Московский государственный университет им. М.В.Ломономова
Механико-математический факультет

УДК 517.9, 515.16, 53.51

Годовой отчет ведущего ученого по договору № 11.G34.31.0005 “Геометрические методы в математической физике” за 2010 год

Руководитель проекта:
профессор Борис Анатольевич ДУБРОВИН

Москва — 2010

Реферат

Отчет состоит из 43 страниц в одной книге, снабжен 2 таблицами и 4 рисунками.

Ключевые слова: гамильтоновы уравнения в частных производных, интегрируемая иерархия, тэта-функция, разложение Уизема.

В 2010 году научные исследования, проводимые в рамках утвержденного Плана работ, были сконцентрированы на решении следующих основных задач:

1. Анализ современного состояния направления исследования.

2. Применение теории интегрируемых иерархий к проблеме высших поправок в нелинейных квазиклассических разложениях типа Уизема.

3. Разработка компьютерных программ для вычисления и визуализации модулированных тэта–функций.

Основные достигнутые результаты заключаются в следующем:

1. Был проведен анализ современного состояния направления исследования, в результате чего были сформулированы цели исследования, ориентированного на решение следующих проблем:
- классификация общих гамильтоновых систем;
- применение к теории интегрируемых систем;
- выработка новых подходов к изучению свойств решений.

2. Была решена задача применения теории интегрируемых иерархий к проблеме высших поправок в нелинейных квазиклассических разложениях типа Уизема.

3. Была создана математически обоснованная компьютерная программа для вычисления и визуализации модулированных тэта–функций.

4. Был получен ряд вспомогательных результатов, которые планируется использовать в дальнейшем.

5. Кроме того, была проведена Школа по геометрическим методам математической физики для студентов и аспирантов, которая является существенным продвижением в решении одной из важнейших заявленных задач проекта — привлечение молодых исследователей к данной актуальной тематике и повышению их квалификации в данной области.

Кроме руководителя проекта, в работе приняли участие следующие специалисты:

ф.и.о.	разделы
Троицкий Евгений Вадимович	4.3
Мануйлов Владимир Маркович	4.2
Дынников Иван Алексеевич	5.2
Миллионщиков Дмитрий Владимирович	4.1
Алания Леван Анзорович	1
Пенской Алексей Викторович	1
Гайфуллин Александр Александрович	5.3
Смирнов Сергей Валерьевич	1
Бурангулов Павел Александрович	3
Скрипченко Александра Сергеевна	3
Разумовский Роман Валентинович	3
Прасолов Максим Вячеславович	3
Лучников Никита Дмитриевич	3
Кисловская Анна Дмитриевна	3
Миронов Андрей Евгеньевич	2

Содержание

1 Введение: анализ современного состояния направления исследования

В самое последнее время был достигнут значительный прогресс в теории нелинейных гамильтоновых систем уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x, зависящих от малого параметра ϵ, которые могут быть записаны в виде

$$u_t^i = A_j^i(u)u_x^j + \epsilon\left(B_j^i(u)u_{xx}^j + \frac{1}{2}C_{jk}^i(u)u_x^j u_x^k\right) + O(\epsilon^2), \quad i = 1, \ldots, n.$$

где $u = (u^1, \ldots, u^n)$ – вектор зависимых переменных. В частности, была решена задача описания пространства инфинитезимальных деформаций бигамильтоновых структур гидродинамического типа, выделен важный для приложений подкласс интегрируемых иерархий топологического типа, и установлена связь этого подкласса с теорией фробениусовых многообразий, созданной Б.Дубровиным. Был разработан метод изучения свойств решений таких уравнений, основанный на идее универсальности критического поведения в окрестности точек фазового перехода от регулярного поведения к осцилляторному. С учетом вышеизложенного были сформулированы цели исследования, ориентированного на решение следующих проблем:

- классификация общих гамильтоновых систем;
- применение к теории интегрируемых систем;
- выработка новых подходов к изучению свойств решений.

2 Применение теории интегрируемых иерархий к проблеме высших поправок в нелинейных квазиклассических разложениях типа Уизема

Для данного n-мерного многообразия M^n обозначим через

$$\mathcal{L}(M^n) = \{S^1 \to M^n\}$$

пространство петель со значениями в M^n. Основным объектом нашего исследования являются гамильтоновы векторные поля, зависящие от малого параметра ϵ. Для краткости обозначений мы их будем называть векторными полями на расширенном пространстве петель $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{R}[[\epsilon]]$. Более точно, будут изучаться эволюционные системы уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x зависящие от параметра ϵ записываемые в виде

$$u_t^i = A_j^i(u) u_x^j + \epsilon \left(B_j^i(u) u_{xx}^j + \frac{1}{2} C_{jk}^i(u) u_x^j u_x^k \right) + O(\epsilon^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь $u = (u^1, \dots, u^n)$ - локальные координаты на M^n. Топология этого многообразия будет предполагаться тривиальной (n-мерный шар), хотя мы и будем делать нелинейные замены координат в этом шаре.

В разложении правых частей системы (1)предполагается, что члены порядка ϵ^k являются полиномами по производным u_x, ..., $u^{(k+1)}$ степени $k+1$, где, по определению,

$$\deg u^{(m)} = m, \quad m = 1,\, 2, \dots$$

Будет предполагаться, что система (1) является гамильтоновой по отношению к *локальным скобкам Пуассона*

$$u_t^i = \{u^i(x), H\} = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A_{k,m}^{ij} \left(u; u_x, \dots, u^{(m)}\right) \, \partial_x^{k-m+1} \frac{\delta H}{\delta u^j(x)} \quad (2)$$

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A_{k,m}^{ij} \left(u(x); u_x(x), \dots, u^{(m)}(x)\right) \, \delta^{(k-m+1)}(x-y)$$

$$\deg A_{k,m}^{ij} \left(u; u_x, \dots, u^{(m)}\right) = m \quad (3)$$

с *локальным гамильтонианом*

$$H = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \int h_k \left(u; u_x, \dots, u^{(k)}\right) \, dx$$

$$\deg h_k \left(u; u_x, \dots, u^{(k)}\right) = k. \quad (4)$$

В формуле (3) $\delta(x)$ - это дельта-функция Дирака. Смысл этих обозначений ясен из явного выражения (2). Интеграл в (4) понимается в смысле формального вариационного исчисления. Другими словами, интеграл дифференциального полинома $h = h(u; u_x, \dots, u^{(m)})$ определяется как класс эквивалентности этого полинома по модулю полных производных:

$$h(u; u_x, \dots, u^{(m)}) \sim h(u; u_x, \dots, u^{(m)}) + \partial_x \left(f(u; u_x, \dots, u^{(m-1)} \right)$$

$$\partial_x = \sum_{k \geq 0} u^{i(k+1)} \frac{\partial}{\partial u^{i(k)}}, \quad \text{где} \quad u^{i(k)} := \frac{d^k u^i}{dx^k}.$$

Далее, $\delta H / \delta u^j(x)$ - это оператор Эйлера–Лагранжа,

$$\frac{\delta H}{\delta u^j(x)} = \frac{\partial h}{\partial u^j} - \partial_x \frac{\partial h}{\partial u^j_x} + \partial_x^2 \frac{\partial h}{\partial u^j_{xx}} - \dots \quad \text{для} \quad H = \int h \, dx.$$

Коэффициенты скобок Пуассона и плотностей гамильтониана предполагаются полиномиальными в каждом порядке по ϵ. Антисимметрия и тождество Якоби должны выполняться как соотношения для формальных степенных рядов по ϵ. Скобка (3) задает структуру алгебры Ли $\mathcal{G}_{\mathrm{loc}}$ на пространстве всех локальных функционалов

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} A^{ij} \frac{\delta G}{\delta u^j(x)} \, dx \tag{5}$$

$$A^{ij} := \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A^{ij}_{k,m} \left(u; u_x, \dots, u^{(m)} \right) \, \partial_x^{k-m+1}$$

$$F = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \int f_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) \, dx, \quad G = \sum_{l \geq 0} \epsilon^l \int g_l(u; u_x, \dots, u^{(l)}) \, dx$$

$$\deg f_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) = k, \qquad \deg g_l(u; u_x, \dots, u^{(l)}) = l.$$

Полное кольцо функций на бесконечномерном “многообразии” $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]$ строится как подходящим образом пополненная симметрическая тензорная алгебра над $\mathcal{G}_{\mathrm{loc}}$.

