквивалентности последовательностей из $C_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ будет обозначаться через $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$.

Мы получаем из определения естественные инъективные полугрупповые гомоморфизмы

$$C_{\mathcal{G}}^m(X, Y) \rightarrow C_{\mathcal{G}}^{m+1}(X, Y) \quad \text{и} \quad C_{\mathcal{G}}(X, Y) := \bigcup_n C_{\mathcal{G}}^n(X, Y).$$

Отношение эквивалентности \sim перестановочно с вложениями, так что указанные морфизмы индуцируют морфизмы $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^{n+1}(X, Y)$. Пусть $L_{\mathcal{G}}^{\infty}(X, Y) := \varinjlim L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$.

Лемма 10. Пусть $E \rightarrow X$ и $F \rightarrow X$ — \mathcal{G} -векторные расслоения. Пусть $\alpha : E|_Y \rightarrow F|_Y$ и $\beta : E \rightarrow F$ — сюръективные морфизмы \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений. Также, предположим, что α и $\beta|_Y$ гомотопны в множестве сюръективных морфизмов \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений. Тогда существует такой сюръективный морфизм \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений $\tilde{\alpha} : E \rightarrow F$, что $\tilde{\alpha}|_Y = \alpha$. Аналогичный результат остается верным, если мы заменим везде “сюръективный” на “инъективный” или “изоморфизм”.

Доказательство. Пусть $Z := (Y \times [0, 1]) \cup (X \times \{0\})$, а $\pi : Z \rightarrow X$ — проекция. Пусть $\pi^*(E) \rightarrow Z$ и $\pi^*(F) \rightarrow Z$ — обратные образы E и F . Гомотопия из формулировки леммы определяет такой сюръективный морфизм $a : \pi^*(E) \rightarrow \pi^*(F)$, что $a|_{Y \times \{1\}} = \alpha$ и $a|_{X \times \{0\}} = \beta$. По [15, Лемма 3.12], морфизм a может быть продолжен до сюръективного морфизма над $(U \times [0, 1]) \cup (X \times \{0\})$, где U — открытая \mathcal{G} -окрестность Y . (На самом деле, в упомянутой лемме мы рассматривали только случай изоморфизма, но случай сюръективного морфизма доказывается тем же способом.) Пусть $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ — такая непрерывная функция, что $\varphi(Y) = 1$ и $\varphi(X \setminus U) = 0$. Усредняя, мы можем считать, что φ — \mathcal{G} -эквивариантная. Теперь определим $\tilde{\alpha}(x) = a(x, \varphi(x))$ для всех $x \in X$. \square

Замечание 11. Пусть X — компактное \mathcal{G} -пространство и $Y = \emptyset$. Тогда имеется естественный изоморфизм $\chi_1 : L_{\mathcal{G}}^1(X, \emptyset) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X)$, переводящий класс E^1, E^0 to the element $[E^0] - [E^1]$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 12. Пусть $p : \mathcal{G} \rightarrow B$ — расслоение компактных групп и $\pi_X : X \rightarrow B$ — компактное \mathcal{G} -расслоение. Предположим, что π_X имеет сечение, которое мы используем для отождествления B с подмножеством X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(X, B) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(X) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(B)$$

точна.

Доказательство. Пусть $E = (E^1, E^0, \varphi)$ определяет такой элемент $L_{\mathcal{G}}^1(X)$, что его образ в $L_{\mathcal{G}}^1(B)$ равен нулю. Тогда определение $E \sim 0$ in $L_{\mathcal{G}}^1(B)$ показывает, что ограничения E^1 и E^0 на B изоморфны над B . Значит, рассматриваемая последовательность точна в члене $L_{\mathcal{G}}^1(X)$.

Предположим теперь, что (E^1, E^0, φ) представляет такой класс $L_{\mathcal{G}}^1(X, B)$, что его образ в $L_{\mathcal{G}}^1(X)$ равен нулю. Это означает (учитывая замечание 11), что имеется \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение \tilde{P} и изоморфизм $\tilde{\psi} : E^1 \oplus \tilde{P} \cong E^0 \oplus \tilde{P}$. Определим $P := \tilde{P} \oplus \pi_X^*(E^0|_B) \oplus \pi_X^*(\tilde{P}|_B)$, где $\pi_X : X \rightarrow B$ — каноническая проекция, как и в формулировке леммы. Также, положим $\psi = \tilde{\psi} \oplus \text{Id} : E^1 \oplus P \rightarrow E^0 \oplus P$. Это также изоморфизм.

Таким образом, мы получаем, что $T := \psi(\varphi \oplus \text{Id})^{-1}$ — автоморфизм $(E^0 \oplus P)|_B$, имеющий вид $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}$ по отношению к разложению

$$(E^0 \oplus P)|_B = (E^0 \oplus \tilde{P})|_B \oplus (E^0 \oplus \tilde{P})|_B.$$

Аutomорфизм $T := \psi(\varphi \oplus \text{Id})^{-1}$ гомотопен автоморфизму T_1 , заданному матрицей

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Поскольку T_1 продолжается до автоморфизма $E^0 \oplus P$ над X , именно, $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \pi_X^*(\beta) \end{pmatrix}$, то лемма 10 показывает, что автоморфизм $\psi(\varphi \oplus \text{Id})^{-1}$ также может быть продолжен на X , причем над B мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (E^1 \oplus P)|_B & \xrightarrow{\varphi \oplus \text{Id}} & (E^0 \oplus P)|_B \\ \downarrow \psi|_B & & \downarrow \alpha|_B = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \\ (E^0 \oplus P)|_B & \xrightarrow{\text{Id}} & (E^0 \oplus P)|_B. \end{array}$$

Значит, $(E^1, E^0, \varphi) \oplus (P, P, \text{Id}) \cong (E^0 \oplus P, E^0 \oplus P, \text{Id})$ и, таким образом, является нулем в $L_{\mathcal{G}}^1(X, B)$. \square

3.2. Эйлерова характеристика. Теперь мы обобщим рассмотренные конструкции на другие группы $L_{\mathcal{G}}^n$, доказывая таким образом существование и единственность эйлеровой характеристики.

Определение 13. Пусть X — компактное \mathcal{G} -пространство и $Y \subset X$ — \mathcal{G} -инвариантное подмножество. *Эйлеровой характеристикой* χ_n называется такое естественное преобразование функторов $\chi_n : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$, что для $Y = \emptyset$ оно принимает вид

$$\chi_n(E) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [E^i],$$

для всякой последовательности $E = (E^*, d) \in L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$.

Лемма 14. *Имеется единственное естественное преобразование функторов (т.е. эйлерова характеристика)*

$$\chi_1 : L_{\mathcal{G}}^1(X, Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X, Y),$$

которое для $Y = \emptyset$ имеет вид, указанный в 11.

Доказательство. Чтобы доказать единственность, предположим, что χ_1 и χ'_1 — две эйлеровы характеристики на $L_{\mathcal{G}}^1$. Тогда $\chi'_1 \chi_1^{-1}$ — естественное преобразование $K_{\mathcal{G}}^0$, которое тождественно на каждом $K_{\mathcal{G}}^0(X)$. Рассмотрим длинную точную последовательность

$$(7) \quad \cdots \rightarrow K_{\mathcal{G}}^{n-1}(Y, Y') \rightarrow K_{\mathcal{G}}^{n-1}(Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}_1}^{n-1}(Y') \\ \rightarrow K_{\mathcal{G}}^n(Y, Y') \rightarrow K_{\mathcal{G}}^n(Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^n(Y') \rightarrow \cdots$$

связанную с парой (Y, Y') \mathcal{G} -расслоений (см. [15], равенство (10), для доказательства точности этой последовательности). Отображение $K_{\mathcal{G}}^0(X, B) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X)$ из этой точной последовательности индуцировано вложением $(X, \emptyset) \rightarrow (X, B)$, и значит, в частности, оно естественно. Предположим, что $\pi_X : X \rightarrow B$ имеет сечение. Тогда точная последовательность (7) для $(Y, Y') = (X, B)$ дает естественную точную последовательность $0 \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X, B) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X)$. Вместе с леммой 12 это показывает, что $\chi'_1 \chi_1^{-1}$ тождественно на $K_{\mathcal{G}}^0(X, B)$. Напомним, что мы учлились обозначать через $X/_B Y$ послойное фактор-пространство над B , т.е. фактор-пространство X по отношению эквивалентности \sim , $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x, y \in Y_b$ для некоторого $b \in B$. Наконец, поскольку отображение $(X, Y) \rightarrow (X/_B Y, B)$ индуцирует изоморфизм $K_{\mathcal{G}}^0$ -групп [15, Theorem 3.19], то $\chi'_1 \chi_1^{-1}$ тождественно на $K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$ для всех пар (X, Y) .

Чтобы доказать существование эйлеровой характеристики χ_1 , предположим, что $(E^1, E^0, \alpha) := (\alpha : E^1 \rightarrow E^0)$ представляет элемент $L_{\mathcal{G}}^1(X, Y)$. Пусть X_0 и X_1 — два экземпляра X и $Z := X_0 \cup_Y X_1 \rightarrow B$ — \mathcal{G} -расслоение, полученное отождествлением двух

экземпляров $Y \subset X_i$, $i = 0, 1$. Отождествление $E^1|_Y$ и $E^0|_Y$ с помощью α определяет элемент $[F^0] - [F^1] \in K_{\mathcal{G}}^0(Z)$ следующим образом. Добавляя некоторое расслоение к обеим E^i , мы можем считать, что E^1 тривиально (т.е. оно изоморфно обратному образу векторного расслоения на B). Тогда E^1 продолжается до тривиального \mathcal{G} -векторного расслоения $\tilde{E}^1 \rightarrow Z$. Положим $F^0 := E^0 \cup_{\alpha} E^1$ и $F^1 := \tilde{E}^1$.

Точная последовательность (7) и естественные \mathcal{G} -ретракции $\pi_i : Z \rightarrow X_i$, дают естественные разложения в прямую сумму

$$(8) \quad K_{\mathcal{G}}^0(Z) = K_{\mathcal{G}}^0(Z, X_i) \oplus K_{\mathcal{G}}^0(X_i), \quad i = 0, 1.$$

Естественное отображение $(X_0, Y) \rightarrow (Z, X_1)$ индуцирует изоморфизм

$$k : K_{\mathcal{G}}^0(Z, X_1) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X_0, Y).$$

Определим теперь $\chi_1(E^0, E^1, \alpha)$ как совпадающее с образом при отображении k той компоненты $[E^1, \alpha, E^0]$, которая отвечает $K_{\mathcal{G}}^0(Z, X_1)$ (по отношению к разложению (8)). Из определения этого отображения сразу следует, что оно естественно, уважает разложение в прямые суммы и не зависит от прибавления элементарных элементов. Таким образом, заметив, что $\chi_1(E^1, E^0, \alpha) = [E^0] - [E^1]$ при $Y = \emptyset$, мы завершаем доказательство. \square

Нам также понадобится следующее свойство непрерывности функтора $L_{\mathcal{G}}^1$. Напомним, что мы приняли соглашение об обозначении через $X/_BY$ послыного фактор-расслоения над B .

Лемма 15. *Естественный гомоморфизм*

$$\Pi^* : L_{\mathcal{G}}^1(X/_BY, Y/_BY) = L_{\mathcal{G}}^1(X/_BY, B) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(X, Y)$$

является изоморфизмом для всех пар (X, Y) компактных \mathcal{G} -расслоений.

Доказательство. Леммы 14 и 12 дают коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_{\mathcal{G}}^1(X/_BY, B) & \xrightarrow{\Pi^*} & L_{\mathcal{G}}^1(X, Y) \\ \cong \downarrow \chi_1 & & \downarrow \chi_1 \\ K_{\mathcal{G}}^0(X/_BY, B) & \xrightarrow[\cong]{\Pi^*} & K_{\mathcal{G}}^0(X, Y). \end{array}$$

Это дает инъективность.

Для доказательства сюръективности предположим, что E^1 и E^0 — \mathcal{G} -эквивариантные векторные расслоения над X и $\alpha : E^1|_Y \rightarrow E^0|_Y$ — изоморфизм ограничений. Пусть $P \rightarrow X$ — такое \mathcal{G} -расслоение, что имеется изоморфизм $\beta : E^1 \oplus P \cong F$, где F — тривиальное расслоение (т.е. изоморфное обратному образу с B). Тогда $(E^1, E^0, \alpha) \sim (F, E^0 \oplus P, \gamma)$, где $\gamma = (\alpha \oplus \text{Id})\beta^{-1}$. Последний объект является образом $(F, (E^0 \oplus P)/\gamma, \gamma/\gamma)$ (см лемму 8). \square

Мы извлекаем следующие следствия.

Следствие 16. *Эйлерова характеристика $\chi_1 : L_{\mathcal{G}}^1(X, Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$ является изоморфизмом и, значит, определяет эквивалентность функторов.*

Доказательство. Это следует из лемм 15 и 14. \square

Лемма 17. *Класс (E^1, E^0, α) в $L_{\mathcal{G}}^1(X, Y)$ зависит только от гомотопического класса изоморфизма α .*

Доказательство. Пусть $Z = X \times [0, 1]$, $W = Y \times [0, 1]$. Обозначим через $p : Z \rightarrow X$ естественную проекцию и предположим, что α_t — гомотопия, причем $\alpha_0 = \alpha$. Тогда α_t

задает изоморфизм $\beta : p^*(E^1)|_W \cong p^*(E^0)|_W$, а значит, изоморфизм некоторому элементу $(p^*(E^1), p^*(E^0), \beta)$ из $L_{\mathcal{G}}^1(Z, W)$. Если

$$i_t : (X, Y) \rightarrow (X \times \{t\}, Y \times \{t\}) \subset (Z, W),$$

— стандартные вложения, то $(E^1, E^0, \alpha_t) = i_t^*(p^*(E^1), p^*(E^0), \beta)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} L_{\mathcal{G}}^1(X, Y) & \xleftarrow{i_0^*} & L_{\mathcal{G}}^1(Z, W) & \xrightarrow{i_1^*} & L_{\mathcal{G}}^1(X, Y) \\ \downarrow \chi^1 & & \downarrow \chi^1 & & \downarrow \chi^1 \\ K_{\mathcal{G}}^0(X, Y) & \xleftarrow{i_0^*} & K_{\mathcal{G}}^0(Z, W) & \xrightarrow{i_1^*} & K_{\mathcal{G}}^0(X, Y). \end{array}$$

Вертикальные морфизмы и морфизмы из нижней строки этой диаграммы являются изоморфизмами. Значит, отображения вверху диаграммы являются также изоморфизмами. Композиция $i_0^*(i_1^*)^{-1}$ является тождественной для нижней строки, а значит, и для верхней. \square

Следующая теорема редуцирует изучение функторов $L_{\mathcal{G}}^n$, $n > 1$, к изучению $L_{\mathcal{G}}^1$.

Теорема 18. *Естественное отображение $j_n : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^{n+1}(X, Y)$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $E = (E^0, E^1, \dots, E^{n+1}; d_k)$, $d_k : E^k|_Y \rightarrow E^{k+1}|_Y$ представляет элемент полугруппы $L_{\mathcal{G}}^{n+1}(X, Y)$. Чтобы доказать сюръективность j_n , заметим, прежде всего, что E эквивалентен комплексу

$$(E^0, \dots, E^{n-2}, E^{n-1} \oplus E^{n+1}, E^n \oplus E^{n+1}, E^{n+1}; d_0, \dots, d_{n-2} \oplus 0, d_{n-1} \oplus \text{Id}, d_n \oplus 0).$$

Отображения $d_n \oplus 0 : (E^n \oplus E^{n+1})|_Y \rightarrow E^{n+1}|_Y$ и $0 \oplus \text{Id} : (E^n \oplus E^{n+1})|_Y \rightarrow E^{n+1}|_Y$ гомотопны в множестве сюръективных \mathcal{G} -эквивариантных морфизмов векторных расслоений $(E^n \oplus E^{n+1})|_Y \rightarrow E^{n+1}|_Y$. Значит, по лемме 10, $d_n \oplus 0$ может быть продолжен до сюръективного морфизма $b : E^n \oplus E^{n+1} \rightarrow E^{n+1}$ \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений (над всем X). Так что, расслоение $E^n \oplus E^{n+1}$ изоморфно $\ker(b) \oplus E^{n+1}$. Значит, E эквивалентно

$$(E^0, \dots, E^{n-2}, E^{n-1} \oplus E^{n+1}, \ker(b), 0; d_0, \dots, d_{n-2} \oplus 0, d_{n-1}, 0).$$

Это доказывает сюръективность j_n .

Чтобы доказать инъективность j_n , достаточно найти для любого n левое обратное $q_n : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(X, Y)$ к $s_n := j_{n-1} \circ \dots \circ j_1$. Предположим, что $(E^*; d)$ представляет элемент полугруппы $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$. Выберем \mathcal{G} -инвариантную эрмитову метрику на E^i и пусть $d_i^* : E^{i+1}|_Y \rightarrow E^i|_Y$ — сопряженный к d_i . Пусть

$$F^0 := \bigoplus_i E^{2i}, \quad F^1 := \bigoplus_i E^{2i+1}, \quad b : F^0|_Y \rightarrow F^1|_Y, \quad b = \sum_i (d_{2i} + d_{2i+1}^*).$$

Стандартная проверка показывает, что b — изоморфизм. Поскольку все инвариантные метрики гомотопны между собой, лемма 17 показывает, что $(E, d) \rightarrow (F, b)$ определяет морфизм $q_n : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^1(X, Y)$. Это и есть искомый левый обратный к s_n . \square

Заметим, что доказательства этой теоремы и леммы 17 дают следующее следствие.

Следствие 19. *Класс $E = (E^i, d_i)$ в $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ не меняется, если мы непрерывно изменяем дифференциалы d_i .*

Теперь мы готовы доказать следующий важный результат.

Теорема 20. Для каждого n имеется единственная эйлерова характеристика

$$\chi_n : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \cong K_{\mathcal{G}}^0(X, Y).$$

В частности, $L_{\mathcal{G}}^{\infty}(X, Y) \cong K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$ и $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ имеет естественную групповую структуру для любого замкнутого \mathcal{G} -инвариантного подрасслоения $Y \subset X$.

Доказательство. Утверждение получается из доказанных лемм следующим образом. Прежде всего, теорема 18 позволяет определить

$$\chi_n := \chi_1 \circ j_1^{-1} \circ \dots \circ j_{n-1}^{-1} : L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X, Y).$$

Лемма 15 показывает, что χ_n — изоморфизм. Единственность χ_n доказывается тем же способом, что и единственность χ_1 (лемма 14). \square

3.3. Глобально определенные комплексы. Доказанная теорема дает нам альтернативное определение групп $K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$. Сейчас мы выведем еще одно определение этих групп, которое ближе к тому, которое нужно для приложений и использует дифференциалы, определенные на X , а не только на Y .

Пусть (E, d) — комплекс \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений над \mathcal{G} -пространством X . Точка $x \in X$ называется *точкой ацикличности* (E, d) , если ограничение (E, d) на x , т.е. последовательность линейных пространств

$$(E, d)_x = \left(\dots \xrightarrow{(d_i)_x} E_x^i \xrightarrow{(d_{i+1})_x} E_x^{i+1} \xrightarrow{(d_{i+2})_x} \dots \right),$$

точна. *Носитель* $\text{supp}(E, d)$ конечного комплекса (E, d) является дополнением в X ко множеству точек ацикличности. Это определение и следующая лемма остаются верными для некомпактных X .

Лемма 21. *Носитель* $\text{supp}(E, d)$ — замкнутое \mathcal{G} -инвариантное подпространство X .

Доказательство. Тот факт, что $\text{supp}(E, d)$ замкнуто, является стандартным (см., например, [2, 11]). Инвариантность должна быть проверена над одним слоем X над $b \in B$. Но это опять хорошо известный факт из эквивариантной K -теории (см., например, [11]). \square

Лемма 22. Пусть E^n, \dots, E^0 — \mathcal{G} -эквивариантные векторные расслоения над X , а Y — замкнутое \mathcal{G} -инвариантное подрасслоение X . Пусть заданы такие морфизмы $d_i : E^i|_Y \rightarrow E^{i-1}|_Y$, что $(E^i|_Y, d_i)$ — точный комплекс. Тогда морфизмы d_i могут быть продолжены до таких морфизмов, определенных над X , что мы все еще имеем комплекс \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений.

Доказательство. Мы покажем, что мы можем продолжить каждый d_i такого морфизма $r_i : E^i \rightarrow E^{i-1}$, что $r_{i-1} \circ r_i = 0$. Выберем такую \mathcal{G} -инвариантную открытую окрестность U множества Y в X , что для всякого i имеется продолжение s_i отображения d_i на U , причем (E, s) все еще остается точной. После этого мы сможем определить искомые r_i как $r_i = \rho s_i$, где $\rho : X \rightarrow [0, 1]$ — непрерывная функция, причем $\rho = 1$ на Y и $\text{supp } \rho \subset U$.

Построим U индукцией по i . Предположим, что для замыкания \bar{U}_i некоторой открытой \mathcal{G} -окрестности Y в X мы смогли продолжить d_j до s_j ($j = 1, \dots, i$), причем на \bar{U}_i последовательность

$$E^i \xrightarrow{s_i} E^{i-1} \xrightarrow{s_{i-1}} \dots \rightarrow E^0 \rightarrow 0$$

точна. Положим $K_i := \ker(s_i|_{\bar{U}_i})$. Тогда d_{i+1} определяет сечение расслоения $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(E^i, K_i)|_Y$. Это сечение продолжается на открытую \mathcal{G} -окрестность V множества Y в \bar{U}_i . Таким образом, мы получаем продолжение $s_{i+1} : E^{i+1} \rightarrow K_i$ отображения $d_{i+1} : E^{i+1} \rightarrow K_i$ над V . Поскольку $d_{i+1}|_Y$ сюръективно (с образом K_i), то морфизм s_{i+1} будет сюръективен на \bar{U}_{i+1} для некоторого открытого $U_{i+1} \subset U_i$. \square

Эта лемма подсказывает следующее определение.

Определение 23. Пусть X — компактное \mathcal{G} -расслоение, а $Y \subset X$ — \mathcal{G} -инвариантное подрасслоение. Определим $E_{\mathcal{G}}^n(X, Y)$ как полугруппу гомотопических классов таких комплексов \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений длины n над X , что их ограничения на Y ациклически (т.е. точны).

Мы будем называть два комплекса *гомотопными*, если они изоморфны ограничениям на $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$ некоторого комплекса, определенного над $X \times I$ и ациклического над $Y \times I$.

Замечание 24. По следствию 19 ограничение морфизмов индуцирует морфизм

$$\Phi^n : E_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \rightarrow L_{\mathcal{G}}^n(X, Y).$$

Теорема 25. Пусть X — компактное \mathcal{G} -расслоение, а $Y \subset X$ — \mathcal{G} -инвариантное подрасслоение. Тогда естественное преобразование Φ_n , определенное в предыдущем замечании, является изоморфизмом.

Доказательство. Сюръективность Φ_n следует из 22. Инъективность Φ_n может быть доказана тем же способом, что и в [2, Lemma 2.6.13], учитывая лемму 22.