Предыдущие формулы определяют класс функций, векторных полей и скобок Пуассона на бесконечномерном “многообразии” $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]$. Чтобы развивать геометрический подход к изучению этих объектов следует ввести класс допустимых “замен координат” на этом “многообразии”. Таковые замены вводятся через так называемые *обобщенные пре-*

образования Миуры

$$u^i \mapsto \tilde u^i = \sum_{k\geq 0} \epsilon^k F^i_k\left(u; u_x, \dots, u^{(k)}\right) \tag{6}$$

$$\deg F^i_k\left(u; u_x, \dots, u^{(k)}\right) = k$$

$$\det\left(\frac{\partial F^i_0(u)}{\partial u^j}\right) \neq 0.$$

Коэффициенты $F^i_k\left(u; u_x, \dots, u^{(k)}\right)$ должны быть дифференциальными полиномами. Легко видеть, что преобразования вида (6) образуют группу. В самом деле, для того, чтобы обратить преобразование (6) нужно решить дифференциальное уравнение для $u^1, \dots, u^n$. Необходимое решение получается в виде ВКБ разложения по малому параметру. Несложное вычисление показывает, что класс эволюционных уравнений в частных производных (1), скобок Пуассона (3), а также класс локальных гамильтонианов (4) инвариантен по отношению к группе обобщенных преобразований Миуры.

Мы скажем, что два объекта нашей теории (т.е., две эволюционных системы вида (1), две локальные скобки Пуассона (3), или же два локальных гамильтониана (4)) *эквивалентны*, если один из них получается из другого посредством обобщенного преобразования Миуры.

Основными задачами нашего исследования являются
- проблема классификации общих гамильтоновых систем
- применение к изучению интегрируемых систем
- выработка новых подходов к изучению свойств решений.

Начнем с классификации скобок Пуассона.

Теорема 1 *В предположении*

$$\det\left(A^{ij}_{0,0}(u)\right) \neq 0 \tag{7}$$

любая скобка вида (3) *эквивалентна скобке следующего стандартного вида*

$$\left\{\tilde u^i(x), \tilde u^j(y)\right\} = \eta^{ij}\,\delta'(x-y), \quad \eta^{ij} = \eta^{ji} = \mathrm{const}, \quad \det\left(\eta^{ij}\right) \neq 0. \tag{8}$$

В доказательстве этой теоремы используется теория скобок Пуассона гидродинамического типа, развитая С.П.Новиковым и автором в 1983 г. Согласно этой теории главный член скобки Пуассона задает (контравариантную) метрику нулевой кривизны

$$g^{ij}(u) := A^{ij}_{0,0}(u)$$

на многообразии M^n. Также используется тривиальность пуассоновых когомологий скобки (8), доказанная в 2001 г. Э.Гетцлером.

Следующим шагом в реализации нашей программы исследований является классификация *бигамильтовых* структур вида (3), (7). Напомним, что системы

$$u^i_t = \{u^i(x), H_1\}_1 = \{u^i(x), H_2\}_2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

гамильтоновы по отношению к двум *совместным* скобкам Пуассона указанного вида $\{\ ,\ \}_1$ и $\{\ ,\ \}_2$, всегда могут быть включены в максимальную абелеву подалгебру гамильтоновых векторных полей (*интегрируемую иерархию*), что влечет интегрируемость (это можно доказать).

Теорема 2 *При выполнении дополнительных условий сильной невырожденности и полупростоты каждая бигамильтонова структура однозначно определяется:*
1) пучком скобок Пуассона гидродинамического типа

$$\begin{aligned}\{v^i(x), v^j(y)\}_2 - \lambda\, \{v^i(x), v^j(y)\}_1 = \left(g^{ij}_2(v(x)) - \lambda\, g^{ij}_1(v(x))\right) \delta'(x-y) \\ + \left(\Gamma^{ij}_{k\,1}(v) - \lambda\, \Gamma^{ij}_{k\,2}(v)\right) v^k_x\, \delta(x-y).\end{aligned} \tag{9}$$

2) Набором из n функций одной переменной

$$c_1(w^1), \ldots, c_n(w^n)$$

называемых центральными инвариантами.

Доказательство этой теоремы основано на
• теореме *квазитривиальности*: любая бигамильтонова структура делается эквивалентной бездисперсной (9), если расширить класс преобразований (6), допуская преобразования, рационально зависящие от производных.

• вычислениии *бигамильтоновых когомологий*, т.е. деформаций пары антикоммутирующих ацикличных дифференциалов, задаваемых бигамильтоновой структурой.

Центральные инварианты, параметризующие инфинитезимальные деформации, строятся так. Каждой скобке Пуассона (3) сопоставим ряд из матриц, зависящих от вспомогательной переменной p:

$$\pi^{ij}(u;p) = \sum_{k\geq 0} A^{ij}_{k,0}(u)p^k. \tag{10}$$

Напомним, что степень коэффициентов $A^{ij}_{k,0}$ по производным равна нулю, так что они зависят только от u. Паре скобок сопоставим характеристическое уравнение

$$\det\left(\pi_2^{ij}(u;p) - \lambda\,\pi_1^{ij}(u;p)\right) = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим его корни $\lambda^i(u;p)$, ..., $\lambda^n(u;p)$

$$\lambda^i(u;p) = \sum_{k\geq 0}\lambda^i_k(u)p^k, \quad \lambda^i_0(u) = w^i(u), \quad \lambda^i_k(u) = 0 \quad \text{для нечетных} \quad k.$$

Условия полупростоты и сильной невырожденности означают, что главные члены этих разложений $w^1(u)$, ..., $w^n(u)$ попарно различны и не являются константами. Из этого выводится, что эти функции могут быть использованы как локальные координаты на M^n. Положим

$$c_i = \frac{1}{3}\,\frac{\lambda^i_2(u)}{\langle dw^i, dw^i\rangle_1}, \quad i = 1,\dots,n. \tag{12}$$

Оказывается, что каждая из функций c_i зависит только от одной координаты w^i. Более того, две бигамильтоновы структуры с одним и тем же бездисперсным пределом (9) эквивалентны, если и только если они имеют одинаковые центральные инварианты.

Пример 3 *Бигамильтонова структура, задающая иерархию уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)*

$$u_t + u\,u_x + \frac{\epsilon^2}{12}u_{xxx} = 0 \tag{13}$$

имеет вид

$$\{u(x),u(y)\}_2-\lambda\{u(x),u(y)\}_1=(u(x)-\lambda)\,\delta'(x-y)+\frac{1}{2}\,u_x\delta(x-y)+\frac{1}{8}\epsilon^2\delta'''(x-y) \tag{14}$$

Каноническое преобразование

$$u=v-\frac{\epsilon^2}{12}\left(\log v'\right)''+\epsilon^4\left[\frac{v^{IV}}{288v'^2}-\frac{7v''v'''}{480v'^3}+\frac{v''^3}{90v'^4}\right]''+O\left(\epsilon^6\right). \tag{15}$$

рациональное по производным $v'=v_x$, $v''=v_{xx}$ и т.д. превращает бездисперсную бигамильтонову структуру

$$\{v(x),v(y)\}_2-\lambda\{v(x),v(y)\}_1=(v(x)-\lambda)\,\delta'(x-y)+\frac{1}{2}\,v_x\delta(x-y) \tag{16}$$

в (14)*. Здесь $w=u$, единственный центральный инвариант равен константе, $c_1=\frac{1}{24}$.*

Пример 4 *Бигамильтонова структура уравнения Камассы–Холма*

$$u_t-\epsilon^2u_{txx}=\frac{3}{2}u\,u_x-\epsilon^2\left[u_xu_{xx}+\frac{1}{2}u\,u_{xxx}\right] \tag{17}$$

задается формулой

$$\{u(x),u(y)\}_2-\lambda\{u(x),u(y)\}_1=(u(x)-\lambda)\,\delta'(x-y)+\frac{1}{2}u_x\delta(x-y)+\lambda\frac{\epsilon^2}{8}\delta'''(x-y) \tag{18}$$

Бездисперсные пределы для (14) и (18) совпадают. Однако центральный инвариант структуры (18) равен

$$c_1=\frac{1}{24}\,w,\quad w=u.$$

Таким образом, иерархии КдФ и Камассы–Холма не эквивалентны.