Точнее, нам нужно показать, что дифференциалы любого комплекса над \mathcal{G} -подрасслоением $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (Y \times I)$ расслоения $X \times I$, ациклического над $Y \times I$, могут быть продолжены до комплекса над всем $X \times I$. Искомая конструкция имеет следующие три шага. Во-первых, пусть V — такая \mathcal{G} -инвариантная окрестность Y , что ограничитель нашего комплекса все еще ациклически на $(V \times \{0\}) \cup (V \times \{1\}) \cup (Y \times I)$ и на его замыкании $(\bar{V} \times \{0\}) \cup (\bar{V} \times \{1\}) \cup (Y \times I)$. По лемме 22, можно продолжить дифференциалы d_i до \mathcal{G} -эквивариантных морфизмов r_i над $\bar{V} \times I$, по-прежнему образующих комплекс. Во-вторых, пусть ρ_1, ρ_2 — \mathcal{G} -инвариантное разбиение единицы, подчиненное покрытию $V \times I$, $(X \setminus Y) \times I$ пространства $X \times Y$. Продолжим исходные дифференциалы на $(X \times [0, 1/4]) \cup (X \times [3/4, 1]) \cup (V \times I)$, полагая $d_i(x, t) := d_i(x, 0)$ для $t \leq \frac{1}{4} \cdot \rho_2(x)$, $x \in X \setminus Y$. Аналогично вблизи $t = 1$. Также,

$$d_i(x, t) := r_i \left(x, \frac{(t - \frac{1}{4} \cdot \rho_2(x))}{(1 - \frac{1}{2} \cdot \rho_2(x))} \right), \quad x \in V.$$

В-третьих, умножая этот дифференциал на функцию $\tau : X \times I \rightarrow I$, равную 1 на исходном множестве определения дифференциала и равную 0 вне $(X \times [0, 1/4]) \cup (X \times [3/4, 1]) \cup (V \times I)$, мы получаем искомое продолжение. \square

3.4. Некомпактный случай. В случае локально компактного, паракомпактного \mathcal{G} -расслоения X , мы изменяем определения $L_{\mathcal{G}}^n$ и $E_{\mathcal{G}}^n$ следующим образом. В определении $L_{\mathcal{G}}^n$ морфизмы d_i должны быть определены и образовывать точную последовательность вне внутренности некоторого компактного \mathcal{G} -инвариантного подмножества C множества $X \setminus Y$ (дополнения Y в X). В определении $E_{\mathcal{G}}^n$ комплексы должны быть точными вне некоторого компактного \mathcal{G} -инвариантного подмножества $X \setminus Y$. Иными словами, $L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) = L_{\mathcal{G}}^n(X^+, Y^+)$.

Поскольку доказательство леммы 22 остается в силе, то мы имеем аналог теоремы 25: имеется естественный изоморфизм

$$L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \cong E_{\mathcal{G}}^n(X, Y).$$

Доказательство других утверждений также может быть обобщено на некомпактный случай. Единственное различие заключается в том, что мы должны заменить Y на $X \setminus U$, где U — открытое \mathcal{G} -инвариантное подмножество с компактным замыканием. Далее,

при рассмотрении двух последовательностей $E = (E^i, d_i)$, мы должны рассматривать объединения соответствующих открытых множеств. Конечно, в отличие от Y , эти множества не являются расслоениями, но для наших рассуждений с расширениями это не страшно. Таким образом, мы получаем

$$(9) \quad K_{\mathcal{G}}^0(X, Y) \cong L_{\mathcal{G}}^n(X, Y) \cong E_{\mathcal{G}}^n(X, Y), \quad n \geq 1.$$

Как мы увидим дальше, возможность использования этих эквивалентных определений $K_{\mathcal{G}}^0(X, Y)$ очень удобна для приложений, особенно при изучении произведений.

4. ИЗОМОРФИЗМ ТОМА

В этом параграфе мы установим изоморфизм Тома в калибровочно-эквивариантной K -теории. Мы начнем с обсуждения произведений и морфизма Тома.

4.1. Произведения. Пусть $\pi_X : X \rightarrow B$ — \mathcal{G} -пространство, $\tilde{\pi}_F : F \rightarrow X$ — комплекс \mathcal{G} -векторных расслоений над X , а $s : X \rightarrow F$ — \mathcal{G} -инвариантное сечение. Обозначим через $\Lambda^i F$ i -ю внешнюю степень F , которая снова является комплексом \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений над X . Как и в доказательстве изоморфизма Тома для обычных векторных расслоений, мы определяем комплекс $\Lambda(F, s)$ \mathcal{G} -эквивариантных векторных расслоений над X , полагая

$$(10) \quad \Lambda(F, s) := (0 \rightarrow \Lambda^0 F \xrightarrow{\alpha^0} \Lambda^1 F \xrightarrow{\alpha^1} \dots \xrightarrow{\alpha^{n-1}} \Lambda^n F \rightarrow 0),$$

где $\alpha^k(v_x) = s(x) \wedge v_x$ для $v_x \in \Lambda^k F_x$ и $n = \dim F$. Немедленно получаем, что $\alpha^{j+1}(x)\alpha^j(x) = 0$, а значит, что $(\Lambda(F, s), \alpha)$ — действительно, комплекс.

Формула Кюннета показывает, что комплекс $\Lambda(F, s)$ ациклический для $s(x) \neq 0$, а значит, $\text{supp}(\Lambda(F, s)) := \{x \in X | s(x) = 0\}$. Если это множество компактно, то результаты параграфа 3 ставят в соответствие комплексу $\Lambda(F, s)$ из (10) элемент

$$(11) \quad [\Lambda(F, s)] \in K_{\mathcal{G}}^0(X).$$

Пусть X — \mathcal{G} -расслоение и $\pi_F : F \rightarrow X$ — \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение над X . Ключевым моментом приведенной конструкции является то, что $\pi_F^*(F)$, поднятие F на себя, имеет каноническое сечение с носителем, равным X . Напомним, как оно определяется. Пусть $\pi_{FF} : \pi_F^*(F) \rightarrow F$ — \mathcal{G} -векторное расслоение над F с тотальным пространством

$$\pi_F^*(F) := \{(f_1, f_2) \in F \times F, \pi_F(f_1) = \pi_F(f_2)\}$$

и $\pi_{FF}(f_1, f_2) = f_1$. Векторное расслоение $\pi_{FF} : \pi_F^*(F) \rightarrow F$ имеет каноническое сечение

$$s_F : F \rightarrow \pi_F^*(F), \quad s_F(f) = (f, f).$$

Носитель s_F равен X . Значит, если X — компактное пространство, то, снова применяя результаты параграфа 3, особенно 25, мы получаем элемент

$$(12) \quad \lambda_F := [\Lambda(\pi_F^*(F), s_F)] \in K_{\mathcal{G}}^0(F).$$

Напомним, что тензорное произведение векторных расслоений определяет естественное произведение $ab = a \otimes b \in K_{\mathcal{G}}^0(X)$ для любого $a \in K_{\mathcal{G}}^0(B)$ и любого $b \in K_{\mathcal{G}}^0(X)$, где $\pi_X : X \rightarrow B$ — компактное \mathcal{G} -пространство, как и выше.

Напомним, что все наши векторные расслоения предполагаются комплексными векторными расслоениями, за исключением тех, которые возникают из геометрии (касательные расслоения и их тензорные степени), а также тех, которые будут явным образом оговорены.

Ввиду важности того, что F — комплексное в следующем определении, мы все-таки повторим еще раз это условие.

Определение 26. Пусть $\pi_F : F \rightarrow X$ — (комплексное) \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение. Пусть \mathcal{G} -расслоение $X \rightarrow B$ компактно и пусть $\lambda_F \in K_{\mathcal{G}}^0(F)$ — класс, определенный в (12). Тогда отображение

$$\varphi^F : K_{\mathcal{G}}^0(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(F), \quad \varphi^F(a) = \pi_F^*(a) \otimes \lambda_F.$$

называется *морфизмом Тома*.

Как мы увидим далее, определение гомоморфизма Тома обобщается на случай некомпактного X , хотя сам элемент Тома не определен, если X некомпактно.

Определение изоморфизма Тома немедленно дает следующее утверждение. Мы используем обозначения предложения 26.

Предложение 27. *Морфизм Тома $\varphi^F : K_{\mathcal{G}}^0(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(F)$ является морфизмом $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ -модулей.*

Пусть $\iota : X \hookrightarrow F$ — вложение X в F как нулевого сечения. Тогда ι индуцирует гомоморфизмы

$$\iota^* : K_{\mathcal{G}}^0(F) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X) \quad \text{и} \quad \iota^* \circ \varphi^F : K_{\mathcal{G}}^0(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X).$$

Из определения следует, что $\iota^* \varphi^F(a) = a \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i F$.

4.2. Некомпактный случай. Рассмотрим теперь случай, когда X — локально компактно, но не обязательно компактно. Комплекс $\Lambda(\pi_F^*(F), s_F)$ имеет некомпактный носитель, и значит, не определяет элемент $K_{\mathcal{G}}^0(F)$. Однако, если $a = [(E, \alpha)] \in K_{\mathcal{G}}^0(X)$ представлено комплексом (E, α) векторных расслоений с компактным носителем (параграф 3), то мы все еще можем рассмотреть комплекс тензорного произведения

$$(\pi_F^*(\mathcal{E}), \pi_F^*(\alpha)) \otimes \Lambda(\pi_F^*F, s_F).$$

Из формулы Кюннета для гомологий тензорного произведения мы получаем, что носитель тензорного произведения комплексов равен пересечению носителей двух комплексов. В частности, мы получаем

$$(13) \quad \text{supp}\{(\pi_F^*E, \pi_F^*\alpha) \otimes \Lambda(\pi_F^*F, s_F)\} \subset \text{supp}(\pi_F^*E, \pi_F^*\alpha) \cap \text{supp} \Lambda(\pi_F^*F, s_F) \subset \\ \subset \text{supp}(\pi_F^*E, \pi_F^*\alpha) \cap X = \text{supp}(E, \alpha).$$

Таким образом, комплекс $(\pi_F^*\mathcal{E}, \pi_F^*\alpha) \otimes \Lambda(\pi_F^*F, s_F)$ имеет компактный носитель, а значит, определяет элемент из $K_{\mathcal{G}}^0(F)$.

Предложение 28. *Гомоморфизм $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ -модулей*

$$(14) \quad \varphi^F : K_{\mathcal{G}}^0(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(F), \quad \varphi^F(a) = [(\pi_F^*\mathcal{E}, \pi_F^*\alpha) \otimes \Lambda(\pi_F^*F, s_F)],$$

определенный в (13) обобщает морфизм Тома на случай не обязательно компактного X . Морфизм Тома φ^F удовлетворяет

$$(15) \quad \iota^* \varphi^F(a) = a \cdot \sum_{i=0}^n (-1)^i \Lambda^i F$$

и в некомпактном случае.

Пусть $F \rightarrow X$ — \mathcal{G} -эquivариантное векторное расслоение, а $F^1 = F \times \mathbb{R}$, рассматриваемое как векторное расслоение над $X \times \mathbb{R}$. Изоморфизмы периодичности в калибровочно-эquivариантной K -теории [15, Theorem 3.18]

$$K_{\mathcal{G}}^{i\pm 1}(X \times \mathbb{R}, Y \times \mathbb{R}) \simeq K_{\mathcal{G}}^i(X, Y)$$

могут быть включены в композицию с φ^{F^1} , морфизмом Тома для F^1 , давая морфизм

$$(16) \quad \varphi^F : K_{\mathcal{G}}^i(X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^i(F), \quad i = 0, 1.$$

Этот морфизм является морфизмом Тома для K^1 .

Пусть $p_X : X \rightarrow B$ и $p_Y : Y \rightarrow B$ — два компактных \mathcal{G} -расслоения. Пусть $\pi_E : E \rightarrow X$ и $\pi_F : F \rightarrow Y$ — два комплексных \mathcal{G} -эquivariantных векторных расслоения. Обозначим через $p_1 : X \times_B Y \rightarrow X$ и $p_2 : X \times_B Y \rightarrow Y$ проекции на сомножители и положим $E \boxtimes F := p_1^*E \otimes p_2^*F$. Полученное \mathcal{G} -эquivariantное векторное расслоение $E \boxtimes F$ будет называться *внешнее тензорное произведение E и F над B* . Это — векторное расслоение над $X \times_B Y$. Тогда формула

$$K_{\mathcal{G}}^0(X) \otimes K_{\mathcal{G}}^0(Y) \ni [E] \otimes [F] \rightarrow [E] \boxtimes [F] := [E \boxtimes F] \in K_{\mathcal{G}}^0(X \times_B Y)$$

определяет произведение $K_{\mathcal{G}}^0(X) \otimes K_{\mathcal{G}}^0(Y) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(X \times_B Y)$.

В частности, рассмотрим два комплекса \mathcal{G} -эquivariantных векторных расслоений $\pi_E : E \rightarrow X$ и $\pi_F : F \rightarrow X$. Тогда $E \oplus F = E \times_X F$ и мы получаем произведение

$$K_{\mathcal{G}}^i(E) \otimes K_{\mathcal{G}}^j(F) \ni [E] \otimes [F] \rightarrow [E] \boxtimes [F] := [E \boxtimes F] \rightarrow K_{\mathcal{G}}^{i+j}(E \oplus F).$$

Используя периодичность, мы получаем произведение

$$(17) \quad \boxtimes : K_{\mathcal{G}}^i(E) \otimes K_{\mathcal{G}}^j(F) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^{i+j}(E \oplus F).$$

Это произведение снова задается как тензорное произведение (поднятых) комплексов (если представлять классы K -теории комплексами), как и в классическом случае.

Внешнее произведение \boxtimes хорошо ведет себя по отношению к “конструкции Тома” в следующем смысле. Пусть F^1 и F^2 — два комплексных расслоения над X , а s_1, s_2 — два соответствующих сечения этих расслоений. Тогда

$$(18) \quad \Lambda(F^1 \oplus F^2, s_1 \otimes 1 + 1 \otimes s_2) = \Lambda(F^1, s_1) \boxtimes \Lambda(F^2, s_2).$$

В частности, если X компактно, мы получаем

$$(19) \quad \lambda_E \boxtimes \lambda_F = \lambda_{E \oplus F}.$$

Мы будем писать для простоты $s_1 + s_2 = s_1 \otimes 1 + 1 \otimes s_2$.

Следующая теорема утверждает, что класс Тома мультипликативен по отношению к прямой сумме векторных расслоений (см. также [6]).

Теорема 29. Пусть $E, F \rightarrow X$ — два \mathcal{G} -эquivariantных векторных расслоения. Рассмотрим $E \oplus F \rightarrow E$ как \mathcal{G} -эquivariantное векторное расслоение $\pi_E^*(F)$ over E . Тогда $\varphi^{\pi_E^*(F)} \circ \varphi^E = \varphi^{E \oplus F}$.

Эта теорема связана с коммутативностью диаграммы

$$(20) \quad \begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^*(X) & \xrightarrow{\varphi^E} & K_{\mathcal{G}}^*(E) \\ & \searrow \varphi^{E \oplus F} & \swarrow \varphi^{\pi_E^*(F)} \\ & K_{\mathcal{G}}^*(E \oplus F) & \end{array}$$

Доказательство. Пусть $F^1 := \pi_E^*(F) = E \oplus F$ как векторное расслоение над E . Рассмотрим проекции

$$\pi_E : E \rightarrow X, \quad \pi_F : F \rightarrow X, \quad \pi_{E \oplus F} : E \oplus F \rightarrow X, \quad t = \pi_{F^1} : E \oplus F \rightarrow E.$$

Пусть $x \in K_G^0(X)$. Тогда $\varphi^E(x) = \pi_E^*(x) \otimes \Lambda(\pi_E^*(E), s_E)$. Теперь воспользуемся равенством $t^*\pi_E^*(x) = \pi_{E \oplus F}^*(x)$ и $t^*\Lambda(\pi_E^*(E), s_E) = \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(E), s_E \circ t)$. Поскольку $s_E \circ t + s_{F^1} = s_{E \oplus F}$, соотношения (18) и (19) дают

$$\Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(E \oplus F), s_{E \oplus F}) = \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(E), s_E \circ t) \otimes \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(F), s_{F^1}).$$

Собирая проделанные вычисления, мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi^{F^1} \varphi^E(x) &= t^*(\varphi^E(x)) \otimes \Lambda(t^*(F^1), s_{F^1}) \\ &= t^*\pi_E^*(x) \otimes t^*(\Lambda(\pi_E^*(E), s_E)) \otimes \Lambda(t^*(F^1), s_{F^1}) \\ &= \pi_{E \oplus F}^*(x) \otimes \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(E), s_E \circ t) \otimes \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(F), s_{F^1}) \\ &= \pi_{E \oplus F}^*(x) \otimes \Lambda(\pi_{E \oplus F}^*(E \oplus F), s_{E \oplus F}) = \varphi_1^{E \oplus F}(x). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. \square

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему об изоморфизме Тома для калибровочно-эквивариантных векторных расслоений.

Теорема 30. Пусть $X \rightarrow B$ — \mathcal{G} -расслоение и $F \rightarrow X$ — комплексное \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение, тогда $\varphi^F : K_G^i(X) \rightarrow K_G^i(F)$ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть сначала F — тривиальное расслоение, т.е. $F = X \times_B \mathcal{V}$, где $\mathcal{V} \rightarrow B$ — комплексное конечномерное \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение. Мы продолжаем предполагать, что B компактно.

Обозначим через $\underline{\mathbb{C}} := B \times \mathbb{C}$ 1-мерное \mathcal{G} -расслоение с тривиальным действием \mathcal{G} на \mathbb{C} . Обозначим через $P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}})$ проективное пространство, связанное с $\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}$. Как топологическое пространство $P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}})$ отождествляется с послойной одноточечной компактификацией \mathcal{V} . Тогда вложения $\mathcal{V} \subset P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}})$ и $\mathcal{V} \times_B X \subset P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \times_B X$ порождают следующие естественные морфизмы (соотношение (6))

$$j : K_G^0(\mathcal{V}) \rightarrow K_G^0(P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}})), \quad j : K_G^0(\mathcal{V} \times_B X) \rightarrow K_G^0(P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \times_B X).$$

Пусть X компактно и $x \in K_G^0(P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}}) \times_B X)$ произволен. Слои проективизации $P(\mathcal{V} \oplus \underline{\mathbb{C}})$ являются комплексными многообразиями, так что мы можем рассматривать аналитический индекс соответствующего семейства операторов Дольбо над $P(\mathcal{V} \oplus 1)$ с коэффициентами в x (ср. [3, page 123]). Этот индекс — элемент $K_G^0(X)$ в силу результатов [15]. Беря композицию с j (ср. [3, page 122-123]) мы получаем семейство отображений $\alpha_X : K_G^0(\mathcal{V} \times_B X) \rightarrow K_G^0(X)$, имеющих следующие свойства:

- (i) α_X функториально по отношению к \mathcal{G} -эквивариантным морфизмам;
- (ii) α_X — морфизм $K_G^0(X)$ -модулей;
- (iii) $\alpha_B(\lambda_{\mathcal{V}}) = 1 \in K_G^0(B)$.

Пусть $X^+ := X \cup B$ — послойная одноточечная компактификация X . Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow K_G^0(\mathcal{V} \times_B X) & \longrightarrow & K_G^0(\mathcal{V} \times_B X^+) & \longrightarrow & K_G^0(\mathcal{V}) \\ & & \downarrow \alpha_{X^+} & & \downarrow \alpha_B \\ 0 \rightarrow K_G^0(X) & \longrightarrow & K_G^0(X^+) & \longrightarrow & K_G^0(B) \end{array}$$

с точными строками позволяет нам определить α_X для некомпактного X .

Пусть $x \in K_G^0(X)$, тогда по (ii)

$$(21) \quad \alpha_X(\lambda_{\mathcal{V}}x) = \alpha_X(\lambda_{\mathcal{V}})x = x, \quad \alpha_{\varphi} = \text{Id}.$$

Пусть $q := \pi_F : F = \mathcal{V} \times_B X \rightarrow X$, $p : X \times_B \mathcal{V} \rightarrow X$, $q_1 : \mathcal{V} \times_B X \times_B \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ (на первый сомножитель), $q_2 : X \times_B \mathcal{V} \rightarrow B$, а через $\tilde{y} \in K_{\mathcal{G}}^0(X \times_B \mathcal{V})$ мы обозначим элемент, полученный из y при отображении $X \times_B \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \times_B X$, $(x, v) \mapsto (-v, x)$ (так что $\mathcal{V} \times_B X \times_B \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \times_B X \times_B \mathcal{V}$, $(u, x, v) \mapsto (-v, x, u)$ гомотопно тождественному).

Пусть $y \in K_{\mathcal{G}}^0(\mathcal{V} \times_B X)$, тогда снова по (i), (ii) а затем по (iii)

$$(22) \quad \begin{aligned} \varphi(\alpha_X(y)) &= \pi_E^* \alpha_X(y) \otimes q^* \lambda_{\mathcal{V}} = \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(p_1^* y) \otimes q^* \lambda_{\mathcal{V}} = \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(p_1^* y \otimes q^* \lambda_{\mathcal{V}}) \\ &= \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(y \boxtimes \lambda_{\mathcal{V}}) = \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(\lambda_{\mathcal{V}} \boxtimes \tilde{y}) = \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(q_1^* \lambda_{\mathcal{V}} \otimes \tilde{y}) \\ &= \alpha_{X \times_B \mathcal{V}}(q_1^* \lambda_{\mathcal{V}}) \otimes \tilde{y} = q_2^* \alpha_B(\lambda_{\mathcal{V}}) \otimes \tilde{y} = q_2^*(1) \otimes \tilde{y} = \tilde{y} \in K_{\mathcal{G}}^0(X \times_B \mathcal{V}), \end{aligned}$$

Мы получаем, что $\varphi \circ \alpha_X$ — изоморфизм. Поскольку $\alpha_X \circ \varphi = \text{Id}$, то α_X — двусторонний обратный к φ , а автоморфизм $\varphi \circ \alpha_X$ — тождественный.

Доказательство для общего (комплексного) \mathcal{G} -эquivариантного векторного расслоения $F \rightarrow X$ может быть сделано так же, как в [3, р. 124]. Однако нам кажется более удобным использовать следующий аргумент. Вложим сначала F в тривиальное расслоение $E = \mathcal{V} \times_B X$. Пусть φ^1 и φ^2 — отображения Тома, связанные с расслоениями $E \rightarrow F$ и $E \rightarrow X$. Тогда по теореме 29 диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^0(F) & \xrightarrow{\varphi^1} & K_{\mathcal{G}}^0(E) \\ & \swarrow \varphi_F & \nearrow \varphi^2 \\ & K_{\mathcal{G}}^0(X) & \end{array}$$

коммутативна, причем φ^2 — изоморфизм по первой части доказательства. Значит, φ_F инъективен. То же рассуждение показывает, что φ^1 инъективен. Но φ^1 должен также быть и сюръективным, поскольку φ^2 — изоморфизм. Таким образом, φ^1 — изоморфизм, а значит, φ^2 — тоже изоморфизм. \square

5. ОТОБРАЖЕНИЯ ГИЗИНА

Теперь мы переходим к обсуждению некоторых конструкций, связанных с изоморфизмом Тома, которые нам понадобятся для определения топологического индекса. Наиболее важным среди них является отображение Гизина. Для некоторых конструкций, к которым переходим, категория \mathcal{G} -пространств, и даже \mathcal{G} -расслоений, является слишком общей, и мы должны рассматривать \mathcal{G} -расслоения $\pi_X : X \rightarrow B$, *гладкие вдоль слоев*. Основной причиной рассмотрения расслоений, гладких вдоль слоев, является необходимость определения отображения Гизина аналогично определению для вложений гладких многообразий. Обозначим через $T_{\text{vert}}X$ *вертикальное касательное расслоение* к слоям $X \rightarrow B$. Все касательные расслоения в дальнейшем будут подразумеваться *вертикальными* касательными расслоениями.

Пусть X и Y — гладкие вдоль слоев \mathcal{G} -расслоения, $i : X \rightarrow Y$ — equivариантное послонное вложение, а $p_T : T_{\text{vert}}X \rightarrow X$ — вертикальное касательное расслоение к X . Пусть Y снабжено \mathcal{G} -инвариантной римановой метрикой. Пусть $p_N : N_{\text{vert}} \rightarrow X$ — послонное нормальное расслоение к образу i .

Выберем такую функцию $\varepsilon : X \rightarrow (0, \infty)$, что отображение N_{vert} в себя по формуле

$$n \mapsto \varepsilon \frac{n}{1 + |n|}$$

является \mathcal{G} -equivариантным и определяет \mathcal{G} -диффеоморфизм $\Phi : N_{\text{vert}} \rightarrow W$ на расслоение открытых трубчатых окрестностей $W \supset X$ в Y .

Положим $(N \oplus N)_{\text{vert}} := N_{\text{vert}} \oplus N_{\text{vert}}$. Вложение $i : X \rightarrow Y$ может быть записано как композиция двух послойных вложений $i_1 : X \rightarrow W$ и $i_2 : W \rightarrow Y$. Переходя к дифференциалам, мы получаем

$$T_{\text{vert}}X \xrightarrow{di_1} T_{\text{vert}}W \xrightarrow{di_2} T_{\text{vert}}Y \quad \text{и} \quad d\Phi : T_{\text{vert}}N \rightarrow T_{\text{vert}}W,$$

где мы использовали упрощенные обозначения $T_{\text{vert}}N = T_{\text{vert}}N_{\text{vert}}$.

Лемма 31. (ср. [11, page 112]) *Многообразие $T_{\text{vert}}N$ может быть отождествлено с $p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}}$ при помощи такого \mathcal{G} -эquivариантного диффеоморфизма ψ , что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}} & \xleftarrow{\psi} & T_{\text{vert}}N \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\text{vert}}X & & N_{\text{vert}} \\ & \searrow p_T & \swarrow p_N \\ & & X. \end{array}$$

Доказательство. Вертикальное касательное расслоение $T_{\text{vert}}N \rightarrow N_{\text{vert}}$ и векторное расслоение

$$p_N^*(T_{\text{vert}}X) \oplus p_N^*(N_{\text{vert}}) \rightarrow N_{\text{vert}}$$

изоморфны как \mathcal{G} -эquivариантные векторные расслоения над N_{vert} .

В самом деле, точка тотального пространства $T_{\text{vert}}N$ — это пара вида $(n_1, t + n_2)$, где оба вектора принадлежат слою над точкой $x \in X$. Аналогично, мы представляем элементы $p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}}$ как пары вида $(t, n_1 + n_2)$. Определим ψ равенством $\psi(n_1, t + n_2) = (t, n_1 + n_2)$. \square

При помощи соотношения $i \cdot (n_1, n_2) = (-n_2, n_1)$, снабдим

$$p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}} = p_T^*(N_{\text{vert}}) \oplus p_T^*(N_{\text{vert}})$$

структурой комплексного многообразия. Рассмотрим соответствующий гомоморфизм Тома

$$\varphi : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}}).$$

Поскольку $T_{\text{vert}}W$ — открытое \mathcal{G} -устойчивое подмножество $T_{\text{vert}}Y$ и $di_2 : T_{\text{vert}}W \rightarrow T_{\text{vert}}Y$ — послойное вложение, то по (6), определен гомоморфизм $(di_2)_* : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}W) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y)$.

Определение 32. Пусть $i : X \rightarrow Y$ — эquivариантное вложение \mathcal{G} -расслоений. *Гомоморфизм Гизина* — это отображение

$$i_! : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y), \quad i_! = (di_2)_* \circ (d\Phi^{-1})^* \circ \psi^* \circ \varphi.$$

Иными словами, он получается переходом к K -группам в верхней части диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} p_T^*(N \oplus N)_{\text{vert}} & \xleftarrow{\psi} & T_{\text{vert}}N & \xrightarrow{d\Phi} & T_{\text{vert}}W & \xrightarrow{di_2} & T_{\text{vert}}Y \\ q_T \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{\text{vert}}X & & N_{\text{vert}} & & & & \\ & \searrow p_T & \swarrow p_N & \searrow \Phi & & & \\ & & X & \xrightarrow{i_1} & W & \xrightarrow{i_2} & Y. \end{array}$$

Другой выбор метрики и окрестности W индуцирует гомотопное отображение и (по пункту 3 теоремы 33 ниже) тот же гомоморфизм.

Теорема 33 (Свойства гомоморфизма Гизина). Пусть $i : X \rightarrow Y$ — \mathcal{G} -вложение.

- (i) $i_!$ — гомоморфизм $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ -модулей.
- (ii) Пусть $i : X \rightarrow Y$ и $j : Y \rightarrow Z$ — два послойных \mathcal{G} -вложения, тогда $(j \circ i)_! = j_! \circ i_!$.
- (iii) Пусть послойные вложения $i_1 : X \rightarrow Y$ и $i_2 : X \rightarrow Y$ являются \mathcal{G} -гомотопными в классе вложений. Тогда $(i_1)_! = (i_2)_!$.
- (iv) Пусть $i_! : X \rightarrow Y$ — послойный \mathcal{G} -диффеоморфизм, тогда $i_! = (di^{-1})^*$.
- (v) Послойное вложение $i : X \rightarrow Y$ может быть представлено как композиция вложений X в N_{vert} (как нулевого сечения $s_0 : x \rightarrow N$) и $N_{\text{vert}} \rightarrow Y$ по формуле $i_2 \circ \Phi : N_{\text{vert}} \rightarrow Y$. Тогда $i_! = (i_2 \circ \Phi)_!(s_0)_!$.
- (vi) Рассмотрим комплексное расслоение $p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})$ над $T_{\text{vert}}X$. Образует комплекс $\Lambda(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}), 0)$:

$$0 \rightarrow \Lambda^0(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})) \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{0} \Lambda^k(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})) \rightarrow 0$$

с некомпактным носителем. Если $a \in K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X)$, то комплекс

$$a \otimes \Lambda(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}), 0)$$

имеет компактный носитель и определяет элемент $K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X)$. Тогда

$$(di)^* i_!(a) = a \cdot \Lambda(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}), 0),$$

где di — дифференциал вложения i .

- (vii) $i_!(x(di)^*y) = i_!(x) \cdot y$, где $x \in K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X)$ и $y \in K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y)$.

Доказательство. (i) Это следует из определения $i_!$.

(ii) Чтобы упростить рассуждения, отождествим трубчатую окрестность с нормальным расслоением. Тогда $(j \circ i)_!$ является композицией

$$K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \xrightarrow{\varphi} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N \oplus T_{\text{vert}}N''_{\text{vert}}) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Z),$$

где N'_{vert} — послойное нормальное расслоение Y в Z , $N''_{\text{vert}} = N'_{\text{vert}}|_X$, и суммы касательных расслоений к вертикальным нормальным расслоениям $T_{\text{vert}}N \oplus T_{\text{vert}}N''_{\text{vert}}$ рассматриваются так же, как на стр. 250, как комплексное расслоение над $T_{\text{vert}}X$. С другой стороны, $j_! \circ i_!$ представляет композицию

$$K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \xrightarrow{\varphi} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y) \xrightarrow{\varphi} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N'_{\text{vert}}) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Z).$$

По свойствам φ , следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{\varphi} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N) & \longrightarrow & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N \oplus T_{\text{vert}}N'_{\text{vert}}) & \xrightarrow{\varphi} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}N'_{\text{vert}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Z) & \xlongequal{\quad} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Z). \end{array}$$

Это завершает доказательство (ii).

(iii) Морфизм q_T зависит только от гомотопического класса используемого вложения. Поэтому утверждение следует из гомотопической инвариантности K -теории.

(iv) В этом случае $N = X$, $W = Y$, $\Phi = i$, $i_2 = \text{Id}_Y$, после чего формула становится очевидной.

(v) Это следует из (ii).

(vi) По определению,

$$(di)^* \circ i_! = (di_1)^* \circ (di_2)^* \circ (di_2)_* \circ (d\varphi^{-1})^* \circ \psi^* \circ \varphi^* = (\psi \circ d\Phi^{-1} \circ di_1)^* \circ \varphi,$$

где $i_1 : X \rightarrow W$, $i_2 : W \rightarrow Y$. Пусть $(n_1, t + n_2) \in T_{\text{vert}}N = p_N^*(T_{\text{vert}}X) \oplus p_N^*(N_{\text{vert}})$, где n_1 — сдвиг при экспоненциальном отображении, а $t + n_2$ — вертикальный касательный вектор к W . Если $d\Phi(n_1, t + n_2)$ принадлежит $T_{\text{vert}}X$, то $n_1 = n_2 = 0$. Значит,

$$d\Phi^{-1}di_1(t) = (0, t + 0), \quad \psi \circ d\Phi^{-1} \circ di_1(t) = (t, 0 + 0).$$

Следовательно, $\psi \circ d\Phi^{-1} \circ di_1 : T_{\text{vert}}X \rightarrow p_T^*(N_{\text{vert}} \oplus N_{\text{vert}})$ — вложение нулевого сечения. Поскольку $\varphi(a) = a \cdot \Lambda(q_T^*p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}), s_{p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})})$, то получаем, что $(di)^* \circ i_1(a) = a \cdot \Lambda(p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C}), 0)$.

(vii) Отображение $di_1 \circ q_T \circ \psi \circ d\Phi^{-1} : T_{\text{vert}}W \rightarrow T_{\text{vert}}W$ гомотопно тождественному отображению. Значит,

$$\begin{aligned} i_1(x \cdot (di)^*y) &= (di_2)_*(d\Phi^{-1})^*\psi^*\varphi(x \cdot (di)^*y) = \\ &= (di_2)_*(d\Phi^{-1})^*\psi^*[(q_T^*(x)\lambda_{p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})})(q_T^*(di)^*y)] = \\ &= (di_2)_*[(d\Phi^{-1})^*\psi^*(q_T^*(x)\lambda_{p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})}) \underbrace{(d\Phi^{-1})^*\psi^*q_T^*(di_1)^*(di_2)^*y}_{\text{Id}}] = \\ &= [(di_2)_*(d\Phi^{-1})^*\psi^*(q_T^*(x)\lambda_{p_T^*(N_{\text{vert}} \otimes \mathbb{C})})] [(di_2)_*(di_2)^*y] = i_1(x) \cdot y. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. \square

Нам также понадобятся следующие свойства отображения Гизина. Если $X = B$ — тривиальное гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение, то мы отождествляем $T_{\text{vert}}X = B$ и $T_{\text{vert}}\mathcal{V} = \mathcal{V} \otimes \mathbb{C}$ для вещественного расслоения $\mathcal{V} \rightarrow B$.

Теорема 34. Пусть $\mathcal{V} \rightarrow B$ — \mathcal{G} -эquivариантное вещественное векторное расслоение и $X = B$. Тогда отображение

$$i_! : K_{\mathcal{G}}^0(B) = K_{\mathcal{G}}^0(TX_{\text{vert}}) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}\mathcal{V}) = K_{\mathcal{G}}^0(\mathcal{V} \otimes \mathbb{C})$$

совпадает с гомоморфизмом Тома $\varphi^{\mathcal{V} \otimes \mathbb{C}}$.

Доказательство. Утверждение следует из определения $i_!$. Точнее, пусть $X = B \hookrightarrow \mathcal{V}$, $N = \mathcal{V}$ — вложение как нулевого сечения. В определении изоморфизма Тома W может быть выбрано равным расслоению D_1 внутренностей единичных шаров в \mathcal{V} по отношению к некоторой инвариантной метрике. В этом случае диаграмма из определения 32 гомоморфизма Гизина принимает следующий вид

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{V} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{d\Phi} & D_1 \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{di_2} & \mathcal{V} \otimes \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{\text{vert}}X = B & & \mathcal{V} & & D_1 & & \mathcal{V} \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & X = B & \xrightarrow{i_1} & D_1 & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{V}. \end{array}$$

В нашем случае $\Psi = \text{Id}$, а $di_2 \circ d\Phi$ гомотопно Id , поскольку это отображение имеет вид $v \otimes z \mapsto (v \otimes z)/(1 + |v \otimes z|)$. Значит, $i_! = \varphi$. \square

Теорема 35. Пусть \mathcal{V}' и \mathcal{V}'' — \mathcal{G} -эquivариантные \mathbb{R} -векторные расслоения над B , а $i : X \rightarrow \mathcal{V}'$ — вложение. Пусть $k : X \rightarrow \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$, $k(x) = i(x) + 0$. Пусть φ — гомоморфизм Тома комплексного расслоения

$$T_{\text{vert}}(\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}'') = \mathcal{V}' \otimes \mathbb{C} \oplus \mathcal{V}'' \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T_{\text{vert}}\mathcal{V}' = \mathcal{V}' \otimes \mathbb{C}.$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}\mathcal{V}') \\
 & \nearrow^{i_!} & \downarrow \varphi \\
 K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}(\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}'')) \\
 & \searrow_{k_!} &
 \end{array}$$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, рассмотрим вложение $i : X \rightarrow \mathcal{V}'$ и обозначим, как и ранее, через N_{vert} послойное нормальное расслоение, а через W — трубчатую окрестность из определения изоморфизма Тома, связанную с i . Тогда $N_{\text{vert}} \oplus \mathcal{V}''$ — послойное нормальное расслоение для вложения k с трубчатой окрестностью $W \oplus D(\mathcal{V}'')$, где $D(\mathcal{V}'')$ — расслоение шаров. Если $a \in K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X)$, то

$$k_!(a) = (di_2 \oplus 1)_* \circ (d\Phi^{-1} \oplus 1)^* \circ (\psi \oplus 1)^* \circ \varphi^{N \oplus N \oplus \mathcal{V}'' \oplus \mathcal{V}''}(a).$$

Получаем, что $\varphi^{N \oplus N \oplus \mathcal{V}'' \oplus \mathcal{V}''} = \varphi^{N \oplus N} \circ \varphi^{\mathcal{V}'' \oplus \mathcal{V}''}$, по теореме 29. Поскольку $a = a \cdot \underline{\mathbb{C}}$, где $\underline{\mathbb{C}}$ — тривиальное линейное расслоение, то мы получаем

$$\begin{aligned}
 (23) \quad k_!(a) &= (di_2)_* \circ (d\Phi^{-1})^* \circ \Psi^* \circ \varphi^{N_{\text{vert}} \oplus N_{\text{vert}}}(a) \circ \varphi^{\mathcal{V}'' \oplus \mathcal{V}''}(\underline{\mathbb{C}}) \\
 &= i_!(a) \cdot \lambda_{T(\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}'')_{\text{vert}}} = \varphi(i_!(a)).
 \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. \square

6. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНДЕКС

Начнем с “расслоенной теоремы Мостова-Пале”, которая понадобится для определения индекса.

Теорема 36. Пусть $\pi_X : X \rightarrow B$ — компактное \mathcal{G} -расслоение. Тогда существует вещественное \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение $\mathcal{V} \rightarrow B$ и послойно гладкое \mathcal{G} -вложение $X \rightarrow \mathcal{V}$. Усредняя, можем считать, что действие \mathcal{G} на \mathcal{V} ортогонально.

Доказательство. Зафиксируем $b \in B$. Пусть U — эквивариантная тривиализующая окрестность b и для X , и для \mathcal{G} . По теореме Мостова-Пале, существует представление \mathcal{G}_b на конечномерном векторном пространстве V_b и гладкое \mathcal{G}_b -эквивариантное вложение $i_b : X_b \rightarrow V_b$. Это определяет вложение

$$(24) \quad \psi : \pi_X^{-1}(U_b) \simeq U_b \times X_b \rightarrow U_b \times V_b$$

которое является \mathcal{G} -эквивариантным в понятном смысле.

Теперь мы можем покрыть B конечным множеством открытых множеств U_{b_j} с таким же свойством, отвечающих точкам b_j , $j = 1, \dots, N$. Обозначим через V_j соответствующие представления, а через ψ_j — соответствующие вложения, как в (24). Пусть $W := \oplus V_j$. Пусть ϕ_j — разбиение единицы, подчиненное покрытию $U_j = U_{b_j}$. Положим

$$\Psi := \oplus (\phi_j \circ \pi_X) \psi_j : X \rightarrow B \times W.$$

Это — \mathcal{G} -эквивариантное вложение X в тривиальное \mathcal{G} -эквивариантное векторное расслоение $\mathcal{V} := B \times W$, что и требовалось. \square

Перейдем к определению топологического индекса. Пусть $X \rightarrow B$ — компактное гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение. Из теоремы 36 следует, что существует \mathcal{G} -эквивариантное вещественное векторное расслоение $\mathcal{V} \rightarrow B$ и послойное \mathcal{G} -эквивариантное вложение

$i : X \rightarrow \mathcal{V}$. Мы можем считать \mathcal{V} снабженным ортогональной метрикой, а \mathcal{G} сохраняет эту метрику. Таким образом, определен гомоморфизм Гизина

$$i_! : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}\mathcal{V}) = K_{\mathcal{G}}^0(\mathcal{V} \otimes \mathbb{C})$$

(см. параграф 4). Поскольку $T_{\text{vert}}\mathcal{V} = \mathcal{V} \otimes \mathbb{C}$ — комплексное векторное расслоение, мы имеем следующий изоморфизм Тома (см. параграф 4):

$$\varphi : K_{\mathcal{G}}^0(B) \xrightarrow{\sim} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}\mathcal{V}).$$

Определение 37. *Топологический индекс* — это морфизм

$$\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(B), \quad \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X := \varphi^{-1} \circ i_!.$$

Топологический индекс имеет следующие свойства.

Теорема 38. *Пусть $X \rightarrow B$ — гладкое вдоль слоев расслоение, а*

$$\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X : K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(B)$$

— его топологический индекс. Тогда

- (i) $\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X$ не зависит от выбора \mathcal{G} -эквивариантного векторного расслоения \mathcal{V} и вложения $i : X \rightarrow \mathcal{V}$.
- (ii) $\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X$ является $K_{\mathcal{G}}^0(B)$ -гомоморфизмом.
- (iii) Если $X = B$, то отображение

$$\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X : K_{\mathcal{G}}^0(B) = K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(B)$$

совпадает с $\text{Id}_{K_{\mathcal{G}}^0(B)}$.

- (iv) Пусть X и Y — компактные гладкие вдоль слоев \mathcal{G} -расслоения, а $i : X \rightarrow Y$ — послойное \mathcal{G} -вложение. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{i_!} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y) \\ & \searrow \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X & \swarrow \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^Y \\ & K_{\mathcal{G}}^0(B) & \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Чтобы доказать (i), рассмотрим два вложения

$$i_1 : X \rightarrow \mathcal{V}', \quad i_2 : X \rightarrow \mathcal{V}''$$

в \mathcal{G} -эквивариантные векторные расслоения. Обозначим через $j = i_1 + i_2$ индуцированное вложение $j : X \rightarrow \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}''$. Достаточно показать, что i_1 и j определяют одинаковый топологический индекс. Определим гомотопию \mathcal{G} -вложений формулой

$$j_s(x) = i_1(x) + s \cdot i_2(x) : X \rightarrow \mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}'', \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Тогда, по теоремам 33(iii) и 35, индексы для j и j_0 совпадают. Покажем теперь, что $j_0 = i_1 + 0$ и i_1 определяют одинаковые топологические индексы. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) & \\ \swarrow (i_1)_! & & \searrow (j_0)_! \\ K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}\mathcal{V}') & \xrightarrow{\varphi_2} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}(\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}'')) \\ \swarrow \varphi_1 & & \searrow \varphi_3 \\ & K_{\mathcal{G}}^0(B) & \end{array}$$

где φ_i — соответствующие гомоморфизмы Тома. Верхний треугольник коммутативен по теореме 34.2, а нижний — по теореме 29. Значит, $\varphi_1^{-1} \circ (i_1)_! = \varphi_3^{-1} \circ (j_0)_!$, что и требовалось.

(ii) следует из 27 и 33(i).

Свойство (iii) следует из определения индекса и из теоремы 34.

Чтобы доказать (iv), рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow^{j \circ i} & \swarrow_j \\ & \mathcal{V} & \end{array}$$

Применим 33(ii). Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X) & \xrightarrow{i_!} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y) \\ & \searrow^{(j \circ i)_!} & \swarrow_{j_!} \\ & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} \mathcal{V}) & \end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X) & \xrightarrow{i_!} & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y) & \\ & \searrow^{(j \circ i)_!} & & \swarrow_{j_!} & \\ & & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} \mathcal{V}) & & \\ & \searrow_{\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X} & \uparrow_{\varphi} & \swarrow_{\text{t-ind}_{\mathcal{G}}^Y} & \\ & & K_{\mathcal{G}}^0(B) & & \end{array}$$

Это завершает доказательство. \square

7. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Условие 39. Начиная с этого момента мы накладываем некоторые дополнительные свойства гладкости. Именно, мы требуем, чтобы B было гладким (компактным) многообразием, а $X \rightarrow B$ — гладким расслоением, как и все рассматриваемые векторные расслоения. Также, мы предположим, что после подходящей тривиализации над $U \subset B$ мы получаем $X|_U = X_0 \times U$ и $\mathcal{G}|_U = G \times U \subset G \times \mathbb{R}^n$ (мы рассматриваем U как открытую окрестность нуля в \mathbb{R}^n), индуцированное действие (части) $G \times \mathbb{R}^n$ на X_0 является гладким.

Определение 40. *Индексная функция* — это семейство $K_{\mathcal{G}}(B)$ -гомоморфизмов $\{\text{ind}_{\mathcal{G}}^X\}$

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^X : K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(B),$$

где \mathcal{G} пробегает множество расслоений компактных групп Ли а X пробегает множество компактных гладких вдоль слоев \mathcal{G} -расслоений. Это семейство должно удовлетворять следующим двум условиям:

(1) Если $f : X \rightarrow Y$ — \mathcal{G} -диффеоморфизм, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) & \xrightarrow{(df^{-1})^*} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} Y) \\ & \searrow_{\text{ind}_{\mathcal{G}}^X} & \swarrow_{\text{ind}_{\mathcal{G}}^Y} \\ & K_{\mathcal{G}}(B) & \end{array}$$

коммутативна.

(2) Если $\psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ — морфизм расслоений групп над B , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{\psi^*} & K_{\mathcal{H}}(T_{\text{vert}}X) \\ \text{ind}_{\mathcal{G}}^X \downarrow & & \downarrow \text{ind}_{\mathcal{H}}^X \\ K_{\mathcal{G}}(B) & \xrightarrow{\psi^*} & K_{\mathcal{H}}(B) \end{array}$$

коммутативна. Здесь *морфизм расслоений групп* — это морфизм гладких вдоль слоев расслоений, который является послойным гомоморфизмом групп. Понятие ψ^* очевидно.

Утверждение 41. *Топологический индекс $t\text{-ind}_{\mathcal{G}}^X$ является индексной функцией.*

Доказательство. 1). Пусть $i : Y \hookrightarrow \mathcal{V}$, $j = i \circ f : X \hookrightarrow \mathcal{V}$. По теореме 33.2, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y) & & \\ \uparrow f! & \searrow i! & \\ K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{j!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}\mathcal{V}) \xrightarrow{\varphi^{-1}} K_{\mathcal{G}}(B). \end{array}$$

По теореме 33.4, мы имеем в этом случае $f! = (df^{-1})^*$ и остается воспользоваться определением $t\text{-ind}$.

2). Немедленно следует из определения, если мы возьмем в качестве действия \mathcal{H} на \mathcal{V} действие, индуцированное ψ . \square

Рассмотрим следующие две аксиомы.

Аксиома A1. Если $X = B$, то $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X : K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(B)$ совпадает с $\text{Id}_{K_{\mathcal{G}}(B)}$.

Аксиома A2. Пусть $i : X \rightarrow Y$ — послойное \mathcal{G} -вложение. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{i!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y) \\ & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^X & \swarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y \\ & K_{\mathcal{G}}(B) & \end{array}$$

коммутативна.