Теория центральных инвариантов описывает строение пространства инфинитезимальных деформаций бигамильтоновых структур гидродинамического типа. Остается открытой проблема зануления высших препятствий, т.е. проблема существования бигамильтоновой структуры с данным бездисперсным пределом и данными центральными инвариантами. Мы обратимся теперь к специальному подклассу так называемых *интегрируемых иерархий топологического типа*, связанных с полупростыми фробениусовыми многообразиями.

Фробениусовы многообразия M^n отвечают специальному классу пуассоновских пучков гидродинамического типа. Характеристическим свойством фробениусовых многообразий служит наличие коммутативного и ассоциативного умножения на касательном пучке

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial u^j} = c_{ij}^k(u) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

а также метрики нулевой кривизны, задаваемой в плоских координатах невырожденной постоянной симметрической матрицей

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \eta_{ij}.$$

Требуется наличие локального потенциала $F(u)$ такого, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right\rangle = \frac{\partial^3 F(u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}.$$

Также предполагается наличие плоского единичного векторного поля e, и линейного эйлерова векторного поля E такого, что

$$[e, E] = e, \quad E\,F = (3-d)F + \text{квадратичные члены}.$$

Здесь d — некоторая константа.

Замечательным (и, в известной степени, характеристическим) свойством фробениусовых многообразий является наличие плоского пучка метрик

$$\begin{aligned} (du^i, du^j)_1 &= \eta^{ij} \\ (du^i, du^j)_2 &= \mathrm{i}_E du^i \cdot du^j. \end{aligned} \tag{19}$$

Тем самым на пространстве петель фробениусова многообразия $\mathcal{L}(M^n)$ возникает бигамильтонова структура гидродинамического типа и, значит, интегрируемая иерархия. Мы не будем вдаваться в подробности процедуры построения этой иерархии. Укажем лишь одно из ее уравнений:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^n) \in M^n \simeq T_{\mathbf{u}} M^n \tag{20}$$

В этой формуле фробениусово многообразие локально отождествляется со своим касательным пространством ввиду наличия плоской метрики.

Фробениусовы многообразия обладают и целым рядом других замечательных свойств. Так, полупростые фробениусовы многообразия (т.е., алгебра в касательном пространстве $T_u M^n$ полупроста для точек общего положения $u \in M^n$) описываются через изомонодромные деформации некоторых специальных линейных дифференциальных операторов с рациональными коэффициентами. Примечательной является связь полупростых фробениусовых многообразий с теорией групп, порожденных отражениями. Для наших целей особенно важным является наличие *тау-функций* у интегрируемых иерархий, связанных с фробениусовыми многообразиями. Это свойство служит главной мотивировкой для рассмотрения того специального класса интегрируемых иерархий, к которому мы теперь и переходим.

Основным вопросом здесь является проблема *реконструкции*: для каких фробениусовых многообразий система (20) получается как бездисперсный предел некоторой интегрируемой иерархии на $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{C}[[\epsilon]]$? Если такое интегрируемое ϵ-продолжение существует, то как их перечислить?

Сформулированная выше теорема 2 говорит, что каждая такая иерархия однозначно задается своим бездисперсным пределом и центральными инвариантами. Характеристическим свойством *иерархий топологического типа* служит то, что
• бездисперсная бигамильтонова структура задается пучком плоских метрик (19), ассоциированным с некоторым полупростым фробениусовым многообразием;
• все центральные инварианты постоянны и равны друг другу.

Теорема 5 *Для любого полупростого фробениусова многообразия существует единственная интегрируемая иерархия топологического типа, связанная с этим многообразием, с центральными инвариантами*

$$c_1 = c_1 = \cdots = c_n = \frac{1}{24}.$$

Ключом к доказательству этой теоремы служит инвариантность интегрируемых иерархий топологического типа по отношению к вирасоровским симметриям, действующим линейно на тау-функцию.

$n=1$	$F=\frac{1}{6}v^3$	КдФ
$n=2$	$F=\frac{1}{2}u\,v^2+u^4$	Буссинеск
$n=2$	$F=\frac{1}{2}u\,v^2+e^u$	Тода
$n=2$	$F=\frac{1}{2}u\,v^2+\frac{1}{2}u^2\left(\log u-\frac{3}{2}\right)$	НУШ
$n=2$	$F=\frac{1}{2}u\,v^2-Li_3\left(e^{-u}\right)$	Абловиц–Ладик
$n=3$	$F=\frac{1}{2}(u\,w^2+u^2v)+\frac{1}{6}v^2w^2+\frac{1}{60}w^5$	Иерархия Дринфельда–Соколова типа A_3, теория пересечений на пространствах модулей кривых “спина 3”
$n=3$	$F=\frac{1}{2}(u\,v^2+v\,w^2)-\frac{1}{24}w^4+4w\,e^u$	Обобщенная цепочка Тоды для разностного оператора Лакса бистепени (2,1); орбифолдные инварианты Громова–Виттена для кривой с особой точкой второго порядка
$n=3$	$F=\frac{1}{2}(\tau\,v^2+v\,u^2)-\frac{i\,\pi}{48}u^4E_2(\tau)$	высшие поправки к эллиптическим уиземовским асимптотикам, случай КдФ
$n=4$	$F=\frac{i}{4\pi}\tau\,v^2-2\,u\,v\,w$ $+u^2\log\left[\frac{\pi}{u}\frac{\theta_1'(0\vert\tau)}{\theta_1(2w\vert\tau)}\right]$	высшие поправки к эллиптическим уиземовским асимптотикам, случай НУШ/Тода

Табл. 1. Список примеров фробениусовых многообразий и соответствующих интегрируемых иерархий топологического типа

Рассмотрим подробнее фробениусовы многообразия с потенциалом

$$F(v,w,\tau)=-\frac{i}{4\pi}v^2\tau+\frac{1}{4}v\,w^2+\frac{\pi^2}{96}w^4E_2(\tau)$$

Напомним определение ряда Эйзенштейна:

$$E_2 = 1 - 24\sum_{n\geq 1}\sigma_1(n)q^n$$
$$E_4 = 1 + 240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)q^n$$
$$E_6 = 1 - 504\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)q^n,$$

где $q = e^{2\pi i\tau}$, а

$$\sigma_k(n) = \sum_{d\,|\,n} d^k.$$

Коэффициенты ведут себя следующим образом по отношению к модулярным преобразованиям

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) :$$

$$E_2 \mapsto (c\tau + d)^2 E_2 + \frac{6c}{\pi i}(c\tau + d)$$
$$E_4 \mapsto (c\tau + d)^4 E_4$$
$$E_6 \mapsto (c\tau + d)^6 E_6$$

Сделаем отступление о симметриях уравнения WDVV (Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde): наиболее нетривиальным является *обращение*

$$\hat{v}^1 = -\frac{1}{2}\,\frac{\eta_{\sigma\gamma}v^\sigma v^\gamma}{v^n}, \quad \hat{v}^\alpha = \frac{v^\alpha}{v^n} \text{ for } \alpha \neq 1, n, \quad \hat{v}^n = \frac{1}{v^n},$$
$$\hat{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \hat{F}(\hat{v}) = (v^n)^{-2}\left(-F(v) + \frac{1}{2}\eta_{\sigma\gamma}v^1 v^\sigma v^\gamma\right).$$

Следствие: наше решение $F(v, w, \tau)$ является *модулярно инвариантным*. Следовательно, получается модулярно инвариантная интегрируемая иерархия. Дадим здесь список первых нескольких потоков главной иерархии.