Следствие 42. (из теоремы 38) *Топологический индекс $t\text{-ind}_{\mathcal{G}}^X$ удовлетворяет аксиомам A1 и A2.* \square

Теорема 43. *Пусть $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X$ — индексная функция, удовлетворяющая аксиомам A1 и A2. Тогда $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X = t\text{-ind}_{\mathcal{G}}^X$.*

Доказательство. Рассмотрим \mathcal{G} -вложение $i : X \rightarrow \mathcal{V}$ гладкого вдоль слоев \mathcal{G} -расслоения X в вещественное векторное \mathcal{G} -расслоение $\mathcal{V} \rightarrow B$. Послойная одноточечная компактификация \mathcal{V}^+ (т.е. расслоение сфер) является \mathcal{G} -расслоением с каноническим \mathcal{G} -включением $\varepsilon^+ : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^+$. Положим $i^+ := \varepsilon^+ \circ i : X \rightarrow \mathcal{V}^+$. Если $P = B \subset \mathcal{V}$, а $j : P \rightarrow \mathcal{V}$

— включение, то мы получаем диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & & \\
 & \swarrow i_! & \downarrow i_!^+ & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^X & \\
 K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}\mathcal{V}) & \xrightarrow{(\varepsilon^+)!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}\mathcal{V}^+) & \xrightarrow{\text{ind}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{V}^+}} & K_{\mathcal{G}}(B) \\
 & \nwarrow j_! & \uparrow j_!^+ & \nearrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^P & \\
 & & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}P) = K_{\mathcal{G}}(B) & &
 \end{array}$$

где $j^+ = \varepsilon^+ \circ j : P \rightarrow \mathcal{V}^+$. По теореме 33.2 (соотв., по аксиоме A2), левый (соотв., правый) треугольник коммутативен. По A1, $\text{ind}_{\mathcal{G}}^P$ является тождественным отображением. Поскольку $j_! : K_{\mathcal{G}}(B) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(T\mathcal{V}) = K_{\mathcal{G}}(\mathcal{V} \otimes \mathbb{C})$ совпадает с гомоморфизмом Тома, то имеем

$$\begin{aligned}
 \text{ind}_{\mathcal{G}}^X &= \text{ind}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{V}^+} i_!^+ = \text{ind}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{V}^+} (\varepsilon^+)! i_! = \text{ind}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{V}^+} (j^+)! j_!^{-1} i_! = \\
 &= \text{ind}_{\mathcal{G}}^P j_!^{-1} i_! = j_!^{-1} i_! = \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Мы хотим заменить аксиому A2 парой новых аксиом. Начнем со следующей формулировки.

Аксиома В1 (вырезания). Пусть U — (некомпактное) гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение, а

$$j_1 : U \rightarrow X', \quad j_2 : U \rightarrow X''$$

— послойные \mathcal{G} -вложения U на открытые подмножества компактных гладких вдоль слоев \mathcal{G} -расслоений X' и X'' . Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X') & \\
 (dj_1)_* \nearrow & & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^{X'} \\
 K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}U) & & K_{\mathcal{G}}(B) \\
 (dj_2)_* \searrow & & \nearrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^{X''} \\
 & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X'') &
 \end{array}$$

коммутативна.

Пусть существует хотя бы одно такое вложение. Тогда по этой аксиоме получаем, что индекс

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^U : K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}U) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(B)$$

может быть корректно определен.

Обозначим через c-ind_H^Y классический (для комплексных расслоений, эквивариантный, не для семейств) индекс

$$\text{c-ind}_H^Y : K_H(TY) \rightarrow R(H),$$

где H — компактная группа Ли, а Y — H -многообразие. Имеется следующее утверждение (см. [4]). Пусть $j : * \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вложение $\vec{0}$, так что $j_! : R(O(n)) \rightarrow K_{O(n)}(T\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(25) \quad \text{c-ind}_{O(n)}^{\mathbb{R}^n} j_!(1) = 1.$$

Пусть $\pi : P \rightarrow X$ — компактное гладкое вдоль слоев главное расслоение для компактного расслоения групп Ли $\mathcal{H} \rightarrow B$. Тогда у нас есть (правое) свободное действие \mathcal{H} на P , а $X = P/\mathcal{H}$. Пусть у нас есть левое действие расслоения $\mathcal{G} \rightarrow B$ на P и эти

два действия коммутируют. Пусть F — компактное гладкое вдоль слоев левое $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ -расслоение, где мы пишем $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ вместо $(\mathcal{G} \times_B \mathcal{H})$ для более компактного обозначения. Мы можем образовать ассоциированное расслоение $\pi_1 : Y = P \times_{\mathcal{H}} F \rightarrow X$ с естественным действием \mathcal{G} . Рассмотрим касательное расслоение вдоль слоев π_1 (которое автоматически “вертикальное”). Обозначим его через $T_F Y$. Тогда $T_F Y$ — \mathcal{G} -инвариантное вещественное подрасслоение $T_{Y_{\text{vert}}}$, а $T_F Y = P \times_{\mathcal{H}} T_{F_{\text{vert}}}$. При помощи метрики можно разложить $T_{Y_{\text{vert}}}$ в прямую сумму $T_{\text{vert}} Y = T_F Y \oplus \pi_1^*(T_{\text{vert}} X)$. Значит, можно определить умножение

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_F Y) & & \\ \downarrow & & \\ K_{\mathcal{G}}(\pi_1^* T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_F Y) & \rightarrow & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} Y). \end{array}$$

Имеется отображение

$$K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}} F) \rightarrow K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(P \times T_{\text{vert}} F) \cong K_{\mathcal{G}}(P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}} F) = K_{\mathcal{G}}(T_F Y).$$

Значит, мы можем определить отображение

$$\gamma : K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}} F) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} Y).$$

Обозначим $\gamma(a \otimes b)$ через $a \cdot b$.

Если $\mathcal{V} \rightarrow B$ — комплексное векторное $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ -расслоение, то $P \times_{\mathcal{H}} \mathcal{V}$ — комплексное векторное \mathcal{G} -расслоение над X . Получаем следующий кольцевой гомоморфизм, являющийся гомоморфизмом $K_{\mathcal{G}}(B)$ -модулей:

$$\mu_P : K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(B) \rightarrow K_{\mathcal{G}}(X), \quad [\mathcal{V}] \mapsto [P \times_{\mathcal{H}} \mathcal{V}].$$

Поскольку $K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X)$ несет $K_{\mathcal{G}}(X)$ -модульную структуру, мы можем сформулировать следующую аксиому.

Аксиома В2. Если $a \in K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X)$, $b \in K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}} F)$, то

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^Y(a \cdot b) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a \cdot \mu_P(\text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F(b))),$$

т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}} F) & \xrightarrow{1 \otimes \text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(B) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow 1 \otimes \mu_P \\ K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} Y) & & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \otimes K_{\mathcal{G}}(X) \\ \downarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y & \xleftarrow{\text{ind}_{\mathcal{G}}^X} & \downarrow \\ K_{\mathcal{G}}(B) & & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}} X) \end{array}$$

коммукативна.

Теорема 44. Пусть $\pi : P \rightarrow X$ — главное правое \mathcal{H} -расслоение с левым действием \mathcal{G} , коммутирующим с \mathcal{H} . Пусть F — гладкое вдоль слоев $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ -расслоение. Обозначим через Y пространство $P \times_{\mathcal{H}} F$. Пусть $j : X' \rightarrow X$ и $k : F' \rightarrow F$ — послойные \mathcal{G} - и $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ -вложения, соответственно. Пусть $\pi' : P' \rightarrow X'$ — главное \mathcal{H} -расслоение, индуцированное j на X' . Положим $Y' := P' \times_{\mathcal{H}} F'$. Вложения j и k индуцируют \mathcal{G} -вложение $j * k : Y' \rightarrow Y$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X) \otimes_{K_{\mathcal{G}}^0(B)} K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(T_{\text{vert}} F) & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y) \\ \uparrow j! \otimes k! & & \uparrow (j * k)! \\ K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X') \otimes_{K_{\mathcal{G}}^0(B)} K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(T_{\text{vert}} F') & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y') \end{array}$$

коммутативна.

Заметим, что в формулировке этой теоремы нет условия компактности на X, X', F , и F' , поскольку нет условия компактности в определении гомоморфизма Гизина. Это не так для определения топологического индекса, где мы стартуем с компактного \mathcal{G} -расслоения $X \rightarrow B$.

Доказательство. Используем определение γ :

$$\begin{aligned}
& K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(T_{\text{vert}}F) \longrightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P \times T_{\text{vert}}F) \xrightarrow{\cong} \\
& \quad \quad \quad \uparrow \text{\scriptsize } j_! \otimes k_! \quad \quad \quad \boxed{1} \quad \quad \quad \uparrow \varepsilon \quad \quad \quad \boxed{2} \\
& K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X') \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(T_{\text{vert}}F') \longrightarrow K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X') \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P' \times T_{\text{vert}}F') \xrightarrow{\cong} \\
& \cong K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}^0(P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F) \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(\pi_1^* T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}^0(P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F) \rightarrow \\
& \quad \quad \quad \uparrow \beta \quad \quad \quad \boxed{3} \quad \quad \quad \uparrow \alpha \\
& \cong K_{\mathcal{G}}^0(TX') \otimes K_{\mathcal{G}}^0(P' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F') \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0((\pi'_1)^* T_{\text{vert}}X') \otimes K_{\mathcal{G}}^0(P' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F') \rightarrow \\
& \quad \quad \quad \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0((\pi_1^* T_{\text{vert}}X) \times (P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F)) \rightarrow \\
(26) \quad & \quad \quad \quad \boxed{4} \\
& \quad \quad \quad \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0((\pi'_1)^* T_{\text{vert}}X' \times (P' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F')) \rightarrow \\
& \quad \quad \quad \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0(\pi_1^* T_{\text{vert}}X \oplus (P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F)) = K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}}Y) \\
& \quad \quad \quad \boxed{4} \quad \quad \quad \uparrow (j * k)_! \\
& \rightarrow K_{\mathcal{G}}^0((\pi'_1)^* T_{\text{vert}}X' \oplus (P' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F')) = K_{\mathcal{G}}^0(TY'_{\text{vert}}),
\end{aligned}$$

где where проекции $\pi_1 : Y = P \times_{\mathcal{H}} F \rightarrow X$ и $\pi'_1 : Y' = P' \times_{\mathcal{H}} F' \rightarrow X'$ определены выше. Здесь мы используем изоморфизм $K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P \times W) \cong K_{\mathcal{G}}^0(P \times_{\mathcal{H}} W)$ для свободного \mathcal{H} -расслоения P (см. теорему 6). Напомним, диаграмму, которая использовалась для определения гомоморфизма Гизина вложения $j : X' \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccccccc}
p_T^*(N_{X'} \oplus N_{X'})_{\text{vert}} & \xleftarrow{\psi} & T_{\text{vert}}N_{X'} & \xrightarrow{d\Phi_{X'}} & T_{\text{vert}}W_{X'} & \xrightarrow{dj_2} & T_{\text{vert}}X \\
\downarrow q_T^{X'} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T_{\text{vert}}X' & & N_{X', \text{vert}} & & & & \\
\searrow p_T & \swarrow p_{N_{X', \text{vert}}} & \searrow \Phi_{X'} & & & & \\
& X' & \xrightarrow{j_1} & W_{X'} & \xrightarrow{j_2} & X. &
\end{array}$$

Из аналогичных диаграмм для $k_!$ и $(j * k)_!$ и явного вида этих отображений следует, что квадрат $\boxed{4}$ в (26) коммутативен тогда и только тогда, когда α имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\alpha(\sigma \otimes \rho) &= (\pi_1^*) \left\{ (dj_2)_* (d\Phi_{X'}^{-1})^* \psi_{X'}^* \right\} \circ \varphi^S(\sigma) \otimes \\
&\otimes (\pi^* j_2 \times_{\mathcal{H}} dk_2)_* \left((\pi^* \Phi_{X'} \times_{\mathcal{H}} d\Phi_{F'}^{-1})^* (1 \times_{\mathcal{H}} \psi_{F'})^* \varphi^R(\rho), \right.
\end{aligned}$$

где S и T — расслоения вида

$$\begin{array}{ccc}
S : & \pi_1^* \left((p_T^{X'})^* \{N_{X'} \oplus N_{X'}\} \right) & \pi^* N_{X'} \times_{\mathcal{H}} (p_T^{F'})^* (N_{F'} \oplus N_{F'}) \\
& \downarrow (\pi_1^*)^* q_T^{X'} & \downarrow (\pi^*)^* (p_{N_{X'}}) \times_{\mathcal{H}} q_T^{F'} \\
& (\pi_1^*)^* (T_{\text{vert}}X'), & \pi^* X' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F' = P' \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F'.
\end{array}$$

Таким образом, квадрат $\boxed{3}$ в (26) коммутативен тогда и только тогда, когда гомоморфизм β имеет вид

$$\begin{aligned} \beta(\tau \otimes \rho) &= j_!(\tau) \otimes \\ &\otimes (\pi^* j_2 \times_{\mathcal{H}} dk_2)_* \left((\pi^* \Phi_{X'} \times_{\mathcal{H}} d\Phi_{F'})^{-1} \right)^* (1 \times_{\mathcal{H}} \psi_{F'})^* \varphi^R(\rho), \\ \tau &\in K_{\mathcal{G}}^0(TX'), \quad \rho \in K_{\mathcal{G}}^0(P' \times_{\mathcal{H}} TF'). \end{aligned}$$

В свою очередь, квадрат $\boxed{2}$ в (26) коммутативен тогда и только тогда, когда гомоморфизм ε имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau \otimes \delta) &= j_!(\tau) \otimes \\ &\otimes (\pi^* j_2 \times_{\mathcal{H}} dk_2)_* \left((\pi^* \Phi_{X'} \times_{\mathcal{H}} d\Phi_{F'})^{-1} \right)^* (1 \times_{\mathcal{H}} \psi_{F'})^* \varphi_{\tilde{R}}(\delta), \\ \tau &\in K_{\mathcal{G}}^0(TX'), \quad \delta \in K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P' \times TF'), \end{aligned}$$

где \tilde{R} — следующее расслоение:

$$\tilde{R}: \begin{array}{c} \pi^* N_{X'} \times (p_T^{F'})^* (N_{F'} \oplus N_{F'}) \\ \downarrow (\pi')^* (p_N) \times q_T^{F'} \\ P' \times TF'. \end{array}$$

Пусть $\delta = [\underline{\mathbb{C}}] \widehat{\otimes} \omega$, где $[\underline{\mathbb{C}}] \in K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P')$, $\underline{\mathbb{C}}$ — одномерное тривиальное расслоение и $\omega \in K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(TF')$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau \otimes \delta) &= j_!(\tau) \otimes \left\{ \pi^* (j_2)_* (\Phi_{X'}^{-1})^* [\underline{\mathbb{C}}] \widehat{\otimes} k_!(\omega) \right\} = \\ &= j_!(\tau) \otimes \left\{ [\underline{\mathbb{C}}] \widehat{\otimes} k_!(\omega) \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку отображение $K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(TF) \rightarrow K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^0(P \times TF)$ (также, как и нижняя строка в (26)) имеет вид $\omega \mapsto [\underline{\mathbb{C}}] \widehat{\otimes} \omega$, то мы доказали коммутативность $\boxed{1}$ в (26). \square

Из этой теоремы мы получаем следующее следствие.

Следствие 45. Пусть M — компактное гладкое \mathcal{H} -многообразие, $\mathcal{H} = B \times H$, а P — главное гладкое вдоль слоев \mathcal{H} -расслоение над X , снабженное также действием \mathcal{G} , коммутирующим с действием \mathcal{H} . Пусть $X \rightarrow B$ — компактное гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение. Пусть $Y := P \times_{\mathcal{H}} M \rightarrow X$ — ассоциированное гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение. Полагая $F = B \times M$, мы определяем $T_M Y := T_F Y$. Тогда $T_M Y$ — \mathcal{G} -инвариантное вещественное подрасслоение в $T_{\text{vert}} Y$ и $T_M Y = P \times_{\mathcal{H}} T_M$. Пусть $j : X' \rightarrow X$ — послойное \mathcal{G} -эквивариантное вложение, а $k : M' \rightarrow M$ — H -вложение. Обозначим через $\pi' : P' \rightarrow X'$ главное \mathcal{H} -расслоение, индуцированное j на X' и положим $Y' := P' \times_{\mathcal{H}} M'$. Вложения j и k индуцируют \mathcal{G} -вложение $j * k : Y' \rightarrow Y$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X) \otimes K_H^0(TM) & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y) \\ \uparrow j_! \otimes k_! & & \uparrow (j * k)_! \\ K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} X') \otimes K_H^0(TM') & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}^0(T_{\text{vert}} Y') \end{array}$$

коммутативна.

Пусть в ситуации аксиомы B2

$$\text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F(b) \in K_{\mathcal{G}}(B) \subset K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(B).$$

Поскольку μ_P и $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X$ — $K_{\mathcal{G}}(B)$ -гомоморфизмы, то выполнено следующее свойство.

Аксиома В2'. (следствие В2) Если $\text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F(b) \in K_{\mathcal{G}}(B) \subset K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(B)$, то

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^Y(a \cdot b) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a) \cdot \text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F(b).$$

Положим в В2 $X = P$, $\mathcal{H} = B$. Получаем следующую аксиому.

Аксиома В2''. (следствие В2) Если X и F — гладкие вдоль слоев \mathcal{G} -расслоения, то

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^{X \times F}(a \cdot b) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a) \cdot \text{ind}_{\mathcal{G}}^F(b).$$

Теорема 46. Пусть индексная функция $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X$ удовлетворяет А1, В1, В2', тогда

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^X = \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X.$$

Доказательство. Прежде всего мы обобщим аксиому В2' на некомпактный случай (при некоторых ограничениях) следующим способом. Пусть в аксиоме В2' расслоение F является открытым $(\mathcal{G} \times \mathcal{H})$ -подрасслоением компактного гладкого вдоль слоев расслоения \tilde{F} . Пусть $j : F \hookrightarrow \tilde{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y(a \cdot b) &= \text{ind}_{\tilde{\mathcal{G}}}^{\tilde{Y}}(dJ_*)(a \cdot b) = \text{ind}_{\tilde{\mathcal{G}}}^{\tilde{Y}}(a \cdot ((dj)_*b)) = \\ (27) \quad &= \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a) \cdot \text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^{\tilde{F}}((dj)_*b) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a) \cdot \text{ind}_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}^F(b), \end{aligned}$$

где J — вложение

$$Y = P \times_{\mathcal{H}} F \xrightarrow{\text{Id} \times_{\mathcal{H}} j} P \times_{\mathcal{H}} \tilde{F} = \tilde{Y}.$$

В самом деле, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}}F) & \longrightarrow & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(P \times T_{\text{vert}}F) \cong \\ \downarrow 1 \otimes (dj)_* & & \downarrow 1 \otimes (\text{Id} \times dj)_* \\ K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(T_{\text{vert}}\tilde{F}) & \longrightarrow & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G} \times \mathcal{H}}(P \times T_{\text{vert}}\tilde{F}) \cong \\ \cong K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}F) & = & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_F Y) \longrightarrow \\ \downarrow 1 \otimes (\text{Id} \times_{\mathcal{H}} dj)_* & & \downarrow 1 \otimes \alpha_* \\ \cong K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(P \times_{\mathcal{H}} T_{\text{vert}}\tilde{F}) & = & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_{\tilde{F}} Y) \longrightarrow \\ & \longrightarrow & K_{\mathcal{G}}(\pi_1^* T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_F Y) \longrightarrow K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y) \\ & & \downarrow 1 \otimes \alpha_* \quad \quad \quad \downarrow (dJ)_* \\ & \longrightarrow & K_{\mathcal{G}}(\pi_1^* T_{\text{vert}}X) \otimes K_{\mathcal{G}}(T_{\tilde{F}} Y) \longrightarrow K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}\tilde{Y}). \end{array}$$

Эта диаграмма коммутативна. На самом деле, мы имеем

$$\begin{array}{ccc} T_{\text{vert}}Y & = & T_F Y \oplus \pi_1^*(T_{\text{vert}}X) \\ \downarrow dJ & & \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_{\text{vert}}\tilde{Y} & = & T_{\tilde{F}} Y \oplus \pi_1^*(T_{\text{vert}}X), \end{array}$$

а $\alpha = \text{Id} \times_{\mathcal{H}} dj$ при отождествлении $T_F Y = P \times_{\mathcal{H}} T F$. Мы доказали второе равенство в (27), остальные очевидны.

Рассмотрим, в частности,

$$F = \mathbb{R}^n \times B, \quad \tilde{F} = (\mathbb{R}^n)^+ \times B = S^n \times B, \quad \mathcal{H} = O(n) \times B, \quad b = \phi_!(1), \quad 1 = [\mathbb{C}],$$

где $\phi : \vec{0} \times B \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times B$ — естественное вложение. Тогда P — главное $O(n) \times B$ -расслоение над X , а расслоение групп \mathcal{G} действует на P , коммутируя с $O(n) \times B$. Пусть \mathcal{G} действует на $\mathbb{R}^n \times B$ тривиально. Образует ассоциированное вещественное \mathcal{G} -расслоение

$$Y := P \times_{O(n)} \mathbb{R}^n = P \times_{O(n) \times B} (\mathbb{R}^n \times B) \rightarrow X.$$

Обозначим через

$$i : X \rightarrow Y, \quad i = 1_X * \phi,$$

вложение X как нулевого сечения. Предположим в теореме 44 $F = \mathbb{R}^n \times B$, $X' = X$, $F' = B$. Тогда мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes_{K_{\mathcal{G}}(B)} K_{\mathcal{G} \times (O(n) \times B)}(T_{\text{vert}}(\mathbb{R}^n \times B)) & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y) \\ \uparrow (1_X)_! \otimes \phi_! & & \uparrow (1_X * \phi)_! = i_! \\ K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) \otimes_{K_{\mathcal{G}}(B)} K_{\mathcal{G} \times (O(n) \times B)}(B) & \xrightarrow{\gamma} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X). \end{array}$$

Поскольку $\gamma(a \otimes 1) = a$ для нижней строки, то

$$i_!(a) = \gamma\left(\left((1_X)_! \otimes \phi_!\right)(a \otimes 1)\right) = \gamma(a \otimes \phi_!(1)) = a \cdot \phi_!(1) = a \cdot b.$$

По (25),

$$\text{ind}_{\mathcal{G} \times O(n)}^{\mathbb{R}^n} \phi_!(1) = 1,$$

где \mathcal{G} действует на $\mathbb{R}^n \times B$ тривиально. Теперь по (27) получаем

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a) &= \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a \cdot 1) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a \cdot \mu_P(1)) = \\ (28) \quad &= \text{ind}_{\mathcal{G}}^X(a \cdot \mu_P(\text{ind}_{\mathcal{G} \times (O(n) \times B)}^{\mathbb{R}^n}(b))) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y(a \cdot b) = \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y i_!(a). \end{aligned}$$

Пусть $k : X \rightarrow Z$ — послойное вложение X в компактное гладкое вдоль слоев \mathcal{G} -расслоение Z с послойным нормальным расслоением N и послойной \mathcal{G} -инвариантной трубчатой окрестностью $\Phi : N \rightarrow W$. По определению гомоморфизма Гизина, $k_! = (di_2 \circ d\Phi)_* i_!$, где $di_2 : T_{\text{vert}}W \rightarrow T_{\text{vert}}Z$ — вложение вертикального касательного расслоения, а $i : X \rightarrow N$ — послойное вложение X как нулевого сечения в нормальное расслоение. В диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{i_!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}N) & \xrightarrow{(di_2 \circ d\Phi)_*} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Z) \\ & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^X & \downarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^N & \swarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^Z & \\ & & K_{\mathcal{G}}(B) & & \end{array}$$

левый треугольник коммутативен по (28). В самом деле, мы можем взять P равным главному $O(n)$ -расслоению нормальных вертикальных ортонормальных реперов, а $Y = N$. Отображение $i_2 \cdot \Phi$ — открытое вложение. Значит, по В1, правый треугольник также коммутативен. Значит, $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X = \text{ind}_{\mathcal{G}}^Z \circ k_!$. Поэтому А2 выполняется. Чтобы завершить доказательство, остается применить теорему 43. \square

Заметим, что мы использовали очень специальный случай В2', а именно, следующий:

Аксиома В2⁰. Пусть P — главное $O(n) \times B$ -расслоение нормальных (вертикальных) ортонормальных реперов вложения $k : X \rightarrow Z$, т.е. расслоение реперов N . Пусть \mathcal{G} действует на $\mathbb{R}^n \times B$ тривиально. Ассоциированное вещественное \mathcal{G} -расслоение

$$Y := P \times_{O(n)} \mathbb{R}^n = P \times_{O(n) \times B} (\mathbb{R}^n \times B) \rightarrow X$$

является в точности N . Пусть

$$i : X \rightarrow Y, \quad i = 1_X * \phi,$$

— вложение X как нулевого сечения. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{i_!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y) \\ & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^X & \swarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^Y \\ & & K_{\mathcal{G}}(B) \end{array}$$

коммутативна.