Поток $t = t^{1,0}$:

$$v_t = v_x$$
$$w_t = w_x$$
$$\tau_t = \tau_x$$

Поток $t = t^{2,0}$

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\pi^4}{72}\partial_x[(E_4 - E_2^2)w^3] \\ w_t &= \partial_x\left[v + \frac{\pi^2}{4}E_2 w^2\right] \\ \tau_t &= i\,\pi w_x \end{aligned}$$

Поток $t = t^{3,0}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\pi^5}{864}\partial_x\left[(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^4\right] \\ w_t &= -\frac{\pi^3}{72}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w^3\right] \\ \tau_t &= i\,v_x \end{aligned}$$

Поток $t = t^{1,1}$:

$$\begin{aligned} v_t &= v\,v_x - \frac{\pi^4}{96}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w^4 + \frac{\pi}{9}(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^4 i\tau\right] \\ w_t &= (v\,w)_x + \frac{\pi^2}{72}\partial_x\left[12E_2w^3 + \pi(E_2^2 - E_4)w^3 i\tau\right] \\ \tau_t &= (v\,\tau)_x + i\pi w\,w_x \end{aligned}$$

Поток $t = t^{2,1}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\pi^4}{72}\partial_x\left[(E_4 - E_2^2)v\,w^3 - \frac{\pi^2}{60}(5E_2^3 + 3E_2E_4 - 8E_6)w^5\right] \\ w_t &= \partial_x\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{\pi^2}{4}E_2 v\,w^2 + \frac{\pi^4}{288}(5E_2^2 + 4E_4)w^4\right] \\ \tau_t &= i\pi\partial_x\left[v\,w + \frac{\pi^2}{12}E_2w^3\right] \end{aligned}$$

Поток $t = t^{3,1}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\pi^5}{864}\partial_x\left[(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)v\,w^4 + \frac{\pi^2}{12}(E_2^2 - E_4)^2w^6\right] \\ w_t &= -\frac{\pi^3}{72}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)v\,w^3 + \frac{\pi^2}{60}(5E_2^3 - 3E_2E_4 - 2E_6)w^5\right] \\ \tau_t &= iv\,v_x - \frac{i\pi^4}{288}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w^4\right] \end{aligned}$$

и т.д.

Некоторая бесконечная иерархия гиперболических УрЧП со временами $t^{1,n}$, $t^{2,n}$, $t^{3,n}$, $n \geq 0$, может быть построена с использованием стандартной рекурсивной процедуры из теории фробениусовых многообразий.

Основные свойства:

- полнота
- Вирасоро-инвариантность
- модулярность
- наличие приложений

Приложения построенной главной иерархии основаны на ее связи с уравнениями Уизема для КдФ. Именно, введем новую пространственную переменную $t^{2,0} \to x$. Тогда зависимость от переменной времени $t = t^{2,1}$ совпадает с уравнениями Уизема.

Теперь применим общую теорию *иерархий топологического типа*, чтобы получить ϵ-деформацию вышеуказанной главной иерархии. Именно, поток $t = t^{1,0}$ остается прежним

$$v_t = v_x$$
$$w_t = w_x$$
$$\tau_t = \tau_x$$

Поток $t = t^{2,0}$:

$$
\begin{aligned}
&v_t = \frac{\pi^4}{72}\partial_x[(E_4 - E_2^2)w^3] \\
&-\frac{\pi^3\epsilon^2}{144}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w\,v_{xx} + \frac{\pi^2}{6}(E_2^3 + 3E_2E_4 - 4E_6)w^2 w_{xx}\right. \\
&+\frac{\pi^3}{72}(E_2^4 + 6E_2^2E_4 + 9E_4^2 - 16E_2E_6)w^3 i\tau_{xx} + (E_2^2 - E_4)v_x w_x + \pi^2 E_2(E_2^2 - E_4)w\,w_x^2 \\
&\left.+\frac{7}{24}\pi^3(E_2^2 - E_4)^2 w^2 w_x i\tau_x - \frac{5}{216}\pi^4(E_2^2 - E_4)(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^3\tau_x^2\right] \\
&w_t = \partial_x\left[v + \frac{\pi^2}{4}E_2 w^2\right] \\
&+\frac{\pi^3\epsilon^2}{144}\partial_x\left[\frac{6}{\pi^2}E_2 v_{xx} + (E_2^2 + 2E_4)w\,w_{xx} + \frac{\pi}{12}(E_2^3 + 3E_2E_4 - 4E_6)w^2 i\tau_{xx}\right. \\
&+\frac{18}{\pi^4}\frac{v_x^2}{w^2} - \frac{3}{2\pi}(E_2^2 - E_4)v_x i\tau_x + \frac{9}{2}E_2^2 w_x^2 + \frac{\pi}{3}(4E_2^3 - 3E_2E_4 - E_6)w\,w_x i\tau_x \\
&\left.-\frac{\pi^2}{96}(11E_2^4 - 30E_2^2E_4 + 3E_4^2 + 16E_2E_6)w^2\tau_x^2\right] \\
&\tau_t = i\,\pi w_x
\end{aligned}
$$

Поток $t = t^{3,0}$:

$$\begin{aligned}
&v_t = \frac{\pi^5}{864}\partial_x\left[(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^4\right] + \frac{\pi^2\epsilon^2}{144}\partial_x\left\{\frac{\pi^2}{6}(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^2 v_{xx}\right.\\
&+\frac{\pi^4}{36}(E_2^4 + 3E_2^2E_4 + 6E_4^2 - 10E_2E_6)w^3 w_{xx}\\
&+\frac{\pi^5}{432}(E_2^5 + 8E_2^3E_4 + 39E_2E_4^2 - 34E_2^2E_6 - 14E_4E_6)w^4 i\tau_{xx} - 2(E_2^2 - E_4)v_x^2\\
&-\frac{\pi^2}{6}(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w\, v_x w_x + \frac{\pi^4}{12}(2E_2^4 - 5E_2^2E_4 + E_4^2 + 2E_2E_6)w^2 w_x^2\\
&+\frac{23}{432}\pi^5(E_2^2 - E_4)(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^3 w_x i\tau_x\\
&\left.-\frac{\pi^6}{2592}(11E_2^6 - 69E_2^4E_4 + 81E_2^2E_4^2 + 9E_4^3 + 56E_2^3E_6 - 120E_2E_4E_6 + 32E_6^2)w^4\tau_x^2\right\}\\
&w_t = -\frac{\pi^3}{72}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w^3\right] - \frac{\pi^2\epsilon^2}{144}\partial_x\left\{(E_2^2 - E_4)w\, v_{xx} + \frac{\pi^2}{6}(E_2^3 + 3E_2E_4 - 4E_6)w^2 w_{xx}\right.\\
&+\frac{\pi^3}{72}(E_2^4 + 6E_2^2E_4 + 9E_4^2 - 16E_2E_6)w^3 i\tau_{xx} + (E_2^2 - E_4)v_x w_x + \pi^2E_2(E_2^2 - E_4)w\, w_x^2\\
&\left.+\frac{7}{24}\pi^3(E_2^2 - E_4)^2 w^2 w_x i\tau_x - \frac{5}{216}\pi^4(E_2^2 - E_4)(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^3\tau_x^2\right\}\\
&\tau_t = i\, v_x
\end{aligned}$$