Конечно, это имеет смысл только при выполнении аксиомы вырезания, и поэтому более естественно произвести еще одно вложение и сформулировать для замкнутого случая:

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X) & \xrightarrow{i_!} & K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}Y^{\bullet}), \\ & \searrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^X & \swarrow \text{ind}_{\mathcal{G}}^{\tilde{Y}} \\ & & K_{\mathcal{G}}(B) \end{array}$$

где $Y^{\bullet} = P \times_{O(n) \times B} (S^n \times B)$.

Таким образом мы получаем утверждение.

Теорема 47. Пусть индексная функция $\text{ind}_{\mathcal{G}}^X$ удовлетворяет A1, B1, B2⁰, тогда

$$\text{ind}_{\mathcal{G}}^X = \text{t-ind}_{\mathcal{G}}^X.$$

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ ИНДЕКСЕ

Прежде всего, очевидно, что аналитический индекс является индексной функцией.

Лемма 48. Аналитический индекс $a\text{-ind}$ удовлетворяет аксиоме A1.

Доказательство. Эллиптическое семейство операторов над тривиальным расслоением $X = B \rightarrow B$ — это \mathcal{G} -морфизм $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ эквивариантных векторных расслоений и $[\sigma(P)] = [\mathcal{V}] - [\mathcal{W}] = \text{index } P \in K_{\mathcal{G}}(B)$. \square

Прежде чем двигаться дальше, заметим, что если фредгольмово \mathcal{G} -семейство послойно сюръективно, то его ядра образуют \mathcal{G} -векторное расслоение над B , т.е. $\text{KER} = \ker$ и $\text{СОК} = \text{coker} = 0$.

Лемма 49. Пусть H_b^0 и H_b^1 — \mathcal{G} -расслоения гильбертовых пространств с эквивариантным фредгольмовым семейством $D_b : H_b^0 \rightarrow H_b^1$. Пусть $L \rightarrow B$ — конечномерное \mathcal{G} -расслоение, а $T : L \rightarrow H$ — такой морфизм \mathcal{G} -расслоений, что $D_b + T_b : H_b \oplus L_b \rightarrow H_b$ послойно сюръективен. Тогда

$$\text{index } D = \ker(D + T) - [L].$$

Доказательство. Обозначим через $(D + T)'$ семейство $D + T$, рассматриваемое как отображения $H \oplus L \rightarrow H \oplus L$. Тогда $(D + T)'$ — послойное компактный возмущение $D \oplus \text{Id}$. Значит, $\text{index}(D + T)' = \text{index } D$. Далее, $\text{index}(D + T)' = \ker(D + T) - [L]$. \square

Нам также понадобится следующее утверждение.

Лемма 50. Пусть D_b — эллиптическое семейство с инвариантным семейством символов σ_b . Тогда послойное усреднение $\text{Av}_{\mathcal{G}} D$ — инвариантное эллиптическое семейство, связанное с тем же символом.

Доказательство. Все эти факты известны из теории для одного оператора, за исключением непрерывности $\text{Av}_{\mathcal{G}} D$. Последний вопрос локален и мы можем считать что мы так тривиализовали ситуацию, что $X|_U = X_0 \times U$, $\mathcal{G}|_U = G \times U$, $D_b = D$, $b \in U \subset B$, а действие $G \times U$ на X_0 гладко (см. условие 39). Тогда по [4, 5.5] действие непрерывно. \square

Теорема 51. *Индекс $a\text{-ind}$ удовлетворяет аксиоме B1.*

Доказательство. Пусть $a \in K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}U)$;

$$\begin{array}{ccc} j_1 : U & \longrightarrow & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & & B \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} j_2 : U & \longrightarrow & X'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & & B \end{array}$$

— послойные \mathcal{G} -вложения; а $\pi : T_{\text{vert}}U \rightarrow U$ — естественная проекция. Пусть последовательность

$$0 \rightarrow \pi^*E \xrightarrow{\rho} \pi^*F \rightarrow 0$$

\mathcal{G} -расслоений точна при $x \in U \setminus L$, $|\xi| > c$ (точка и (ко)вектор), где $E \rightarrow U$ и $F \rightarrow U$ — гладкие вдоль слоев \mathcal{G} -расслоения, а L — некоторое \mathcal{G} -инвариантное компактное “расслоенное” множество. Пусть

$$\alpha : E|_{U \setminus L} \cong (U \setminus L) \times_B N, \quad \beta : F|_{U \setminus L} \cong (U \setminus L) \times_B N,$$

$$\rho = (\pi^*\beta)^{-1}(\pi^*\alpha),$$

где $N \rightarrow B$ — векторное \mathcal{G} -расслоение. Точнее, можно считать, что для некоторой \mathcal{G} -инвариантной метрики расслоение L является расслоением открытых шаров над B с непрерывно меняющимся радиусом. Выберем из гомотопического класса представителя порядка 0. Тогда можно предполагать, что символы $\sigma_1 \in \text{Smb}_0(X', E_1, F_1)$, $\sigma_2 \in \text{Smb}_0(X'', E_2, F_2)$ устроены следующим образом. Пусть

$$E_1 = E \cup_{j_1\alpha} (X' \setminus j_1L) \times_B N, \quad E_2 = E \cup_{j_2\alpha} (X'' \setminus j_2L) \times_B N.$$

Пусть аналогичные равенства выполнены для F_1 и F_2 , а $\sigma_1 = \rho \cup_{j_1} \text{Id}$, $\sigma_2 = \rho \cup_{j_2} \text{Id}$. Перейдем к построению семейств операторов \tilde{D}_1 и \tilde{D}_2 , которые представляют эти символьные семейства в $\text{Int}_0(X'; E_1, F_1)$ и $\text{Int}_0(X''; E_2, F_2)$, соответственно. Как и ранее, через Int и CZ мы обозначаем пространства непрерывных по норме послойных семейств со значениями в обычных пространствах Int и CZ . Выберем тривиализующее покрытие, разбиение единицы и сглаживающие функции на U . Поднимем их на j_1U и j_2U , а затем дополним до покрытий эти наборы открытых множеств при помощи некоторых множеств, которые не пересекаются с j_1L и j_2L , соответственно. По нашим символам при помощи этих покрытий и т.д. мы строим обычным способом (неинвариантные) семейства операторов $D_1, D_2 \in \text{CZ}_0$, а затем (помня о лемме 50)

$$\tilde{D}_1 = \text{Av}_{\mathcal{G}} D_1 \in \text{Int}_0(X'), \quad \tilde{D}_2 = \text{Av}_{\mathcal{G}} D_2 \in \text{Int}_0(X'').$$

Необходимо проверить равенство

$$\text{index } \tilde{D}_1 = \text{index } \tilde{D}_2 \in K_{\mathcal{G}}(B).$$

Поскольку L инвариантно, то усреднение над ним одинаково для обоих операторов. Поскольку операторы имеют порядок 0, то мы вычисляем индекс на непрерывных семействах L_2 -пространств. Для этих пространств

$$L_2(X', E_1) \cong L_2(j_1L, E_1|_{j_1L}) \oplus L_2(X' \setminus j_1L, E_1|_{X' \setminus j_1L})$$

и

$$\tilde{D}_1 : L_2(X' \setminus j_1L, E_1|_{X' \setminus j_1L}) \cong L_2(X' \setminus j_1L, E_1|_{X' \setminus j_1L})$$

(это тождественный оператор). Эти разложения непрерывны (в L_2 -нормах) по $b \in B$. Аналогичные соотношения выполнены для \tilde{D}_2 . На втором слагаемом разложения L_2 мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E_1|_{j_1L}) & \xrightarrow{\tilde{D}_1} & \Gamma(F_1|_{j_1L}) \\ (j_2j_1^{-1}) \downarrow \cong & & \cong \downarrow (j_2j_1^{-1}) \\ \Gamma(E_2|_{j_2L}) & \xrightarrow{\tilde{D}_2} & \Gamma(F_2|_{j_2L}). \end{array}$$

Эта диаграмма \mathcal{G} -отображений показывает совпадение индексов, поскольку KER и СОК для \tilde{D}_1 может служить также и для \tilde{D}_2 . \square

Теорема 52. *Аналитический индекс $a\text{-ind}$ удовлетворяет аксиоме $B2^0$.*

Доказательство. Обозначим через \mathcal{B} такой $O(n)$ -эквивариантный эллиптический оператор порядка 1 над S^n , $\mathcal{B} : \Gamma^\infty(S^n, F^0) \rightarrow \Gamma^\infty(S^n, F^1)$, что

- (i) его символ $\sigma(\mathcal{B}) : \pi_S^*F^0 \rightarrow \pi_S^*F^1$ представляет класс $\phi_!(1)$, где мы обозначаем через ϕ вложение $0 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ так же как его поднятие на B , а через $\pi_S : TS^n \rightarrow S^n$ — естественную проекцию;
- (ii) $\ker \mathcal{B}^* = 0$, а $\ker \mathcal{B}$ — одномерный тривиальный $O(n)$ -модуль.

Существование такого $\tilde{\mathcal{B}}$ следует, например, из [5, Lemma 4.1].

Пусть $a \in K_{\mathcal{G}}(T_{\text{vert}}X)$ представляется символом $s : \pi_X^*E^0 \rightarrow \pi_X^*E^1$ порядка 1.

Как было показано в доказательстве теоремы 46, $i_!(a) = a \cdot \phi_!(1)$. Таким образом, по пункту (i) выше, он имеет представителя

$$(29) \quad S = \begin{pmatrix} s \otimes_B \text{Id} & -\text{Id} \otimes_B \sigma(\mathcal{B})^* \\ \text{Id} \otimes_B \sigma(\mathcal{B}) & s^* \otimes_B \text{Id} \end{pmatrix} : \pi_{Y^\bullet}^*((E^0 \otimes_B F^0) \oplus (E^1 \otimes_B F^1)) \\ \rightarrow \pi_{Y^\bullet}^*((E^1 \otimes_B F^0) \oplus (E^0 \otimes_B F^1))$$

поскольку γ или \cdot локально является тензорным умножением 2-комплексов приведенным над B . Теперь нам нужно проверить, что $a\text{-ind}_{\mathcal{G}}^X(s) = a\text{-ind}_{\mathcal{G}}^{Y^\bullet}(S)$.

Исходя из семейства A с символом s и оператора B , используя локальный подъем и усреднение, мы строим стандартным способом (см., например, [5] и [17, p. 173]) эллиптическое семейство

$$D = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}^* \\ \tilde{B} & \tilde{A}^* \end{pmatrix}$$

с символом S . Единственное различие со стандартными рассуждениями — это новый способ усреднения (по \mathcal{G}). Мы объяснили в лемме 50, что усреднение по \mathcal{G} сохраняет непрерывность семейств, а остальные свойства известны из эквивариантной теории для одного оператора [4].

Остается проверить, что $\text{index}(A) = \text{index}(D)$.

Пусть $h_0 \in \Gamma^\infty(S^n, F^0)$ — порождающий элемент одномерного $O(n)$ -модуля $\ker \mathcal{B}$. Определим для любого \mathcal{G} -эквивариантного расслоения \tilde{E} над X следующее отображение

$$f : H^s(X, \tilde{E}) \rightarrow H^{s-1}(Y^\bullet, \tilde{E} \otimes F^0), \quad f(u) = u \otimes h_0.$$

Поскольку h_0 неподвижен при действии $O(n)$, то f — корректно определенный инъективный морфизм \mathcal{G} -векторных расслоений. Пусть L — конечномерное \mathcal{G} -векторное расслоение над B , а $T : L \rightarrow H^{s-1}(X, \tilde{E}^1)$ — такой гомоморфизм \mathcal{G} -векторных расслоений, что

$$Q_b : H^s(X, \tilde{E}_0)_b \oplus L_b \rightarrow H^{s-1}(X, \tilde{E}^1)_b, \quad Q_b(u, v) = \mathcal{A}_b(u) + T(v),$$

сюръективен для любого b . В качестве L можно взять (расслоение, допустимое для) $\text{СОК}(\mathcal{A})$, а в качестве T — естественное вложение.

Рассмотрим отображение

$$R_b : H^s(Y^\bullet, \tilde{E}^0 \otimes_B F^0 \oplus \tilde{E}^1 \otimes_B F^1)_b \oplus L_b \rightarrow H^{s-1}(Y^\bullet, \tilde{E}^1 \otimes_B F^0 \oplus \tilde{E}^0 \otimes_B F^1)_b$$

заданное формулой

$$R_b(u, v) = D_b(u) + (f \circ T(v) \oplus 0).$$

Стандартные рассуждения (см., например, [17, сс. 174–175]) показывают, что R_b сюръективен для всякого b , а $\ker R = \ker Q$. Таким образом, по лемме 49

$$\text{index}(\mathcal{A}) = \ker(Q) - [L] = \ker(R) - [L] = \text{index}(D)$$

и доказательство закончено. □

Теорема 53. *Индексные функции $a\text{-ind}$ и $t\text{-ind}$ совпадают.*

Доказательство. Из доказанных утверждений следует, что мы можем применить теорему 47. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Atiyah and G. Segal, *Twisted K-theory*, e-print math.KT/0407054.
- [2] M. F. Atiyah, *K-theory*, W.A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam, 1967.
- [3] ———, *Bott periodicity and the index of elliptic operators*, Quart. J. Math. Oxford **19** (1968), 113–140.
- [4] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. I*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–530.
- [5] ———, *The index of elliptic operators. IV*, Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–138.
- [6] C. Carvalho, *C*-algebraic K-theory and index theory*, PhD dissertation, Oxford University, Department of Math., 2003, (to appear in K-Theory).
- [7] A. Connes, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C*-algebra by an action of \mathbb{R}* , Adv. Math. **39** (1981), 31–55.
- [8] Th. Fack and G. Skandalis, *Connes' analogue of the Thom isomorphism for the Kasparov groups*, Invent. Math. **64** (1981), 7–14.
- [9] D. S. Freed, *Twisted K-theory and loop groups*, International Congress of Mathematicians (2002, Beijing), Higher Education Press, Beijing, 2002, pp. 419–430.
- [10] D. S. Freed, M. J. Hopkins, and C. Teleman, *Twisted equivariant K-theory with complex coefficients*, E-print, math.AT/0206257.
- [11] T. Friedrich, *Vorlesungen über K-Theorie*, Teubner, Leipzig, 1987.
- [12] M. Hilsum and G. Skandalis, *Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat*, J. Rene Angew. Math **423** (1992), 73–99.
- [13] V. Mathai, R. B. Melrose, and I. M. Singer, *The index of projective families of elliptic operators*, E-print, math.DG/0206002.
- [14] V. Nistor, *An index theorem for gauge-invariant families: The case of solvable groups*, Acta Math. Hungar. **99** (2003), no. 1-2, 155–183.
- [15] V. Nistor and E. Troitsky, *An index for gauge-invariant operators and the Dixmier-Douady invariant.*, Trans. Am. Math. Soc. **356** (2004), no. 1, 185–218.
- [16] E. V. Troitsky, *"Twice" equivariant C*-index theorem and the index theorem for families*, Acta. Appl. Math. **68** (2001), 39–70.
- [17] Kenji Tsuboi, *The Atiyah-Singer index theorem for G-equivariant real elliptic families*, Math. J. Okayama Univ. **36** (1994), 145–177 (1995). MR MR1349029 (96h:58164)

Раздел 13.

Теория В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса n -гомоморфизмов Фробениуса для градуированных алгебр.

В работах Фробениуса 1896 года были введены высшие характеры конечных групп при помощи специальной рекурсии. В работах В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса 1996-97 годов было введено понятие n -гомоморфизмов алгебр и показано, что они полностью определяются рекурсией, аналогичной рекурсии Фробениуса; поэтому эти отображения были названы n -гомоморфизмами Фробениуса.

Введение n -гомоморфизмов алгебр было мотивировано теорией n -значных топологических групп. Понятие n -значных формальных групп было введено в работе В.М.Бухштабера и С.П.Новикова 1971 года. Затем В.М.Бухштабером была развита теория n -значных формальных групп и ее топологических приложений. В его работе 1990 года была открыта важная структура 2-значной алгебраической группы на сфере S^2 . Это положило начало топологической теории n -значных групп, которая была развита в работах В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса, а также в работах А.М.Вершика, А.П.Веселова, А.А.Гайфуллина, С.А.Евдокимова, Т.Е.Панова, И.Н.Пономаренко, А.Н.Холодова и П.В.Ягодковского. Теория n -значных групп, их представлений и действий, нашла приложения в теории динамических систем.

Понятие n -гомоморфизма обобщено на случай градуированных алгебр. Неформально говоря, n -гомоморфизмы — это специальный класс линейных отображений ассоциативных градуированных алгебр, которые удовлетворяют некоторому специальному условию слабой мультипликативности. 1-гомоморфизмы — это в точности гомоморфизмы алгебр. Условие слабой мультипликативности для 2-гомоморфизма $f : A^* \rightarrow B^*$ коммутативных градуированных алгебр состоит в том, что мы можем вычислить значение $f(a_1 a_2 a_3)$ отображения f на произведении 3 любых однородных элементов $a_1, a_2, a_3 \in A^*$ как вполне конкретный полином от величин $f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_1 a_2), f(a_1 a_3), f(a_2 a_3)$. При этом коэффициенты этого полинома будут некоторыми рациональными числами, зависящими только от четностей степеней $|a_1|, |a_2|, |a_3|$.

Как известно, сумма $f = f_1 + f_2 : A^* \rightarrow B^*$ двух гомоморфизмов алгебр $f_i : A^* \rightarrow B^*, i = 1, 2$, не является гомоморфизмом алгебр, так как не будет выполняться условие $f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2) \forall a_1, a_2 \in A^*$. Но оказывается, что условие слабой мультипликативности для этого класса линейных отображений выполняться будет. Это значит, что сумма $f = f_1 + f_2$ двух гомоморфизмов алгебр является примером 2-гомоморфизма. Аналогично, сумма $f = f_1 + \dots + f_n : A^* \rightarrow B^*$ n гомоморфизмов алгебр является типичным (и самым важным для приложений) примером n -гомоморфизма.

Главной трудностью в градуированном случае по сравнению с неградуированным является правильное определение знака в градуированной рекурсии Фробениуса (точной форме условия слабой мультипликативности), возникающего из-за различной четности степеней элементов. Основным результатом здесь является теорема о сумме, говорящая о том, что сумма n -гомоморфизма и m -гомоморфизма есть $(n + m)$ -гомоморфизм, обобщающая аналогичный результат В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса в неградуированном случае.

Из этой теоремы и вытекает тот факт, что сумма $f = f_1 + \dots + f_n : A^* \rightarrow$

B^* n гомоморфизмов алгебр является n -гомоморфизмом. Заметим однако, что уже в неградуированном коммутативном случае, существуют n -гомоморфизмы $f : A \rightarrow B$, которые нельзя представить в виде суммы $f = g + h$, где $g : A \rightarrow B$ — k -гомоморфизм, и $h : A \rightarrow B$ — $(n - k)$ -гомоморфизм, ни для какого $1 \leq k \leq n - 1$.

Полученная алгебраическая техника градуированных n -гомоморфизмов Фробениуса применена к изучению когомологий широкого класса разветвленных накрытий топологических пространств.

В алгебраической топологии хорошо известна задача: для каких классов непрерывных отображений топологических пространств $f : X \rightarrow Y$ существует прямой образ в когомологиях $f_! : H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ такой, что композиция $f_! \circ f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(Y)$ есть умножение на целое число. Различные виды понятия разветвленного накрытия хорошо известны в топологии, алгебраической геометрии и комплексном анализе. В 1983 году Л.Смит ввел такое понятие n -листного разветвленного накрытия, для которого существует прямой образ в когомологиях. В 1986 году А.Дольд получил полную классификацию n -листных разветвленных накрытий (введенных Л.Смитом) в терминах действий конечных групп на пространствах. Впоследствии такие отображения получили название n -листных разветвленных накрытий по Дольду-Смиту. Средствами градуированных n -гомоморфизмов получены результаты о когомологиях разветвленных накрытий именно этого типа. Впервые связь n -листных разветвленных накрытий по Дольду-Смиту с (неградуированными) n -гомоморфизмами была установлена В.М.Бухштабером и Э.Г.Рисом в работе 2008 года.

Известно три важных для топологии класса непрерывных отображений, которые являются n -лиственными разветвленными накрытиями по Дольду-Смиту:

- (1) Неразветвленные n -листные накрытия $f : X \rightarrow Y$;
- (2) Отображения проекции $\pi : X \rightarrow X/G$ на факторпространства по действию конечной группы G порядка n ;
- (3) Обычные n -листные разветвленные накрытия в теории гладких многообразий (с ветвлением вдоль подмногообразий коразмерности 2).

С помощью результата А.Дольда и классического трансфера в теории групп несложно показать, что для любого n -листного разветвленного накрытия по Дольду-Смиту $f : X \rightarrow Y$ индуцированное отображение в рациональных (и \mathbb{Z}_p , $p > n$) когомологиях $f^* : H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ и $f^* : H^*(Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ является мономорфизмом. Основной вопрос, на который получен частичный ответ, звучит так:

Насколько маленькой ("вырожденной") при фиксированной алгебре $H^(X; \mathbb{Q})$ и данном n может быть подалгебра $H^*(Y; \mathbb{Q}) \subset H^*(X; \mathbb{Q})$ (или $H^*(Y; \mathbb{Z}_p) \subset H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, $p > n$)?*

Из теории действий конечных групп и результата А.Дольда следует, что существует определенное линейное отображение в когомологиях в прямую сторону $\tau : H^*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Q})$, $\tau : H^*(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Z}_p)$. Оказывается, это отображение τ является n -гомоморфизмом специального типа (n -трансфером). Обозначим через $l(X)$ рациональную когомологическую длину пространства X , т.е. наибольшее целое число m такое, что существуют однородные элементы $a_1, a_2, \dots, a_m \in H^{*\geq 1}(X; \mathbb{Q})$ степени больше нуля такие, что $a_1 a_2 \dots a_m \neq 0$. Аналогично, через $l_p(X)$ обозначим \mathbb{Z}_p когомологическую длину пространства X . Используя различные свойства n -трансфера, получен следующий основной результат о когомологиях разветвленных накрытий:

Теорема. Пусть X и Y — локально стягиваемые паракомпакты, и $f : X \rightarrow Y$ — n -листное разветвленное накрытие по Дольду-Смиту. Тогда справедлива следующая оценка на когомологические длины пространств X и Y :

$$l(Y) + 1 \geq \frac{l(X) + 1}{n},$$

$$l_p(Y) + 1 \geq \frac{l_p(X) + 1}{n}, \quad \forall p > n.$$

В случае $n = 2$ эта оценка является точной.

Следует заметить, что некоторым недостатком этого результата является то, что он применим только для разветвленных накрытий со сравнительно небольшим числом листов n . А именно, при $n > \dim X = \dim Y$ (размерности X и Y совпадают во всех нормальных случаях, например, для полиэдров) полученная оценка становится тривиальной, $l(Y) \geq 0$ и $l_p(Y) \geq 0, \forall p > n$. В частности, для разветвленных накрытий многообразий $f : M^m \rightarrow N^m$ число листов n должно быть не больше m .

И.Берстейном и А.Л.Едмондсом в работе 1978 года была получена близкая оценка в частном случае разветвленных накрытий замкнутых ориентируемых многообразий. В их работе решалась следующая задача. Пусть X^m и Y^m — два замкнутых связных ориентированных m -мерных многообразия и $f : X^m \rightarrow Y^m$ — непрерывное открытое конечнократное отображение степени $\pm n$ (понятно, что n здесь равно максимальной кратности отображения f). Такие отображения между многообразиями естественно называть n -листными разветвленными накрытиями. Как в терминах рациональных когомологий $H^*(X^m; \mathbb{Q})$ и $H^*(Y^m; \mathbb{Q})$ оценить число n ? Эта задача восходит к известной работе Александра 1920 года, в которой он доказал теорему о том, что для любого замкнутого ориентируемого m -мерного PL многообразия M^m существует открытое кусочнолинейное конечнократное отображение M^m на сферу S^m .

И.Берстейн и А.Л.Едмондс, используя известную теорему А.В.Чернавского 1964 года о структуре множества ветвления рассматриваемых отображений и собственную алгебраическую технику, получили следующую оценку.

Теорема (И.Берстейн, А.Л.Едмондс). Пусть X^m и Y^m — два связных замкнутых ориентируемых m -мерных многообразия и $f : X^m \rightarrow Y^m$ — непрерывное открытое конечнократное отображение степени $\pm n$. Тогда выполнена следующая оценка $l(Y^m) \geq \frac{l(X^m)}{n}$.

Доказательство этой оценки существенно использует рациональную двойственность Пуанкаре и, поэтому, годится только в ориентируемом случае. Легко привести пример, когда эта оценка неверна, если хотя бы многообразие Y^m неориентируемо. Рассмотрим двулистное накрытие $f : S^{2m} \rightarrow \mathbb{R}P^{2m}$. Пространство $\mathbb{R}P^{2m}$ имеет рациональные когомологии только в размерности ноль, поэтому $l(\mathbb{R}P^{2m}) = 0$.

Оценка Берстейна-Едмондса здесь примет вид: $0 = l(\mathbb{R}P^{2m}) \geq \frac{l(S^{2m})}{2} = \frac{1}{2}$, и, следовательно, неверна. Заметим, что наша общая оценка, $l(Y^m) + 1 \geq \frac{l(X^m) + 1}{n}$, чуть слабее оценки Берстейна-Едмондса, но, зато, работает и в случае неориентируемых X^m и Y^m . Для рассмотренного только что примера имеем $1 = l(\mathbb{R}P^{2m}) + 1 \geq \frac{l(S^{2m}) + 1}{2} = 1$. Также отметим, что используя рациональную двойственность Пуанкаре и нашу технику n -трансфера, мы можем вывести и оценку Берстейна-Едмондса.

И.Берстейн и А.Л.Едмондс получили фактически оценку снизу на степень n разветвленного накрытия $f : X^m \rightarrow Y^m$ при фиксированных ориентируемых m -мерных многообразиях X^m и Y^m . В частности, это позволило сделать вывод, что для тора T^m минимальная степень n его разветвленного накрытия над сферой S^m (которая существует в силу теоремы Александра) будет не меньше m .

Заметим также, что обычные разветвленные накрытия в теории гладких многообразий (с ветвлением вдоль подмногообразий коразмерности два), являются частным случаем рассмотренной общей ситуации.

С помощью основанного на понятии градуированного n -гомоморфизма обобщения понятия градуированной алгебры Хопфа получены результаты о когомологиях и фундаментальной группе пространств, несущих структуру n -значных топологических групп. n -значное умножение на пространстве X — это непрерывное отображение $\mu : X \times X \rightarrow \text{Sym}^n X$, где $\text{Sym}^n X := X^n / S_n$ — n -я симметрическая степень пространства X . Под n -значной

топологической группой понимают хаусдорфово пространство X с отмеченной точкой $e \in X$, n -значным умножением $\mu : X \times X \rightarrow \text{Sym}^n X$ и непрерывным отображением $\text{inv} : X \rightarrow X$ (обращением), удовлетворяющие определенным аксиомам единицы, ассоциативности и обращения. В частности, аксиома единицы формулируется так: $\mu(x, e) = \mu(e, x) = [nx] \in \text{Sym}^n X$, $\forall x \in X$. 1-значная группа — это просто топологическая группа.

Известно, что в алгебре рациональных кохомологий группы Ли (более общо, ее гомотопического аналога, H -группы) существует структура градуированной алгебры Хопфа. В частности, если X является H -группой, то $H^*(X; \mathbb{Q})$ как алгебра является свободной коммутативной алгеброй от некоторого набора четномерных и нечетномерных образующих, т.е. изоморфна тензорному произведению внешней алгебры на алгебру полиномов. (В случае конечномерности X четномерные образующие, естественно, отсутствуют).

На основе понятия градуированного n -гомоморфизма вводится понятие градуированной n -алгебры Хопфа. Основное изменение аксиом градуированной алгебры Хопфа состоит в том, что диагональ $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ должна быть теперь n -гомоморфизмом. Доказана теорема, говорящая о том, что в алгебре рациональных кохомологий $H^*(X; \mathbb{Q})$ n -значной топологической группы (и более общо, ее гомотопического аналога, nH -группы) существует структура градуированной n -алгебры Хопфа. В частном случае, когда нечетномерные кохомологии $H^{\text{odd}}(X; \mathbb{Q})$ пространства X равны нулю, эта теорема была доказана В.М.Бухштабером и Э.Г.Рисом в 1997 году. В этом направлении следует отметить также теорему Т.Е.Панова 1996 года, дающую классификацию всех 4-мерных односвязных замкнутых многообразий M^4 , в алгебре рациональных кохомологий $H^*(M^4; \mathbb{Q})$ которых существует структура градуированной 2-алгебры Хопфа.

Помимо nH -групп как гомотопического аналога n -значных топологических групп, также рассмотрены nH -моноиды (выполнены только аксиомы гомотопической единицы и гомотопической ассоциативности) и nH -пространства (выполнена только аксиома гомотопической единицы). $1H$ -пространства — это просто H -пространства. Хорошо известно, что фундаментальная группа любого H -пространства абелева, и для любой абелевой группы A существует H -пространство (даже пространство петель) $K(A, 1) = \Omega K(A, 2)$ с данной фундаментальной группой A . Рассмотрен следующий по сложности вопрос: какие фундаментальные группы бывают у $2H$ -пространств. Вводится достаточно широкий класс \mathcal{C} конечно определенных групп, которому, в частности, принадлежат фундаментальные группы компактных римановых поверхностей рода $g \geq 2$. Основным результатом здесь является следующая

Теорема. Пусть X — связный счетный CW комплекс такой, что $\dim H^q(X; \mathbb{Q}) < \infty, \forall q \geq 0$. Тогда если на X существует структура $2H$ -пространства, то его фундаментальная группа не принадлежит классу \mathcal{C} .

Раздел 14.

Функция Грина двумерного дискретного оператора Шрёдингера

1 Введение

Для эллиптической дискретизации, построенной в [1], получена формула для функции Грина в виде интеграла по контуру особого вида от мероморфного дифференциала на спектральной кривой. Вначале напомним конструкцию, использованную Кричевером [2] для построения интегрируемой гиперболической дискретизации. Затем вспомним, как A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P. M. Santini [1] удалось получить эллиптическую дискретизацию, используя редукцию на чётную подрешётку.

Определение 1 Пусть даны:

- Компактная, регулярная риманова поверхность Γ рода g
- Фиксированная точка R_1 на Γ — точка нормировки.
- g точек $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ на Γ — дивизор общего положения.
- Четыре выделенные точки P^+, P^-, Q^+, Q^- .

Тогда будем говорить, что заданы обобщённые спектральные данные.

Для данных общего положения существует единственная функция $\Psi(\gamma, m, n)$, где $\gamma \in \Gamma$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ со следующими свойствами:

1. $\Psi(\gamma, m, n)$ является мероморфной функцией от γ на Γ .
2. Ψ имеет полюса не более чем первого порядка в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$
3. Ψ имеет полюс не более чем m -го порядка в P^+ и полюс не более чем n -го порядка в Q^+ и больше не имеет никаких других особенностей.
4. Ψ имеет нуль по крайней мере m -го порядка точке P^- и нуль по крайней мере n -го порядка в Q^- .
5. $\Psi(R_1, m, n) = 1$.

Это следует из теоремы Римана-Роха. Из неё же вытекает

$$\Psi(\gamma, m+1, n+1) + \alpha_1(m, n)\Psi(\gamma, m+1, n) + \quad (1)$$

$$\alpha_2(m, n)\Psi(\gamma, m, n+1) + \alpha_3\Psi(\gamma, m, n) = 0, \quad (2)$$

где

$$\alpha_1(m, n) = - \lim_{\gamma \rightarrow P^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m+1, n)},$$

$$\alpha_2(m, n) = - \lim_{\gamma \rightarrow Q^+} \frac{\Psi(\gamma, m+1, n+1)}{\Psi(\gamma, m, n+1)},$$

$$\alpha_3(m, n) = -1 - \alpha_1(m, n) - \alpha_2(m, n).$$

Пусть теперь на Γ определена голоморфная инволюция σ ровно с двумя неподвижными точками $R_+ = R_1, R_-$ и следующими свойствами:

1. На Γ существует мероморфный дифференциал Ω с двумя полюсами первого порядка в R_+, R_- и $2g$ нулями в $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \sigma\gamma_1, \dots, \sigma\gamma_g$.
2. $\sigma P^+ = P^-, \sigma Q^+ = Q^-$.

Тогда

$$\Psi(R_-, m, n) = (-1)^{m+n}, \quad \alpha_1(m, n) + \alpha_2(m, n) = 0, \quad \alpha_3(m, n) = -1, \quad (3)$$

а волновая функция Ψ удовлетворяет 4-точечному уравнению

$$\Psi(m+1, n+1) - \Psi(m, n) = if(m, n)(\Psi(m+1, n) - \Psi(m, n+1)), \quad (4)$$

$$f(m, n) = i\alpha_1(m, n) = -i\alpha_2(m, n). \quad (5)$$

Нормируем $\Omega(\gamma)$ условием $\text{res}_{R_{\pm}} \Omega = \pm \frac{1}{2}$.

Наложённое условие является довольно сильным, в частности, род g должен быть чётным.

Если стоит задача выделения вещественных потенциалов, то нужно дополнительно предположить существование на Γ антиголоморфной инволюции τ , такой что

1. τ и σ коммутируют.
2. $\tau R_+ = R_-$.
3. Точки P^+, P^-, Q^+, Q^- являются неподвижными для τ .
4. Дивизор $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ инвариантен относительно τ .

Тогда

- $f(m, n) \geq 0$ при нечётном $m+n$,
- $f(m, n) \leq 0$ при чётном $m+n$.

Отсюда следует, что все коэффициенты дискретизации на чётной подрешётке одного знака, что в эллиптическом случае означает невырожденность оператора.

Из (4) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(m,n)}(\Psi(m+1, n+1) - \Phi(m, n)) + \\ & f(m, n-1)(\Psi(m+1, n-1) - \Psi(m, n)) + \\ & f(m-1, n)(\Psi(m-1, n+1) - \Psi(m, n)) + \\ & \frac{1}{f(m-1, n-1)}(\Psi(m-1, n-1) - \Psi(m, n)) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Переобозначим

$$\begin{aligned} m &= \mu - \nu, & n &= \mu + \nu, \\ a_{\mu, \nu} &= \frac{1}{f(m, n)}, & a_{\mu-1, \nu} &= \frac{1}{f(m-1, n-1)}, \\ b_{\mu, \nu} &= f(m-1, n), & b_{\mu, \nu-1} &= f(m, n-1), \\ c_{\mu, \nu} &= a_{\mu, \nu} + a_{\mu-1, \nu} + b_{\mu, \nu} + b_{\mu, \nu-1}, \\ \Psi_{\mu, \nu} &= \Psi(m, n) \end{aligned}$$

Тогда L выглядит более привычно

$$(L\Phi)_{\mu, \nu} = a_{\mu, \nu}\Phi_{\mu+1, \nu} + a_{\mu-1, \nu}\Phi_{\mu-1, \nu} + b_{\mu, \nu}\Phi_{\mu, \nu+1} + b_{\mu, \nu-1}\Phi_{\mu, \nu-1} - c_{\mu, \nu}\Phi_{\mu, \nu} \quad (7)$$

Определение 2 Дифференциал dp_m имеет простые полюса в точках P^+ , P^- с вычетами i и $-i$ соответственно, dp_n — простые полюса в точках Q^+ , Q^- с такими же вычетами. Они однозначно определяются условием вещественности интегралов по всем контурам. Сами квазимпульсы p_m , p_n определяются как первообразные и являются многозначными на Γ , однако их мнимые части $\text{Im } p_m$, $\text{Im } p_n$ уже являются однозначными на Γ .

В дальнейшем мы будем рассматривать контуры вида $\text{Im } p_n = \text{Const}$. Такого рода контуры возникли ещё в работах Кричевера и Новикова.

2 Результаты

Предположение П. Г. Гриневича заключалось в том, что в дискретном случае формула на функции Грина не будет сильно отличаться от непрерывного случая:

$$\begin{aligned} G(\lambda, x, y, x', y') &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{Im } p_x(\gamma) = \text{Im } p_x(\lambda)} \Psi_0(\gamma, x, y) \Psi_0(\sigma\gamma, x', y') \Omega(\gamma) \\ & \left(\text{sgn}(y - y') + \text{sgn}(\text{Im } p_y(\gamma) - \text{Im } p_y(\lambda)) \right) \end{aligned}$$

Оно оказалось верным.

Рассмотрим непрерывный замкнутый контур α на Γ со следующими свойствами:

- точки R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно него,

- точки Q^+ и Q^- лежат по разные стороны относительно него, точки P^\pm не лежат на α ,
- ориентация на нём задаётся следующим условием:

$$\oint_{\alpha} dp_n = +2\pi. \quad (8)$$

Все такие контуры α будем называть *регулярными*. Регулярность контура обеспечивает возможность проинтегрировать по нему дифференциал $\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}(\sigma\gamma)\Omega(\gamma)$:

Лемма 1 *Функция $G_0(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ Грина оператора L даётся следующей формулой*

$$G_0(\mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\alpha} \operatorname{sgn}(\mu - \nu + \tilde{\nu} - \tilde{\mu}) \Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}^+(\gamma) \Omega(\gamma). \quad (9)$$

Здесь α является регулярным контуром.

Рост функции $\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)$ от μ, ν можно оценить функциями $|e^{ip_n}|$ и $|e^{ip_m}|$. Наша цель — так подправить G_0 и так выбрать контур интегрирования, чтобы функции были ограничены на этом контуре.

Следующая теорема утверждает, что для наших целей подходит контур $\{\gamma : \operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)\}$ с ориентацией, заданной условием $\operatorname{Re} dp_n(\gamma) > 0$.

Теорема 1 *Пусть Γ является M -кривой. Кроме того, пусть полюса волновой функции P^\pm, Q^\pm попадают на один неподвижный овал. Тогда если контур $\operatorname{Im} p_n(\gamma) = C$ не проходит через точки R_\pm, P^\pm , то*

- R_+ и R_- лежат по одну сторону относительно него,
- Q^+ и Q^- лежат по разные стороны относительно него.

Кроме того, если контуры $\operatorname{Im} p_m(\gamma) = C_1$ и $\operatorname{Im} p_n(\gamma) = C_2$, не проходящие через P^\pm, Q^\pm , имеют общие точки, то их ровно две, и контуры пересекаются в них трансверсально.

При доказательстве использовалась, в частности, следующая лемма, представляющая отдельный интерес:

Лемма 2 *Рассмотрим отображение Γ на \mathbb{R}^2 , задаваемое формулой:*

$$\gamma \mapsto \left(\operatorname{Im} \int_{\gamma_0}^{\gamma} dp_m, \operatorname{Im} \int_{\gamma_0}^{\gamma} dp_n \right), \quad (10)$$

где γ_0 некая начальная точка. Тогда образы двух точек γ_1 и γ_2 , отличных от P^\pm, Q^\pm , совпадают тогда и только тогда, когда либо $\gamma_1 = \gamma_2$, либо $\gamma_1 = \tau\gamma_2$.

Интегрирование $\Psi_{\mu,\nu}(\gamma)\Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}(\sigma\gamma)\Omega(\gamma)$ по исследованному контуру обеспечивает ограниченность $|e^{ip_n}|$. Чтобы ограничить рост $|e^{ip_m}|$, прибавим к G_0 функцию

$$Z(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\operatorname{Im} p_n(\gamma) = \operatorname{Im} p_n(\lambda)} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} p_m(\gamma) - \operatorname{Im} p_m(\lambda)) \Psi_{\mu,\nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu},\tilde{\nu}}(\sigma\gamma) \Omega(\gamma), \quad (11)$$

которая, очевидно, обнуляет L , а потому сумма $G_0 + Z$ не теряет нужных свойств.

Суммируем полученные результаты.

Теорема 2 Пусть Γ является M -кривой. Кроме того, пусть полюса волновой функции P^\pm, Q^\pm попадают на один неподвижный овал. Тогда для всех λ , таких что контур $\text{Im } p_n(\gamma) = \text{Im } p_n(\lambda)$ не проходит через точки R_\pm, P^\pm , функция $G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ Грина оператора L с асимптотикой $O(\Psi_{\mu, \nu}(\lambda))$ при $\mu \rightarrow \infty, \nu \rightarrow \infty$ даётся следующей формулой:

$$G(\lambda, \mu, \nu, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\text{Im } p_n(\gamma) = \text{Im } p_n(\lambda)} \Psi_{\mu, \nu}(\gamma) \Psi_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}}(\sigma\gamma) \Omega(\gamma) \left(\text{sgn}(m - \tilde{m}) + \text{sgn}(\text{Im } p_m(\gamma) - \text{Im } p_m(\lambda)) \right)$$

Список литературы

- [1] A. Doliwa, P. Grinevich, M. Nieszporski, P. M. Santini *Integrable lattices and their sub-lattices: from the discrete Moutard (discrete Cauchy-Riemann) 4-point equation to the self-adjoint 5-point scheme* — 2004
- [2] И. М. Кричевер *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия* — ДАН СССР, 285:1 (1985), 31-36.
- [3] S. Grushevsky, I. Krichever *Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants* — Duke Math. J. Volume 152, Number 2, 317-371 (2010).

Раздел 15.

Применение общих методов решения двумерных и трехмерных обратных волновых задач в приложении к проблемам томографирования

Исследования направлены на развитие принципиальных аспектов и путей практического применения общих методов решения двумерных и трехмерных обратных волновых задач в приложении к проблемам томографирования. К таким областям применения относятся медицинская томография (включая томографию распределенных нелинейных акустических параметров), акустическая термотомография, восстановление характеристик неоднородностей нового “дважды отрицательного” типа, а также томография океана, включая восстановление пространственных характеристик подводных течений и вихрей.

(I) АКУСТИЧЕСКИЕ “ДВАЖДЫ ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ” СРЕДЫ [работы 1, 2 в списке публикаций]. Широко обсуждаемые в настоящее время в оптике и в акустике метаматериалы могут обладать весьма необычными свойствами. Одним из направлений исследований является рассмотрение дважды отрицательных сред – сред, обладающих одновременно двумя отрицательными эффективными динамическими параметрами: магнитной μ и диэлектрической ϵ проницаемостью (в оптике) или плотностью ρ и сжимаемостью η (в акустике). Экспериментально реализованные [Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C., Nemat-Nasser S.C., Schultz S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 18. P. 4184], такие среды оказались достаточно сильно диспергирующими и обладающими существенным поглощением. В связи с этим представляет интерес вопрос о принципиальных ограничениях на величину дисперсии и поглощения в подобных средах. В настоящей работе исследуются дважды отрицательные акустические среды (далее они будут для краткости называться отрицательными, а “обычные” среды – положительными). Будут последовательно рассмотрены отрицательные среды без дисперсии, отрицательные среды со “слабой” дисперсией, которая не носит резонансного характера, а также отрицательные среды с “сильной” дисперсией и резонансной функцией отклика среды.

Для моделирования волновых процессов в системах, содержащих включения отрицательных сред, наряду с положительными включениями, целесообразно вести рассмотрение [Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н. // Акустич. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292] на основе исходной для акустики системы уравнений гидродинамики. Эта система в линеаризованном виде записывается как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\eta}p) + \nabla \vec{v} = \Phi; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\hat{\rho}\vec{v}) + \nabla p = \vec{f}, \quad (1)$$

где P – акустическое давление, v – колебательная скорость, Φ и f – соответственно скалярные и векторные первичные источники акустического поля. Ввод вместо скалярных величин плотности ρ и сжимаемости η операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\eta}$ обусловлен рассмотрением широкого класса сред, где эти параметры могут выражать функции отклика среды, являясь интегральными операторами типа свертки по временной переменной. В монохроматическом случае при временной зависимости полей $\sim \exp(-i\omega t)$ формулы (1) имеют вид

$$\nabla v - i\omega\eta p = \Phi; \quad \nabla p - i\omega\rho v = f. \quad (2)$$

Для анализа волновых процессов в различных системах можно представить плотность и сжимаемость среды в виде суммы $\rho(r) \equiv \rho_0 + \rho'(r)$, $\eta(r) \equiv \eta_0 + \eta'(r)$ положительных фоновых значений плотности ρ_0 и сжимаемости η_0 с добавками $\rho'(r)$ и $\eta'(r)$. Эти добавки могут не быть малыми, а для отрицательных сред даже превышают по абсолютной величине фоновые значения параметров. Выражение (1) может быть записано в матричной

форме как $\hat{A}\vec{u} = \vec{F}$. Здесь введены вектор-столбцы поля $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}$ и первичных источников

$\vec{F} \equiv \begin{pmatrix} f \\ \Phi \end{pmatrix}$, а также оператор $\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho(r) & \nabla \\ \nabla & -i\omega\eta(r) \end{pmatrix} \equiv \hat{A}_0 - \hat{A}_1$, где оператор

$\hat{A}_0 \equiv \begin{pmatrix} -i\omega\rho_0 & \nabla \\ \nabla & -i\omega\eta_0 \end{pmatrix}$ характеризует однородную положительную фоновую среду, а

оператор $\hat{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} i\omega\rho'(r) & 0 \\ 0 & i\omega\eta'(r) \end{pmatrix}$ характеризует добавки. Если задано падающее поле

$\vec{u}_0 \equiv \begin{pmatrix} v_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$, которое создавали бы в пространстве первичные источники в случае отсутствия

добавок, т.е. при $\rho'(r) = 0$ и $\eta'(r) = 0$, то выражение (1) может быть представлено в виде уравнения типа Липпмана-Швингера. В операторной записи оно имеет вид

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \hat{A}_0^{-1}\hat{A}_1\vec{u}. \quad (3)$$

В силу того, что оператор \hat{A}_0 включает в себя дифференцирование, входящий в (1)) обратный ему оператор \hat{A}_0^{-1} должен содержать интегрирование. Он может быть представлен в интегральной форме в виде свертки с матричной функцией Грина $\hat{A}_0^{-1}(\bullet) = \int \hat{G}(r - r')(\bullet) dr'$, которая выражается через хорошо известную функцию Грина уравнения Гельмгольца соответствующей размерности:

$\hat{G}(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \begin{pmatrix} i\omega\eta_0 & \nabla \\ \nabla & i\omega\rho_0 \end{pmatrix} G(\vec{r} - \vec{r}')$. Тогда выражение (1)) записывается в интегральном виде:

$$\check{u}(\vec{r}) = \check{u}_0(\vec{r}) + \int_{\mathfrak{R}} \hat{G}(\vec{r} - \vec{r}') [\hat{A}_1(\vec{r}') \check{u}(\vec{r}')] dr'. \quad (4)$$

Интегрирование ведется по всей области \mathfrak{R} , где расположены включения. Данное выражение может быть дискретизовано и решаться численным образом при произвольной конфигурации положительных и отрицательных сред в системе [Буров В.А., Дмитриев К.В., Сергеев С.Н. // Акустич. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 292]. При этом, во-первых, не возникает необходимости приводить дополнительные рассуждения о выборе знака показателя преломления отрицательной среды, так как плотность и сжимаемость входят в уравнение (1)) раздельным и линейным образом. Во-вторых, поскольку, фактически, (1)) представляет собой решение прямой задачи рассеяния, при моделировании не возникает проблем на границах области рассмотрения, и нет необходимости использовать дополнительные приемы согласования (PML и др.).