Поток $t = t^{1,1}$:

$$\begin{aligned}
&v_t = v\, v_x - \frac{\pi^4}{96}\partial_x\left[(E_2^2 - E_4)w^4 + \frac{\pi}{9}(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^4 i\tau\right]\\
&w_t = (v\, w)_x + \frac{\pi^2}{72}\partial_x\left[12E_2w^3 + \pi(E_2^2 - E_4)w^3 i\tau\right]\\
&\tau_t = (v\, \tau)_x + i\pi w\, w_x
\end{aligned}$$

Поток $t = t^{2,1}$:

$$
\begin{aligned}
&v_t = \frac{\pi^4}{72}\partial_x \left[(E_4 - E_2^2)v\, w^3 - \frac{\pi^2}{60}(5E_2^3 + 3E_2E_4 - 8E_6)w^5\right] \\
&+\frac{\pi^3\epsilon^2}{144}\partial_x \left\{ \left[(E_4 - E_2^2)v\, w - \frac{\pi^2}{6}(E_2^3 + 3E_2E_4 - 4E_6)w^3\right] v_{xx} - \frac{\pi^2}{6}\left[(E_2^3 + 3E_2E_4 - 4E_6)v\right.\right. \\
&\left. +\frac{\pi^2}{6}(E_2^4 + 6E_2^2E_4 - 9E_4^2 + 2E_2E_6)w^2\right] w^2 w_{xx} - \frac{\pi^3}{72}\left[(E_2^4 + 6E_2^2E_4 + 9E_4^2 - 16E_2E_6)v\right. \\
&\left. +\frac{\pi^2}{6}(E_2^2 + 11E_4)(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)w^2\right] w^3 i\tau_{xx} - \frac{7}{4}(E_2^2 - E_4)w\, v_x^2 \\
&-\frac{1}{4}(E_2^2 - E_4)(4v + 5E_2\pi^2 w^2)v_x w_x - \frac{5}{48}\pi^3(E_2^2 - E_4)^2 w^3 v_x i\tau_x - \pi^2\left[E_2(E_2^2 - E_4)v\right. \\
&\left. +\frac{\pi^2}{48}(13E_2^4 + 15E_2^2E_4 - 12E_4^2 - 16E_2E_6)w^2\right] w\, w_x^2 - \frac{\pi^3}{24}(E_2^2 - E_4)\left[7(E_2^2 - E_4)v\right. \\
&\left. +\frac{\pi^2}{36}(55E_2^3 + 141E_2E_4 - 196E_6)w^2\right] w^2 w_x i\tau_x + \frac{\pi^4}{216}\left[5(E_2^2 - E_4)(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)v\right. \\
&\left.\left. +\frac{\pi^2}{32}(29E_2^6 + 41E_2^4E_4 - 105E_2^2E_4^2 - 93E_4^3 - 192E_2^3E_6 + 448E_2E_4E_6 - 128E_6^2)w^2\right] w^3\tau_x^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_t &= \partial_x\left[\frac{1}{2}v^2+\frac{\pi^2}{4}E_2v\,w^2+\frac{\pi^4}{288}(5E_2^2+4E_4)w^4\right]\\
&+\frac{\epsilon^2}{144}\partial_x\left\{3\pi\left[2E_2v+\frac{\pi^2}{2}(E_2^2+2E_4)w^2\right]v_{xx}\right.\\
&+\pi^2\left[(E_2^2+2E_4)v+\frac{\pi^2}{4}(E_2^3+4E_2E_4+4E_6)w^2\right]w\,w_{xx}\\
&+\frac{\pi^4}{12}\left[(E_2^3+3E_2E_4-4E_6)v+\frac{\pi^2}{4}(E_2^4+5E_2^2E_4-10E_4^2+4E_2E_6)w^2\right]w^2i\tau_{xx}\\
&+\left(\frac{18}{\pi w^2}v+\frac{21\pi}{2}E_2\right)v_x^2+\pi^3(8E_2^2+E_4)w\,v_xw_x\\
&+\pi^2\left[-\frac{3}{2}(E_2^2-E_4)v+\frac{\pi^2}{24}(11E_2^3-3E_2E_4-8E_6)w^2\right]v_xi\tau_x\\
&+\frac{\pi^3}{2}\left[9E_2^2v+\frac{\pi^2}{12}(47E_2^3+72E_2E_4+16E_6)w^2\right]w_x^2+\frac{\pi^4}{3}\big[(4E_2^3-3E_2E_4-E_6)v\\
&+\frac{\pi^2}{24}(32E_2^4+63E_2^2E_4-57E_4^2-38E_2E_6)w^2\Big]w\,w_xi\tau_x\\
&-\frac{\pi^5}{96}\big[(11E_2^4-30E_2^2E_4+3E_4^2+16E_2E_6)v\\
&\left.+\frac{\pi^2}{36}(103E_2^5+170E_2^3E_4-321E_2E_4^2-352E_2^2E_6+400E_4E_6)w^2\Big]w^2\tau_x^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_t &= i\pi\partial_x\left[v\,w+\frac{\pi^2}{12}E_2w^3\right]+\frac{i\,\epsilon^2}{144}\partial_x\big\{6\pi^2E_2w\,v_{xx}+\pi^4(E_2^2+2E_4)w^2w_{xx}\\
&+\frac{\pi^5}{12}(E_2^3+3E_2E_4-4E_6)w^3i\tau_{xx}-\frac{18}{w}v_x^2+12\pi^2E_2v_xw_x-\frac{\pi^3}{2}(E_2^2-E_4)w\,v_xi\tau_x\\
&+\frac{\pi^4}{2}(11E_2^2+4E_4)w\,w_x^2+\frac{\pi^5}{6}(7E_2^3+3E_2E_4-10E_6)w^2w_xi\tau_x\\
&\left.-\frac{\pi^6}{288}(23E_2^4-6E_2^2E_4+63E_4^2-80E_2E_6)w^3\tau_x^2\right\}
\end{aligned}
$$

Поток $t = t^{3,1}$:

$$v_t = \frac{\pi^5}{864}\partial_x \left[(E_2^3 - 3E_2E_4 + 2E_6)v\, w^4 + \frac{\pi^2}{12}(E_2^2 - E_4)^2 w^6\right]$$

$$w_t = -\frac{\pi^3}{72}\partial_x \left[(E_2^2 - E_4)v\, w^3 + \frac{\pi^2}{60}(5E_2^3 - 3E_2E_4 - 2E_6)w^5\right]$$

$$\tau_t = iv\, v_x - \frac{i\pi^4}{288}\partial_x \left[(E_2^2 - E_4)w^4\right]$$

Мы планируем проанализировать аналитически и численно роль построенных высших поправок к уравнениям Уизема в описании осцилляторного феномена в решениях гамильтоновых УрЧП.

Обратимся, наконец, к изучению свойств решений построенных уравнений. Естественно спросить, как свойства решений зависят от выбора фробениусова многообразия? Как они меняются с изменением порядка обрывания по ϵ? Какая часть из этих свойств остается справедливой также и для неинтегрируемых возмущений?

При малых временах вклад высших ϵ-поправок мал. Решения бездисперсной системы и ее возмущения начинают различаться вблизи точки *градиентной катастрофы*, где производные u_x, u_t делаются большими. Поведение решений гамильтоновых эволюционных систем оказывается качественно отличным от того, что происходит с решениями систем с диссипацией: вместо ударных волн возникают осцилляции с периодом $\sim 1/\epsilon$ (см. Рис. 1).

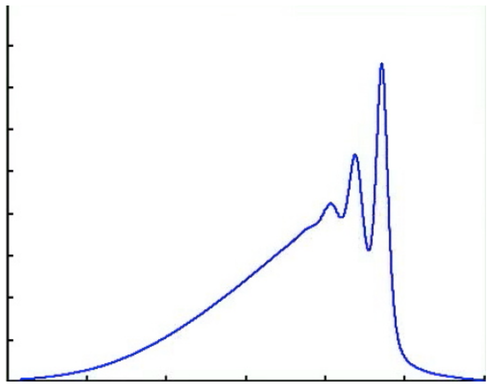

Рис. 1. Критическое поведение решений уравнения КдФ

На первый взгляд поведение решений различных уравнений оказывается совершенно различным. Так, не видно сходства в характере критического поведения, показанном на Рис. 1 (случай КдФ) и Рис. 2 (случай НУШ).

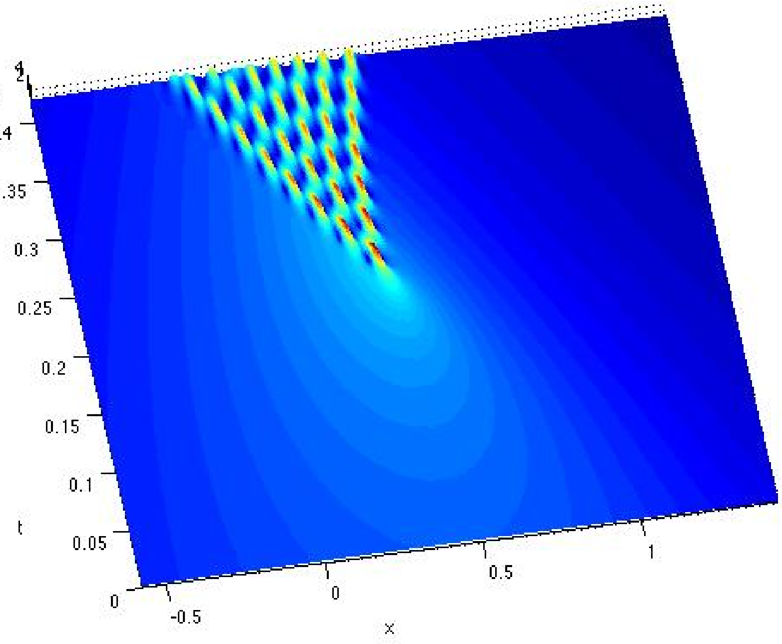

Рис. 2. Критическое поведение решений фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера $i\,\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0$; показан график величины $u = |\psi|^2$

Тем не менее, есть все основания ожидать, что в действительности в решениях общего положения рассматриваемых гамильтоновых систем встречается лишь конечное число типов критического поведения. В этом и заключается *Гипотеза Универсальности* критического поведения к обсуждению которой мы переходим.

Число зависимых переменных	**Бездисперсная система**	**Возмущенная система**
$n=1$	при $t<0$ решение уравнения $x = u\,t - \frac{1}{6}u^3$	специальное решение $U(X,T)$ уравнения P_I^2 $X = U\,T - \frac{1}{6}U^3 - \left[\frac{1}{24}\left(U'^2 + 2\,U\,U''\right) + \frac{U^{IV}}{240}\right]$
$n=2$ гиперболический случай	при $t<0$ решение системы в характеристических переменных $x_+ = r_+$, $x_- = r_+ r_- - \frac{1}{6}r_-^3$	та же функция $U(X,T)$, $r_+ = x_+ + U''(x_-, x_+)$, $r_- = U(x_-, x_+)$
$n=2$ эллиптический случай	при $z \neq 0$ решение комплексного квадратного уравнения $z = \frac{1}{2}w^2$	*tritronquée* решение $W_0(Z)$ уравнения P_I $W'' = 6W^2 - Z$

Табл. 2. Типы критического поведения решений систем низкого порядка

Как видно из Табл. 2, при $n = 1, 2$ типы критического поведения решений общего вида для невозмущенных систем описываются алгебраическими функциями, известными из теории особенностей (бифуркационная диаграмма особенности типа A_3, особенность Уитни типа сборки, а также эллиптическая омбилическая особенность Тома). Для возмущенных систем эти сособенности заменяются некоторыми специальными решениями уравнений типа Пэнлеве и их обобщений. Дадим описание этих решений.

Начнем с уравнения

$$X = T\,U - \left[\frac{1}{6}U^3 + \frac{1}{24}\left(U'^2 + 2U\,U''\right) + \frac{1}{240}U^{IV}\right]. \tag{21}$$

Это – обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U = U(X)$, зависящее от параметра T. В теории уравнений Пэнлеве это уравнение обычно рассматривается как высший аналог уравнения Пэнлеве-1 (см. ниже). Известно, что при всех значениях параметра T любое решение этого уравнения - мероморфная функция комплексной переменной X. Интересующее нас решение, существовние которого было доказано лишь в 2006 году Т.Клаесом и М.Ванлессеном, не имеет полюсов на всей вещественной оси X при вещественных значениях параметра T. Это решение, определенное однозначно при всех $(X,T) \in \mathbb{R}^2$, мы будем обозначать через $U(X,T)$ (см. Рис. 3).

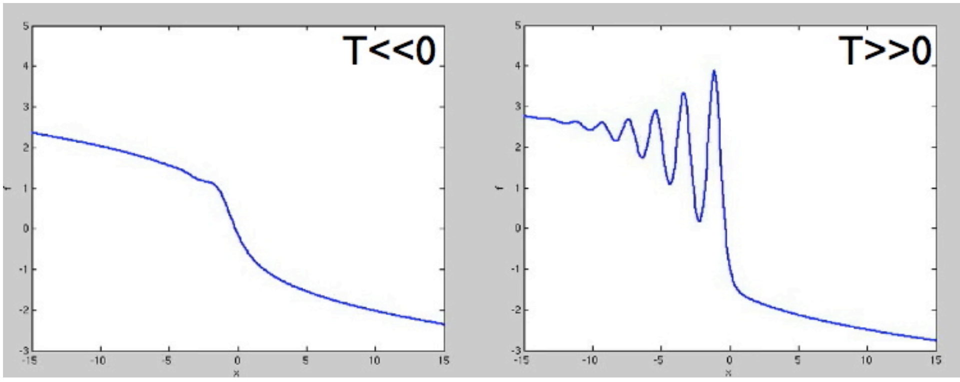

Рис. 3. Решение $U(X,T)$ уравнения (21) для двух значений параметра T

Мы готовы к тому, чтобы сформулировать Гипотезу Универсальности для скалярных гамильтоновых уравнений.

Гипотеза 6 *Рассмотрим общее гамильтоново возмущение уравнения*

$$v_t + a(v)\, v_x = 0, \quad a'(v) \neq 0. \tag{22}$$

В окрестности критической точки (x_0, t_0, v_0) *решение общего положения представляется в следующем виде*

$$u \simeq v_0 + \left(\frac{\epsilon^2 c_0}{\kappa^2}\right)^{1/7} U\left(\frac{x - a_0(t-t_0) - x_0}{(\kappa\, c_0^3 \epsilon^6)^{1/7}};\ \frac{a_0'(t-t_0)}{(\kappa^3 c_0^2 \epsilon^4)^{1/7}}\right) + O\left(\epsilon^{4/7}\right) \tag{23}$$

где

$$a_0 = a(v_0), \quad a_0' = a'(v_0),$$

c_0 *and* κ *- некоторые постоянные, решение* $U(X,T)$ *уравнения* (21) *описано выше.*

Доказательство этой гипотезы для случая решений уравнения КдФ с быстроубывающими аналитическими начальными данными было получено в самое последнее время Т.Клаесом и Т.Гравой.

Как видно из Табл. 2, та же самая специальная функция описывает и критическое поведение общих решений гиперболической системы второго порядка. Для случая возмущений эллиптической системы (например, для фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера) нужна другая специальная функция, к описанию которой мы и переходим.