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

Наличие аномальной дисперсии в отрицательных средах может быть объяснено следующим образом. При падении волны перпендикулярно границе раздела из положительной среды в отрицательную среду фазовая скорость меняет свой знак и становится отрицательной. Пусть эти две среды являются идеально согласованными, т.е. их плотности и сжимаемости совпадают по абсолютной величине, но различаются знаком. Тогда импедансы сред совпадают, и отраженная от границы волна отсутствует. При этом, если предполагать, что на границе не происходит рождения или поглощения энергии, поток энергии и связанный с ним вектор Умова-Пойнтинга должны быть всюду положительными. Поскольку распространение энергии обычно связывается с групповой скоростью, то отсюда можно сделать вывод о противоположной направленности фазовой и групповой скоростей в отрицательной среде, что эквивалентно утверждению об обязательном наличии аномальной

дисперсии. Однако в отрицательной среде вектор Умова-Пойтинга может не совпадать по направлению с групповой скоростью; поэтому для окончательного ответа на вопрос о необходимости дисперсии нужно более детальное рассмотрение и моделирование.

Анализировалось перпендикулярное падение плоской монохроматической волны с длиной λ_0 и единичной амплитудой на включение толщиной $3\lambda_0$ отрицательной среды, плотность ρ и сжимаемость η которой идеально согласованы с плотностью ρ_0 и сжимаемостью η_0 фоновой положительной среды: $\rho = -\rho_0$ и $\eta = -\eta_0$. На рис. 1 по двум горизонтальным осям отложены, соответственно, действительная и мнимая компоненты рассчитанной колебательной скорости V в системе (поскольку задача одномерная, знак вектора над V опущен). Вдоль вертикальной оси Z отложена пространственная координата. Полученное распределение колебательной скорости имеет вид спирали, которая закручена в одну или другую сторону, в зависимости от знака фазовой скорости звука. Из рис. 1 видно, что на границах включения из отрицательной среды знак спиральности меняется. В точках, которые расположены вне включения с разных сторон от этого включения, причем таких, что расстояние между ними равно двойной толщине включения, фазы в каждый момент времени совпадают (для примера, таковыми являются точки A и B на рис. 1). Это связано с тем, что набег фазы в отрицательной среде отрицателен и компенсирует набег фазы в положительной фоновой среде. Вектор Умова-Пойтинга в рассматриваемом случае не меняется на границе с отрицательной средой из-за отсутствия отраженной волны, что подтверждается численным моделированием.

Поскольку условие равенства фаз выполнено в точках A и B при любой длине волны (отрицательная среда предполагается недиспергирующей), в случае прохождения через слой более сложного сигнала, содержащего конечный набор частот, его амплитуда в рассматриваемых точках будет одинакова в любой момент времени. Моделировалось прохождение через слой отрицательной среды сигнала, являющегося суммой 11 гармонических плоских волн. Их длины λ менялись от $0.5\lambda_{\text{mid}}$ до $1.5\lambda_{\text{mid}}$ с шагом $0.1\lambda_{\text{mid}}$. Амплитуды задавались по гауссовому закону: $A(\lambda) = \exp(-(\lambda - \lambda_{\text{mid}})^2 / \lambda_{\text{mid}}^2)$; амплитуда центральной волны была принята за единицу. Такой сигнал представляет собой бесконечную последовательность импульсов с большой скважностью. Результат расчета поля колебательной скорости в системе в определенный момент времени представлен на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления

. Видно, что в точках A и B сигналы совпадают. При приближении импульса к одной из границ слоя на расстояние, равное толщине слоя, на второй границе появляется возмущение, которое распадается на два импульса. Один из них продолжает движение в фоновой среде за слоем. Второй движется внутри слоя навстречу первоначальному импульсу, и на передней границе слоя происходит их взаимное подавление. Следует отметить, что в силу отсутствия дисперсии в рассматриваемой отрицательной среде, фазовая и групповая скорости в ней являются отрицательными одновременно и сонаправлены друг с другом. Вектор Умова-Пойнтинга положителен и направлен противоположно групповой скорости. Это показывает, что проведенное ранее рассуждение об обязательном наличии дисперсии, основанное на их сонаправленности, не является правильным.

Появление в рассматриваемом примере импульса в точке B одновременно с приходом импульса в точку A не свидетельствует о нарушении принципа причинности, поскольку рассматривается совокупность нескольких монохроматических процессов, бесконечных по времени. Однако результат моделирования не зависит от числа этих процессов и, следовательно, скважности импульсов. Это позволяет предположить, что и для сигнала с широким непрерывным спектром ситуация не изменится.

Для анализа такого случая необходимо получить уравнение типа (1)) на основе исходной системы (1)), содержащей время и не ограничивающейся монохроматическим случаем (1)). При этом меняется вид операторов, входящих в остающееся неизменным уравнение (1)):

$$\hat{A}^{(t)} \equiv \begin{pmatrix} \rho(r) \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \\ \nabla & \eta(r) \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \\ \nabla & \eta_0 \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\rho'(r) \frac{\partial}{\partial t} & \vec{0} \\ \vec{0} & -\eta'(r) \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \equiv \hat{A}_0^{(t)} - \hat{A}_1^{(t)}$$

Для получения выражения для функции Грина, которая соответствует в этом случае обратному оператору $(\hat{A}_0^{(t)})^{-1}$, следует выполнить обратное преобразование Фурье:

$\hat{G}(t-t', r-r') \equiv \int \hat{G}(r-r') e^{-i\omega(t-t')} d\omega$. В частности, в одномерном случае (размерность $D=1$) получается

$$\hat{G}_{D=1}(t-t', z-z') = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_0/\rho_0} & \text{sgn}(z-z') \\ \text{sgn}(z-z') & \sqrt{\rho_0/\eta_0} \end{pmatrix} \delta\left(\frac{|z-z'|}{c} - (t-t')\right).$$

В итоге, уравнение типа Липмана-Швингера принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} v(z,t) \\ p(z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(z,t) \\ p_0(z,t) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \int \int dz' dt' \delta\left(\frac{|z-z'|}{c} - (t-t')\right) \times \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_0/\rho_0} & \text{sgn}(z-z') \\ \text{sgn}(z-z') & \sqrt{\rho_0/\eta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'(z') & 0 \\ 0 & \eta'(z') \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t'} \begin{pmatrix} v(z',t') \\ p(z',t') \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Оно позволяет анализировать распространение любых сигналов через одномерную систему с произвольным распределением плотности и сжимаемости.

На рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде. изображен результат моделирования поля акустического давления $p(z,t)$ при падении одиночного волнового пакета гауссовой формы на слой отрицательной среды. По горизонтальной оси отложена координата, а по вертикальной – величина $c_0 t$, пропорциональная времени и фазовой скорости c_0 в фоновой среде. На участках I и III пакет распространяется в положительном направлении, а на участке II, соответствующем отрицательной среде, – в отрицательном направлении. При этом, как и в изображенном на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде. случае, когда в спектре сигнала присутствует лишь несколько частот, при подходе пакета к слою отрицательной среды на расстояние, меньшее его толщины, начинает формироваться возмущение на противоположной границе слоя. Этот момент времени отмечен пунктирной линией. Опережающее появление пакета на выходе из системы противоречит принципу причинности и свидетельствует о том, что отрицательные среды без дисперсии существовать не могут.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ СО СЛАБОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Представляет интерес возможность оценки поглощения в среде с фазовой скоростью звука c и групповой скоростью c_g . Связь дисперсии в среде с поглощением в ней дается соотношениями Крамерса-Кронига. В общем случае для некоторой функции отклика системы $Q(t)$, которая связывает воздействие на систему $F(t)$ с ее откликом $x(t)$ в виде

свертки $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau)F(t - \tau)d\tau$, эти соотношения выражают принцип причинности:

$Q(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Тогда в частотном представлении $Q(\omega) = Q_1(\omega) + iQ_2(\omega)$ действительная $Q_1(\omega)$ и мнимая $Q_2(\omega)$ компоненты функции отклика связаны между собой:

$$Q_1(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'; \quad Q_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega',$$

где символ P означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Если в качестве функции отклика рассматривать волновое число $k(\omega) = k_1(\omega) + ik_2(\omega) = \omega/c(\omega) + i\alpha(\omega)$, где $\alpha(\omega)$ – амплитудное поглощение в среде, можно установить связь между поглощением и фазовой скоростью волны. Обращает на себя внимание тот факт, что данная связь является интегральной, а не локальной. Из этого следует, что дисперсия в одной области частот не обязательно означает наличие там же поглощения. Задача связать поглощение и дисперсию локальным образом оказывается непростой. Когда эти характеристики в среде являются достаточно плавными (отсутствуют резонансы), имеет место следующая приближенная локальная связь [O'Donnel M., Jaynes E.T., Miller J.G. // JASA. 1981. V. 69. N 3. P. 696]:

$$\alpha(\omega) \approx \frac{\pi\omega^2}{2c^2} \frac{\partial c}{\partial \omega}. \quad (6)$$

Поскольку групповая скорость определяется как $c_g = \partial\omega/\partial k_1$, то

$$\frac{1}{c_g} = \frac{\partial k_1}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{c} \right) = \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial c}{\partial \omega} \approx \frac{1}{c} - \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{2c^2}{\pi\omega^2} \alpha(\omega) \right). \quad \text{Это позволяет выразить}$$

поглощение через значения фазовой и групповой скоростей:

$$\alpha(\omega) = \frac{\pi\omega}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_g} \right) = \frac{\pi^2}{\lambda} \left(1 - \frac{c}{c_g} \right), \quad (7)$$

где λ – длина волны в среде.

Из (1) следует, что в случае противоположных по направлению фазовой и групповой скоростей поглощение чрезвычайно велико. Например, при $c = -c_g$ на расстоянии, равном длине волны, происходит уменьшение амплитуды в $\exp(2\pi^2) \approx 7 \times 10^8$ раз, т.е. волна практически не распространяется.

Слабое поглощение реализуется при $c \approx c_g$. При рассмотрении отрицательной среды это означает отрицательность как фазовой, так и групповой скорости при одновременно

положительном направлении вектора Умова-Пойнтинга. Фактически, возникает ситуация, аналогичная рассмотренной в случае отсутствия дисперсии и противоречащая принципу причинности.

Проведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что волновой процесс в отрицательной среде может проходить без существенного поглощения только тогда, когда дисперсия в среде достаточно сильна, например, имеет резонансный характер в интересующей области частот. В этом случае формулы (1), (1) не являются применимыми, и вопрос требует дальнейшего исследования.

ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ С СИЛЬНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

При моделировании процессов в среде с резонансным откликом необходимо в (1) вместо скалярных параметров среды $\rho'(z)$ и $\eta'(z)$ использовать операторы в виде свертки с временной переменной. Чтобы определить возможный вид этих операторов, можно провести следующие рассуждения.

Уравнение, описывающее одномерный резонирующий элемент с резонансной частотой ω_0 и затуханием β , имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t).$$

Преобразование Фурье этого выражения дает связь между спектральными компонентами воздействия и отклика элемента. Переход после этого обратно к временному представлению приводит к соотношению

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \int_0^{\infty} F(t - \tau) \exp(-\beta\tau) \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tau) d\tau \equiv \hat{Q}F. \quad (8)$$

В определенном таким образом операторе \hat{Q} нижним пределом интегрирования является ноль, что выражает принцип причинности: на текущее значение отклика резонирующего элемента влияют значения внешнего воздействия только в предшествующие моменты времени.

При выполнении моделирования операторы, соответствующие включениям плотности и сжимаемости, брались вида (1), с точностью до размерного коэффициента. Собственное затухание в резонаторах полагалось равным нулю: $\beta = 0$. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\begin{pmatrix} v(z,t) \\ p(z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0(z,t) \\ p_0(z,t) \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \int \int dz' dt' \delta\left(\frac{|z-z'|}{c} - (t-t')\right) \times \\ \times \begin{pmatrix} \sqrt{\eta_0/\rho_0} & \operatorname{sgn}(z-z') \\ \operatorname{sgn}(z-z') & \sqrt{\rho_0/\eta_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}(z') & 0 \\ 0 & \tilde{\eta}(z') \end{pmatrix} \omega_0 \int_0^\infty d\tau \sin(\omega_0 \tau) \frac{\partial}{\partial(t'-\tau)} \begin{pmatrix} v(z',t'-\tau) \\ p(z',t'-\tau) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $\tilde{\rho}(z')$ и $\tilde{\eta}(z')$ – размерные параметры, характеризующие наличие или отсутствие резонансной среды. При моделировании они полагались равными $\tilde{\rho}(z') = \rho_0$ и $\tilde{\eta}(z') = \eta_0$ в тех точках, где присутствовала резонансная среда, и равными нулю в фоновой области. Множитель ω_0 перед интегралом по τ в (1)) введен для соблюдения размерности.

Моделировалась ситуация, при которой на слой такой резонансной среды по нормали, т.е. вдоль оси Z , падал волновой пакет $\tilde{u}_0(z,t) = \tilde{u}_0 \exp[\omega(t - z/c_0)] \exp[-(t - z/c_0)^2 / 2T^2]$, имеющий огибающую гауссовой формы длительностью T и заполненный колебанием с частотой ω . В зависимости от соотношения между частотой набивки ω и частотой ω_0 собственного резонанса среды наблюдались различные ситуации (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.) . На рисунке котангенс угла наклона к оси Z белой стрелки, направленной вдоль черных и белых полос, соответствует значению фазовой скорости звука в среде. Скорость может быть как положительной (наклон стрелки вправо на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.а , 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б), так и отрицательной (наклон влево рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы

пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б). Вся область рисунка, охваченная черными и белыми полосами, соответствует огибающей импульса. Поэтому котангенс угла наклона черной стрелки, направленной вдоль границы этой области, дает групповую скорость. Групповая скорость оказывается во всех случаях (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.а, 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б), 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б), 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.г) положительной.

В "высокочастотной" области (она соответствует примерно $\omega > 2\omega_0$) слой ведет себя как положительная среда: на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.а изображен случай $\omega = 2.22\omega_0$. Как фазовая, так и групповая скорости при этом положительны.

В примерном диапазоне частот $\omega_0 < \omega < 2\omega_0$ фазовая скорость становится отрицательной; при этом групповая скорость по-прежнему положительна. На частоте $\omega = 1.67\omega_0$ (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б) фазовая скорость волны в слое оказывается близкой по модулю и противоположной по направлению к фазовой скорости

звука в положительной среде. Амплитуда импульса после прохождения через слой несколько уменьшается. Наличие такого поглощения вполне позволяет рассматривать волновые процессы в подобных средах. Таким образом, реализуется случай, близкий к случаю широко обсуждаемого идеального согласования фоновой среды с отрицательной средой. Результат моделирования прохождения импульса гауссовой формы через такой слой, не обладающий дисперсией, обсуждался ранее и изображен на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.. Следует отметить, что в резонирующей среде не возникает опережающий пакет на выходе слоя, и нарушения принципа причинности не происходит.

Протекание волнового процесса в рассматриваемой резонирующей среде на частотах, соответствующих отрицательной фазовой скорости (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.б), происходит следующим образом. При падении на границу слоя волнового пакета резонирующая среда постепенно начинает "раскачиваться". При этом в ней запасается некоторая энергия. Граница "раскачанного" участка среды перемещается с групповой скоростью вправо. Амплитуда поля на этой границе обращается в ноль, а впереди нее никакого дополнительного возмущения не возникает. При этом внутри "раскачанного" участка ситуация аналогична наблюдаемой на рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.. А именно, фронт волны зарождается на границе участка "раскачанной" среды и движется влево с отрицательной фазовой скоростью. На передней границе слоя он взаимодействует с фронтом падающей волны, и они взаимно гасят друг друга. Если длительность импульса T достаточно велика, то слой работает в "установившемся" режиме. При этом среда может демонстрировать все свойства отрицательной среды, широко описанные в литературе (например, [Блюх К.Ю., Блюх Ю.П. // УФН. 2004. Т. 174. № 4. С. 439]): возможно отрицательное преломление, линза с повышенной разрешающей способностью и т.д.

В области частот $\omega \approx \omega_0$ затухание резко возрастает, и волна в слое не распространяется (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.в). Согласно соотношениям Крамерса-Кронига, наличие дисперсии должно обязательно сопровождаться поглощением. Важно, что в резонансной среде область частот, соответствующая сильному поглощению, может не совпадать с областью, где среда ведет себя как отрицательная.

При дальнейшем понижении частоты, в области $\omega < 0.5\omega_0$, среда снова ведет себя как положительная (рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.г). Поглощение невелико. Особенность этого случая в том, что фазовая и групповая скорости малы, и слой может выступать в роли акустической линии задержки.

Таким образом, показано, что недиспергирующая отрицательная среда противоречит принципу причинности, и поэтому не может существовать. Отрицательная нерезонансная среда обладает весьма значительным поглощением. Единственная оставшаяся возможность – отрицательная среда, обладающая резонансным откликом. Проведенное моделирование показывает, что в такой среде частотная область сильного поглощения может не совпадать с областью проявления отрицательных свойств, и поэтому такая среда в принципе может быть реализована.

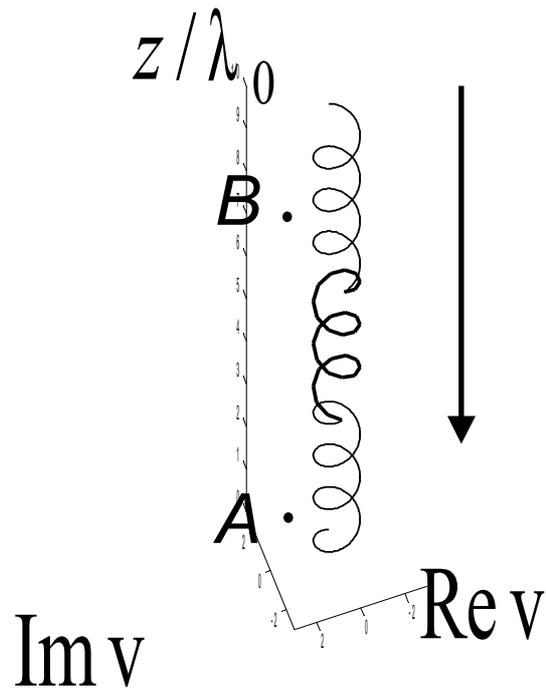


Рис. 1. Результат расчета полного поля колебательной скорости V в слое, содержащем включение отрицательной среды. Пунктирные линии соответствуют области включения; стрелкой обозначено направление распространения падающей волны.

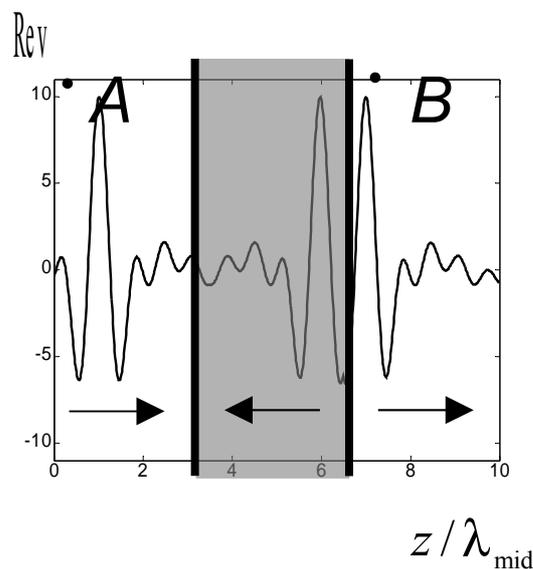


Рис. 2. Действительная часть рассчитанного поля колебательной скорости $v(z, t)$ в фиксированный момент времени при падении на пластину из отрицательного вещества импульсов, являющихся суперпозицией 11 плоских монохроматических волн. Границы пластины обозначены черными вертикальными линиями. Стрелками показаны направления распространения импульсов в пластине и в фоновой среде.

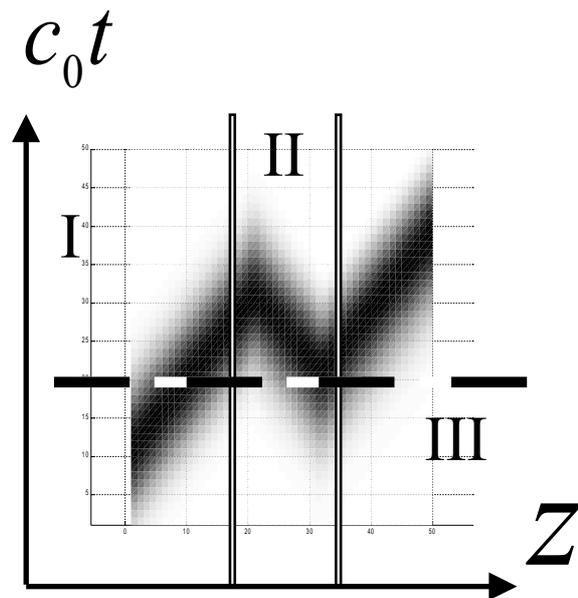


Рис. 3. Действительная часть промоделированного поля акустического давления, соответствующего падению по нормали к пластине из отрицательного вещества волнового пакета, имеющего гауссову форму. Горизонтальной пунктирной линией обозначен момент времени, когда центр пакета находится на расстоянии от пластины, равном ее толщине; при этом на задней стороне пластины появляется возмущение поля. Координаты границ пластины обозначены двойными вертикальными линиями.

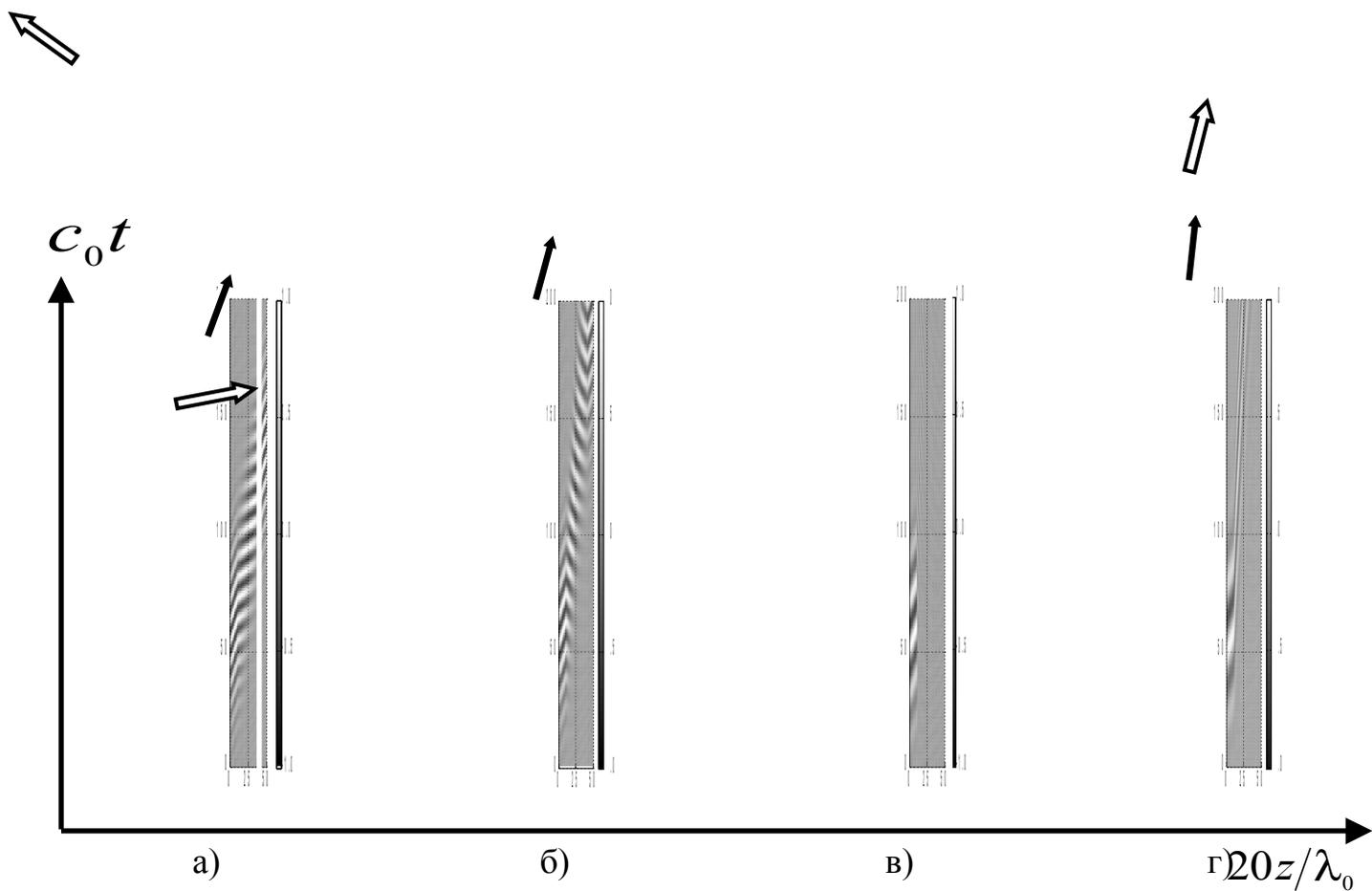


Рис. 4. Результат расчета полного поля колебательной скорости V в системе, содержащей слой из резонансной среды (границы слоя отмечены тонкими белыми линиями). По горизонтальной оси отложена пространственная координата, по вертикальной – величина, пропорциональная времени. Импульс, имеющий огибающую гауссовой формы, распространяется по нормали к слою. Частота модуляции составляет $\omega = 2.22\omega_0$ (а), $\omega = 1.67\omega_0$ (б), $\omega = \omega_0$ (в), $\omega = 0.67\omega_0$ (г). Угол наклона белой стрелки соответствует фазовой скорости волны в слое, угол наклона черной стрелки – групповой скорости; $\lambda_0 = 2\pi c_0 / \omega_0$ – длина волны в фоновой среде на частоте ω_0 резонанса вещества слоя.