Речь пойдет о классическом уравнении Пэнлеве-1 (P_I)

$$W'' = 6W^2 - Z. \tag{24}$$

Как и выше, все решения этого уравнения - мероморфные функции комплексного переменного Z. Асимптотическое расположение полюсов этих функций было исследовано П.Бутру еще в 1913 г. Бутру показал, что линии полюсов общего решения уравнения P_I накапливаются вдоль пяти лучей

$$\arg Z = \frac{2\pi\, n}{5}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2. \tag{25}$$

Основным открытием Бутру является доказательство существование специальных решений, для которых эти линии полюсов обрываются вдоль трех последовательных лучей из числа (25). Эти решения, названные Бутру *tritronquée*, определены однзначно для каждой тройки последовательных лучей.

Рассмотрим, в частности, решение *tritronquée*, отвечающее тройке лучей вида (25) с $n = 0, \pm 1$. Это решение, обозначаемое через $W_0(Z)$, по определению имеет лишь конечное число полюсов в секторе

$$|\arg Z| < \frac{4\pi}{5} - \delta$$

при любом положительном δ. Нижеследующее утверждение, сформулированное в виде гипотезы Т.Гравой, К.Клайном и автором, утверждает, что этих полюсов нет вовсе:

Гипотеза 7 *Решение tritronquée $W_0(Z)$ является аналитической функцией при всех*

$$|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}. \tag{26}$$

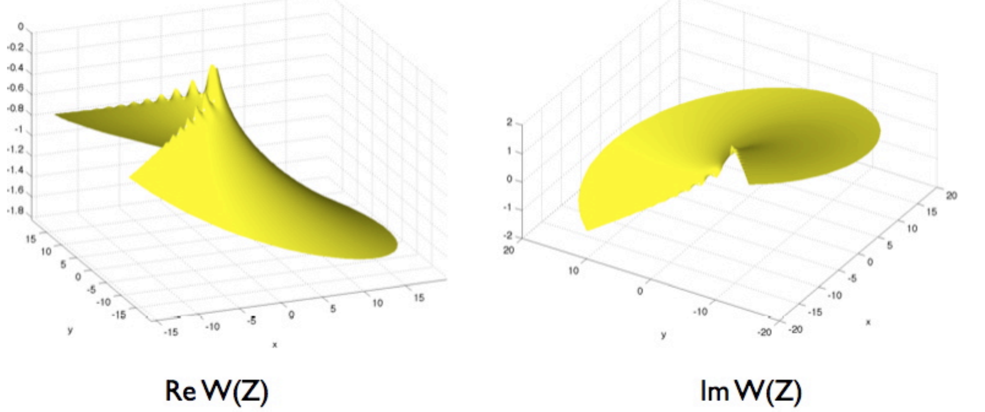

Рис. 4. График вещественной (слева) и мнимой (справа) частей решения *tritronquée* $W_0(Z)$ уравнения P_I в секторе $|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}$

Из графика, показанного на Рис. 4 видно, что полюсов у интересующего нас решения в секторе (26) нет. Мы готовы к тому, чтобы сформулировать Гипотезу Универсальности, описывающую критическое поведение гамильтоновых возмущений систем эллиптического типа. Для таких систем имеется пара комплексно сопряженных римановых инвариантов w и $\bar{w}$. Характеристические направления также комплексно сопряжены; обозначим их через z и $\bar{z}$. Как видно из Табл. 2, критические точки невозмущенной системы изолированы; в окрестности этих точек решение имеет особенность типа квадратного корня из комплексной величины.

Гипотеза 8 *Решение общего положения общего гамильтонова возмущения произвольной квазилинейной системы второго порядка эллиптического типа представляется в виде*

$$\begin{aligned} w &\simeq w^0 + \alpha\, \epsilon^{2/5} W_0\left(\epsilon^{-4/5}\, z\right) + \mathcal{O}\left(\epsilon^{4/5}\right) \\ z &= \beta_+ x + \beta_- t + z_0 \end{aligned} \tag{27}$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta_\pm$, z_0 *- комплексные константы, причем*

$$|\arg z| < \frac{4\pi}{5} \quad \textit{при малых} \quad |t - t_0|$$

при всех $x \in \mathbb{R}$.

Эта гипотеза, впервые сформулированная Т.Гравой. К.Клайном и автором при изучении критического поведения решений фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера, на сегодняшний день остается не доказанной.

Литература.

Часть 1: проблемы классификации.

B.Dubrovin, Y.Zhang, Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov - Witten invariants. ArXiv:math.DG/0108160.

S.Q. Liu, Y. Zhang, Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type, *J. Geom. Phys.* **54** (2005) 427–453.

B.Dubrovin, S.-Q.Liu, Y.Zhang, On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws I: quasitriviality of bihamiltonian perturbations. *Comm. Pure Appl. Math.* **59** (2006) 559-615.

B.Dubrovin, S.-Q.Liu, Y.Zhang, Frobenius manifolds and central invariants for the Drinfeld–Sokolov bihamiltonian structures, *Adv. Math.* (2008).

B.Dubrovin, On universality of critical behaviour in Hamiltonian PDEs, *Amer. Math. Soc. Transl.* **224** (2008) 59-109.

B.Dubrovin, Hamiltonian perturbations of hyperbolic PDEs: from classification results to the properties of solutions, In: *New Trends in Mathematical Physics. Selected contributions of the XVth International Congress on Mathematical Physics*, ed. V.Sidoravicius, Springer Netherlands, 2009., pp. 231-276.

G.Carlet, B.Dubrovin, L.Ph.Mertens, Infinite-Dimensional Frobenius Manifolds for $2+1$ Integrable Systems, arXiv:0902.1245, *Math. Ann.*, published “online first"06.04.2010.

B.Dubrovin, Hamiltonian PDEs: deformations, integrability, solutions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010) 434002.

Часть 2: универсальность критического поведения.

B.Dubrovin, On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws, II: universality of critical behaviour, *Comm. Math. Phys.* **267** (2006) 117 - 139.

T.Claeys, M.Vanlessen, The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation. *Nonlinearity* **20** (2007), no. 5, 1163–1184.

T. Claeys, M. Vanlessen, Universality of a double scaling limit near singular edge points in random matrix models, *Comm. Math. Phys.* **273** (2007), no. 2, 499–532.

T.Grava, C.Klein, Numerical study of a multiscale expansion of KdV and Camassa-Holm equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **60** (2007) 1623-1664.

T.Claeys, T.Grava, Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann–Hilbert approach, *Comm. Math. Phys.* **286** (2009) 979–1009.

B.Dubrovin, T.Grava, C.Klein, On universality of critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the *tritronquée* solution to the Painlevé-I equation, *J. Nonlinear Sci.* **19** (2009) pp. 57-94.

T.Claeys, T.Grava, Painlevé-II asymptotics near the leading edge of the oscillatory zone for the Korteweg–de Vries equation in the small dispersion limit, arXiv:0812.4142, *Comm. Pure Appl. Math.* **63** (2010) 203–232.

T.Claeys, T.Grava, Solitonic asymptotics for the Korteweg–de Vries equation in the small dispersion limit, arXiv:0911.5686.

C.Klein, P.Markowich, C.Sparber, Numerical study of oscillatory regimes in the Kadomtsev-Petviashvili equation, arXiv:math-ph/0601025, *J. Nonlinear Sci.* **17** (2007) 429-470.

S.Manakov, P.Santini, The dispersionless 2D Toda equation: dressing, Cauchy problem, longtime behavior, implicit solutions and wave breaking, *J. Phys. A* **42** (2009) 095203.

S.Manakov, P.Santini, On the dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation in n+1 dimensions: exact solutions, the Cauchy problem for small initial data and wave breaking, arXiv:1001.2134.

D.Masoero, Poles of Integrale Tritronquée and Anharmonic Oscillators. A WKB Approach, *J. Phys. A* **43** (2010) 095201.

V.Novokshenov, Padé approximations for Painlevé I and II transcendents, *Teoret. Mat. Fiz.* **159** (2009) 515–526.

M.Bertola, A.Tovbis, Universality in the profile of the semiclassical limit solutions to the focusing Nonlinear Schrödinger equation at the first breaking curve, arXiv:1004.1828.