(II) В отчетный период проводились исследования по ВОССТАНОВЛЕНИЮ КАРТИНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ второго и третьего порядков в биологических тканях [**работа 3 в списке публикаций**]. Дело в том, что акустическая томография является эффективным методом медицинской диагностики. Отдельной диагностической ценностью обладают нелинейные параметры биологических тканей, поскольку относительное изменение нелинейных параметров для патологически больной и здоровой ткани значительно превышает относительное изменение линейных характеристик тех же тканей.

Большинство существующих на сегодняшний день томографических систем, позволяющих восстановить распределение нелинейного параметра второго порядка, основаны на методе конечной амплитуды, который заключается в оценке нелинейного параметра по амплитуде сигнала второй или более высокой гармоники акустической волны, распространяющейся в исследуемом образце [*Zhang D., Chen X., Gong X. Acoustic nonlinearity parameter tomography for biological tissues via parametric array from a circular piston source. Theoretical analysis and computer simulations // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V.109. N3. P.1219-1225*]. Однако данный метод требует проведения целой серии экспериментов с различной ориентацией приемно-излучающей системы и объекта для восстановления полной картины образца. Неколлинеарное взаимодействие двух акустических волн позволяет, применяя сложную кодировку сигналов, восстановить ограниченную область пространственного спектра нелинейного параметра в результате всего одного эксперимента. Однако в силу закона сохранения импульса этот метод не обеспечивает возможности восстановить пространственный спектр нелинейного параметра вблизи нулевого значения пространственной частоты. В свою очередь, данное обстоятельство не позволяет восстановить абсолютные значения нелинейного параметра второго порядка.

В настоящем отчете представлена разработанная томографическая система, основанная на эффекте нелинейного взаимодействия трех первичных неколлинеарных акустических волн. Присутствие во взаимодействии третьей волны снимает ограничения, накладываемые законом сохранения импульса, что позволяет восстановить двумерное распределение абсолютных значений нелинейных акустических параметров в результате всего нескольких измерений (в пределе – одного) [*Буров В.А., Шмелев А.А. Численное и физическое моделирование процесса томографирования на основе акустических нелинейных эффектов третьего порядка // Акуст. журн. 2009. Т.55. №4–5. С.466–480*]. В качестве зондирующих (т.е. первичных) волн используются широкополосные сигналы, закодированные по известному закону. Результатом их *неколлинеарного* взаимодействия является возникновение рассеянных сигналов на комбинационных суммарно-разностных частотах, причем

амплитуда этих рассеянных сигналов зависит от значений нелинейных параметров среды в точке взаимодействия.

Результаты численного моделирования процесса томографии, представленные на рис.1 НЕЛИНЕЙНОСТЬ, наглядно показывают возможность восстановления абсолютных значений заданного распределения нелинейного параметра сложного исследуемого объекта. На рис.2 НЕЛИНЕЙНОСТЬ представлен результат восстановления поперечного сечения четырех пальцев (всех кроме большого) руки человека, сложенных вместе. Реалистичные формы и размеры восстановленного объекта свидетельствует о возможности использования эффектов третьего порядка в целях медицинской томографии.

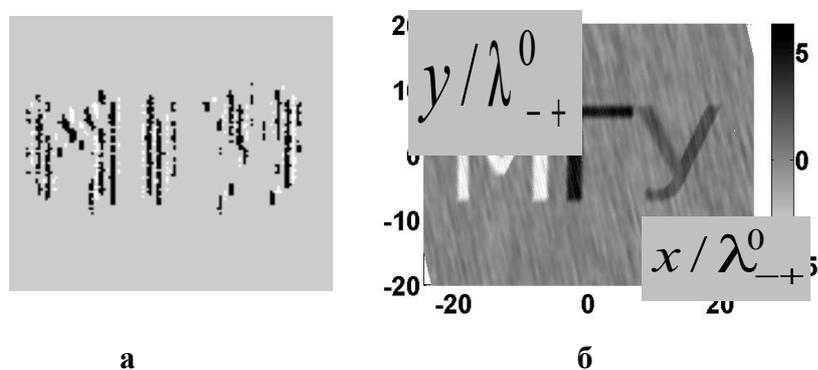


Рис. 1 НЕЛИНЕЙНОСТЬ. Результат восстановления распределения нелинейного параметра за счет нелинейных эффектов второго (а) и третьего (б) порядков.

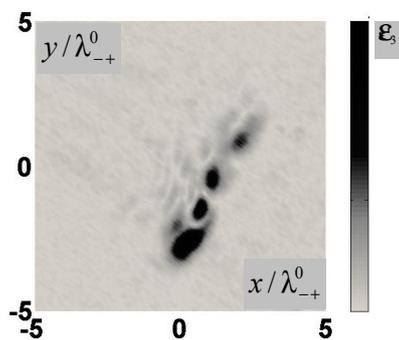


Рис. 2 НЕЛИНЕЙНОСТЬ. Результат восстановления сечения четырех пальцев человека.

(III) Продолжались теоретические и компьютерные исследования в области **АКУСТИЧЕСКОЙ ТОМОГРАФИИ ОКЕАНА [работа 4 в списке публикаций]**. Акустическая томография позволяет восстановить внутреннюю структуру обширных (порядка сотен и тысяч километров) регионов океана на основе характеристик акустических сигналов, прошедших через рассматриваемую область. С математической точки зрения задача акустической томографии океана может быть рассмотрена как частный случай многоканальных обратных задач рассеяния [Novikov R.G., Santacesaria M. Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems. – E-print arXiv: 1105.1086.], где многоканальность определяется неадиабатичностью распространения акустических мод в океаническом волноводе.

Методы томографии океана первоначально разрабатывались для глубокого океана (глубина – несколько километров), то есть такого океана, в котором волноводные свойства обеспечиваются, преимущественно, зависимостью скорости звука от глубины. В настоящее же время основные гидроакустические исследования сосредоточены на шельфе, т.е. в условиях мелкого моря (глубина – несколько сот метров), где эффекты, вносимые океаническим дном, способны существенно изменить картину распространения акустического поля и требуют своего учета, а многоканальность является определяющим фактором. По этой причине методы, разработанные для глубокого океана, не допускают непосредственного переноса на мелкое море, что требует развития новых подходов.

Ранее [Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Трехмерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при неизвестном расположении антенн // Акустич. журнал. 2011. Т.57, №2. С. 348-363] была разработана схема акустической томографии, позволяющая восстановить основные объекты мониторинга океана – рефракционные неоднородности (отклонения глубинного профиля скорости звука от, например, среднесезонных значений) и течения (глобальные течения типа Гольфстрима и локальные синоптические вихри, аналогичные атмосферным вихрям) – в едином подходе с помощью полосчатого базиса. В горизонтальной плоскости полосчатый базис представляет собой набор параллельных полос, равномерно покрывающих рассматриваемую область и поворачиваемых под разными углами. В каждой из таких полос поочередно задаются базисные функции, например, функции Карунэна-Лоэва [Буров В.А., Сергеев С.Н., Шуруп А.С. Трехмерная модель томографического восстановления океанических неоднородностей при неизвестном расположении антенн. Акустич. журнал. 2011. Т.57, №2. С. 348-363], описывающие глубинное поведение восстанавливаемых характеристик среды.

За отчетный период проиллюстрирована возможность восстановления параметров дна мелкого моря – его импедансных параметров и рельефа – методами акустической томографии океана с применением полосчатого базиса. Показано, что при использовании в

качестве источника зондирования модовых сигналов можно разделить влияние рассматриваемых параметров дна на распространяющееся поле благодаря различному характеру их влияния на дисперсионные характеристики мод, что может быть использовано в томографических схемах (рис. 1 ОКЕАН). Использование полученных результатов позволяет предложить схему томографирования неоднородностей океана в едином подходе, который обеспечивается разложением всех параметров (рефракционных неоднородностей, планарных течений, вихрей и геоакустических параметров дна) по полосчатому базису.

Важным шагом дальнейших исследований является учет неадиабатического распространения звука, что может быть сделано, например, функционально-аналитическими методами решения многоканальных задач рассеяния [Novikov R.G., Santacesaria M. Monochromatic reconstruction algorithms for two-dimensional multi-channel inverse problems. – E-print arXiv: 1105.1086.].

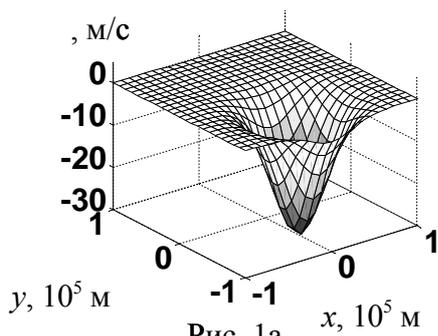


Рис. 1а

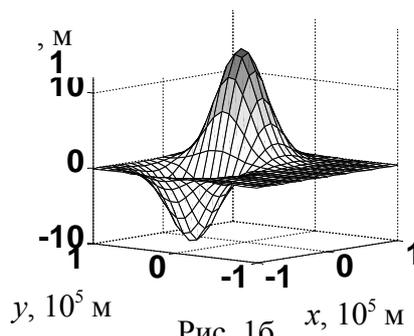


Рис. 1б

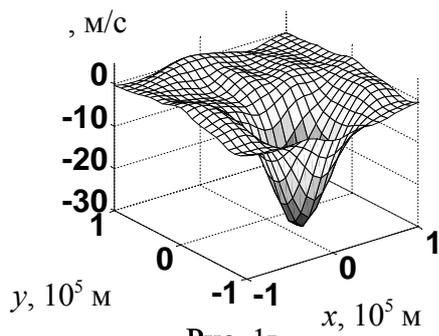


Рис. 1в

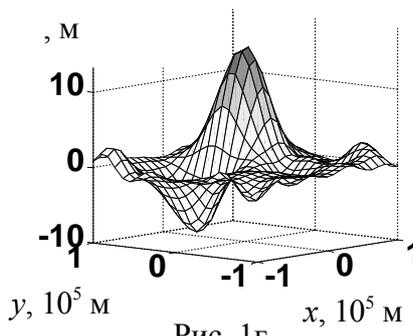


Рис. 1г

Рис. 1 ОКЕАН. Модельное распределение по акватории параметров неоднородностей скорости звука Δc_d (а) и рельефа ΔH (б) в дне; результаты их совместного восстановления $\Delta \hat{c}_d$ (в) и $\Delta \hat{H}$ (г) при использовании 3 низших мод на частотах 25 Гц, 50 Гц и 75 Гц.

(IV) ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО ТЕРМОТОМОГРАФИРОВАНИЯ [работа 5 в списке публикаций].

Тепловые флуктуационные явления в средах, поглощающих акустические волны, сопровождаются собственным тепловым излучением, которое оказывается возможным использовать для контроля за температурой биологической ткани [Аносов А.А., Гаврилов Л.Р. Восстановление распределения глубинной температуры биообъектов с помощью линейных фазированных решеток. – Акуст. журн. – 2005. – Т. 51. № 4. С. 447–455]. На пути практической реализации термотомографии стоит основная трудность – слабость сигнала и принципиально очень малое входное отношение сигнал/помеха. Для преодоления этой проблемы используются аддитивные (использующие фокусировку [Вилков В.А., Кротов Е.В., Мансфельд А.Д., Рейман А.М. Применение фокусируемых антенн для задач акустостеростной термометрии – Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 1. С. 81–89]) и корреляционные методы. Показано, что специально разрабатываемые принципы активно-пассивного режима термотомографирования потенциально позволяют отдельно восстанавливать в каждой точке полный набор температурных и акустических характеристик объекта: собственную температуру объекта, температуру фонового излучения, коэффициент поглощения и скорость звука. Однако получаемая из эксперимента информация связана или с акустостеростной температурой, которая зависит от произведения коэффициента поглощения и температуры объекта, или с произведением функции, характеризующей неоднородность скорости по сравнению с ее фоновым значением, на коэффициент проникновения излучения в точку. По этой причине задача разделения перечисленных характеристик весьма не простая. Ситуация еще больше осложняется из-за рассеяния и поглощения акустических полей, приводя к тому, что распределение фоновой температуры будет неоднородным и анизотропным. Как следствие, оценка и разделение характеристик объекта нуждается в предварительной оценке заранее неизвестных неоднородных распределений поглощения и скорости звука.

При разработке корреляционной фокусированной схемы [Буров В.А., Дмитриев К.В., Евтухов С.Н. Активно-пассивные термотомографические системы с фокусировкой акустических полей – Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2009. Т. 73. № 4. С. 551–557] необходимо обеспечить возможность снижения разрешающей способности для улучшения температурной чувствительности. Наибольший интерес представляют рефлекторные корреляционные системы, обладающие минимальными потерями и позволяющие сократить число координат, по которым ведется механическое сканирование. Для таких схем показано, что, хотя входное отношение сигнал/помеха с ростом размеров томографируемого объекта ухудшается, полезный сигнал всегда можно выделить, увеличив время накопления.

В предлагаемой схеме (рис. 1 ТЕРМО) температурная чувствительность растет пропорционально увеличению размера элемента разрешения. Оценки показывают возможность получения разрешающей способности в 1-2 К. Для отдельного восстановления температурных и акустических характеристик объекта необходимо создание дополнительной анизотропной подсветки – дополнительного шумового поля с заданными свойствами. Это поле обязано проходить через выделенный элемент разрешения, попадать на выбранный (“подсвеченный”) приемник, но при этом не попадать на другой (“неподсвеченный”) приемник данной пары. Из-за рассеяния поля подсветки на неоднородном фоне, создание желаемой подсветки в полной кольцевой схеме чрезвычайно сложно для пар приемников, расположенных друг от друга на расстоянии около половины длины волны. В предлагаемой же схеме с фокусировкой подсветка осуществляется парой дополнительных зеркал и соответствующих им решеток излучающих преобразователей, хотя и здесь возникают технические сложности.

Таким образом, за отчетный период проведена разработка и численное моделирование прототипа термотомографической системы, содержащей фокусирующие звуковые зеркала для приема сигнала термоакустической эмиссии и создания анизотропной акустической “подсветки”. Изготовлены зеркала и приемные элементы с согласующим слоем.

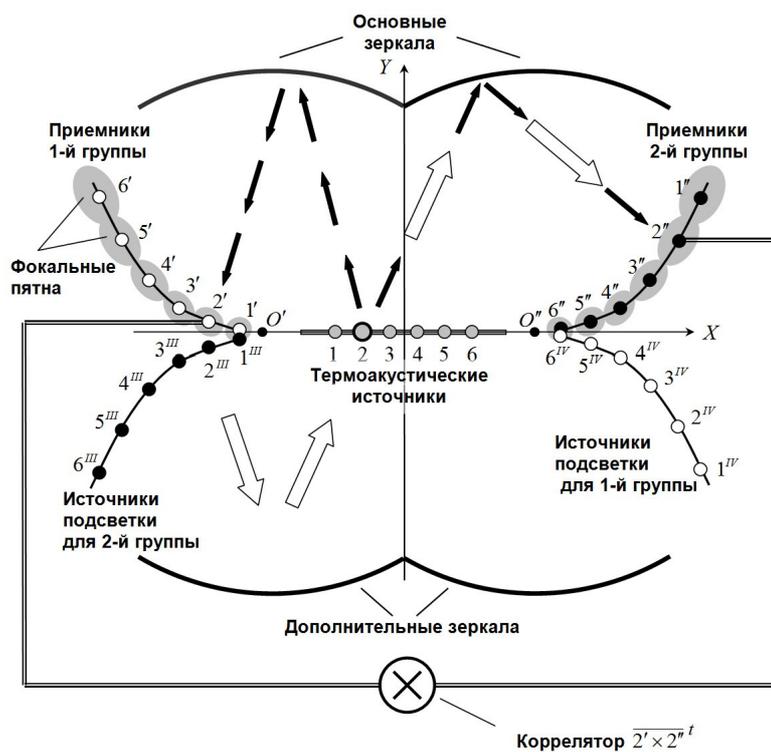
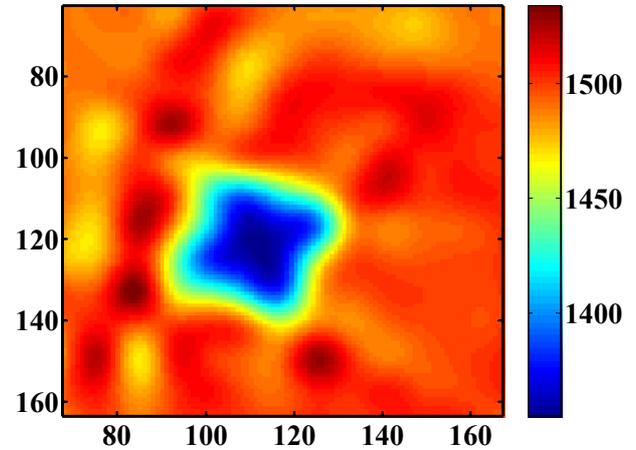
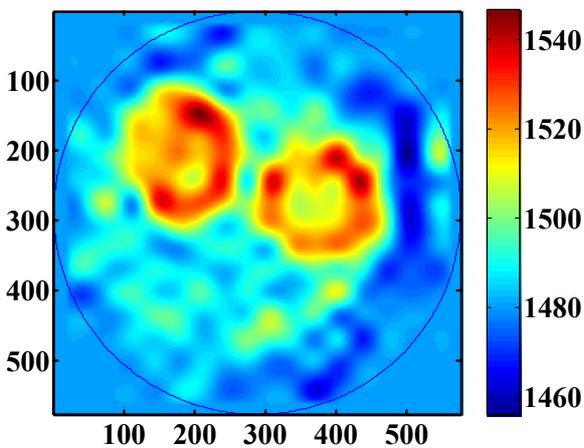
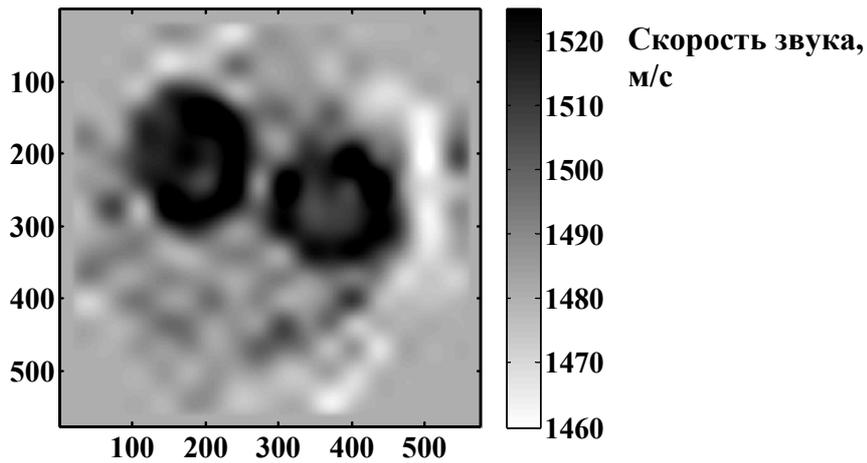


Рис. 1 ТЕРМО. Схема корреляционных термоакустических измерений и реализация анизотропной подсветки в системе с фокусирующими зеркалами.

(V) Проводится разработка **УЛЬТРАЗВУКОВОГО МЕДИЦИНСКОГО ТОМОГРАФА** - линейного томографа, в котором учитываются эффекты многократного рассеяния акустических волн на неоднородностях фазовой скорости звука и поглощения. Получены первые изображения исследуемых объектов - их крупномасштабной составляющей и тонкой структуры. Сигналы от объектов были сняты в реальных экспериментах с фантомами, близкими по своим свойствам к биологическим мягким тканям. Проведенные эксперименты позволили выявить имеющиеся недостатки преобразователей приемоизлучающей антенны, используемой в настоящее время. Устранение недостатков (в первую очередь, это касается необходимости обеспечения высокой степени идентичности всех преобразователей) является принципиальным моментом как для получения изображений с высокой разрешающей способностью (не хуже 0.5 мм при работе в мегагерцовом диапазоне частот), так и для возможности получения правильных численных значений, характеризующих различные участки органа. На основе таких значений врач-диагност должен делать заключение об отсутствии или присутствии патологии, а также о типе патологии. С другой стороны, для радикального ускорения процесса вычислений (обработки экспериментальных данных и получения итоговых изображений) в томографическое устройство были введены программы, использующие многопроцессорные вычислительные платы CUDA, позволяющие ускорить процесс вычислений в сотни раз.



Цветной аналог верхней картинки

(a)

(б)

Рис. 1. Двумерная томограмма скорости звука, полученная с грубым разрешением на первом шаге. В качестве имитатора биологической ткани взяты два вареных яйца, правое из которых располагалось вертикально к плоскости томографирования, а левое – горизонтально (a) и взят кубик из пластисола (б). Один пространственный отсчет равен 0.25 мм.

Список публикаций

1. В.А. Буров, В.Б. Волошинов, К.В. Дмитриев, Н.В. Поликарпова. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // Успехи физических наук. 2011. Т.181. №11. С.1205-1211.
2. В.А. Буров, К.В. Дмитриев, С.Н. Сергеев. Принцип причинности в акустических дважды отрицательных средах // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2011. Т.75. №12. С.1750–1755.
3. В.А. Буров, А.А. Шмелев, Р.В. Крюков, О.Д. Румянцева. Томография на основе нелинейных акустических эффектов третьего порядка // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика. Т.1. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2011. С.23-25.
4. В.А. Буров, А.В. Прудникова, С.Н. Сергеев, А.С. Шуруп. Применение методов акустической томографии океана для оценки характеристик дна мелкого моря // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика. Т.1. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2011. С.20-21.
5. В.А. Буров, К.В. Дмитриев, С.В. Логинов, О.Д. Румянцева. Перспективы акустической термотомографии // Труды 54-й научной конференции МФТИ. Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе. Управление и прикладная математика. Т.1. Москва-Долгопрудный: МФТИ, 2011. С.17-19.

Заключение

Резюмируя, мы можем с полным основанием сказать, что намеченные на 2011 год исследования выполнены в полном объеме, а полученные результаты являются новыми и важными, находятся на мировом уровне и послужат хорошей базой для продолжения работ в последующие годы.

Список приложений

1. Список публикаций сотрудников лаборатории по теме гранта в 2011 г.
2. Отчет о конференциях, организованных и проведенных лабораторией в 2011 г.