M.Bertola, A.Tovbis, Universality for the focusing nonlinear Schrödinger equation at the gradient catastrophe point: Rational breathers and poles of the *tritronquée* solution to Painlevé-I, arXiv:1004.1828.

3 Компьютерная программа для вычисления и визуализации модулированных тэта–функций

В приложениях к асимптотическому анализу уиземовского типа решений нелинейных уравнений в частных производных в присутствие модуляционной нестабильности необходимо работать с тэта–функциями римановых поверхностей, допускающих антиголоморфную инволюцию разделяющего типа с числом неподвижных овалов меньшим максимального. Первым примером таких тэта–функций, связанных с поверхностями рода два, являются функции двух переменных, представляемые рядами вида

$$\theta(\phi,\psi)=\sum_{m,\,n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{1}{2}\left[\alpha(m^2+n^2)+i\,\beta(m^2-n^2)+2i\,\gamma\,m\,n\right]+(m+n)\phi+i(m-n)\psi}.$$

Здесь α, β, γ - вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha\pm\gamma<0$, $\gamma>0$. Соответствующая риманова поверхность задается уравнением вида

$$w^2=\prod_{i=1}^{3}(z-z_i)(z-\bar{z}_i)$$

где попарно различные комплексные числа z_1, z_2 и z_3 имеют положительные мнимые части. Для вычисления периодов абелевых дифференциалов на этой римановой поверхности использовались дисперсионные соотношения, известные из теории уравнения КП–1 (см. Б.Дубровин, Тэта–функции и нелинейные уравнения, Успехи Математических Наук **36:2** (1981) 11-80)

$$\partial_x^4\hat{\theta}[\nu]-\partial_x\partial_t\hat{\theta}[\nu]-\frac{3}{4}\partial_y^2\hat{\theta}[\nu]+\frac{3}{2}c\,\partial_x^2\hat{\theta}[\nu]=d\,\hat{\theta}[\nu],\quad \nu\in(\mathbb{Z}_2)^2\,.$$

Подразумевается, что аргументы тэта–функций второго порядка линейно зависят от x, y, t:

$$\phi=k_1x+l_1y-w_1t,\quad \psi=k_2x+l_2y-w_2t;$$

d – постоянная интегрирования. После взятия производных в дисперсионных соотношениях следует все аргументы заменить нулями. Величины

k_1, k_2, l_1, l_2, w_1, w_2 и являются интересующими нас периодами абелевых дифференциалов второго рода с полюсами порядка 2, 3 и 4 соответственно.

На основании описанных выше теоретических рассмотрений была разработана программа, использующая язык символьных вычислений MATHEMATICA. Программа позволяет быстро вычислять значения всех необходимых констант, входящих в тэта–функциональную формулу, при произвольных заданных величинах параметров α, β, γ. Это дает возможность без труда вычислять модулированные тэта–функциональные решения, где указанные выше параметры являются медленно меняющимися функциями пространственно–временных переменных. Прогамма также позволяет получить визуализацию соответствующих двухфазных решений уравнения КП–1

$$u(x,y,t) = 2\partial_x^2 \log\theta\left(k_1x + l_1y - w_1t + \phi_0, k_2x + l_2y - w_2t + \psi_0\right) + c$$

в любой заданный момент времени.

4 Вспомогательные исследования

4.1 Градуированные ленточные модули над положительной частью алгебры Вирасоро

Роль алгебры Вирасоро в аппарате современной математической физике трудно переоценить. В представленной работе мы будем изучать некоторые геометрические приложения положительной части алгебры Вирасоро: а именно построение инвариантных аффинных связностей на нильмногообразиях. Построение подобных примеров началось с известной работы И.Бенуа [1], посвященной одной гипотезе Милнора. С другой стороны, благодаря важному открытию Бухштабера и Шокурова, алгебра L_1 играет важную роль в теории комплексных кобордизмов и в спектральной последовательности Адамса-Новикова.

Определение 9 *L_1-модуль V называется градуированным ленточным, если существует два целых числа $k, N, k < N$, или $k = -\infty, N = +\infty$ такие, что:*

$$\dim V_i = \begin{cases} 1, & k < i < N, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание 10 *Градуированный ленточный L_1-модуль V может быть задан своим базисом*

$$f_i, i \in \mathbb{Z},\ k < i < N,$$

и набором констант

$$\alpha_i, \beta_j,\ i, j \in \mathbb{Z},\ k < i < N{-}2, k < j < N{-}3,$$

таких, что

$$e_1 f_i = \alpha_i f_{i+1}, \qquad e_2 f_j = \beta_j f_{j+2}.$$

Разумеется константы α_i, β_j не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять некоторым алгебраическим уравнениям.

Несколько примеров.

- Рассмотрим $\alpha_i{=}\alpha,\ \beta_j{=}\beta$. Они соответствуют L_1-модулю $C_{\alpha,\beta}$, где все остальные элементы $e_i, i \geq 3$ действуют тривиально.

- Мы можем задавать базисные элементы e_i алгебры L_1 как дифференциальные операторы $e_i = x^{i+1}\frac{d}{dx}$ на вещественной прямой. Рассмотрим пространство $F_{\lambda,\mu}$ тензорных плотностей вида $P(x)x^{\mu}(dx)^{-\lambda}$, где $P(x)$ является полиномом относительно неизвестной x, а параметры λ, μ — произвольные вещественные (комплексные числа). Оператор $\xi = f(x)\frac{d}{dx}$ действует на $F_{\lambda,\mu}$ при помощи производной Ли L_ξ:

  $$L_\xi P(x)x^{\mu}(dx)^{-\lambda} = \left(f(x)(P(x)x^{\mu})' - \lambda P(x)x^{\mu}f'(x)\right)(dx)^{-\lambda}.$$

  Рассматривая бесконечный базис $f_j = x^{j+\mu}(dx)^{-\lambda}$ в $F_{\lambda,\mu}$ мы получаем следующее L_1-действие [3]:

  $$e_k f_j = (j{+}\mu{-}\lambda(k{+}1))f_{k+j}.$$

  В этом случае $\alpha_i = i{+}\mu{-}2\lambda$ и $\beta_j = j{+}\mu{-}3\lambda$.

Замечание 11 *Векторное просторанство $F_{\lambda,\mu}$ может быть рассмотрено как W-модуль над всей алгеброй Витта W, или, что эквивалентно, представлению нулевой энергии алгебры Вирасоро [4]. Кака W-модуль $F_{\lambda,\mu}$ я вляется приводимым если $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $\beta{=}0$ или $\lambda \in \mathbb{Z}$ и $\beta{=}1$, в остальных случаях он является неприводимым [4]. W-модули $F_{\lambda,\mu}$ и $F_{\lambda,\mu+m}, m \in \mathbb{Z}$ изоморфны. Очевидно, что все эти свойства не выполняются в L_1-случае.*

Имея в распоряжении бесконечномерный градуированный ленточный L_1-модуль $V=\langle f_i, i\in\mathbb{Z}\rangle$ можно построить $(N-k-1)$-мерный L_1-модуль $V(k,N)$, рассматривая подфактор модуля V:

$$V(k,N)=\oplus_{i>k}^{\infty}V_i/\oplus_{j>N-1}^{\infty}V_j, \quad V(k,N)=\langle f_{k+1},\dots,f_{N-1}\rangle.$$

С этого момента мы дальше будем рассматривать $(n+1)$-мерные градуированные ленточные L_1-модули $V=\langle f_1,f_2,\dots,f_{n+1}\rangle$ заданные конечным набором констант $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\}$.

Замечание 12 *Двойственный модуль V^* к градуированному ленточному L_1-модулю $V=\langle f_1,f_2,\dots,f_{n+1}\rangle$ в свою очередь имеет структуру градуированного ленточного L_1-модуля относительно базиса $f^{n+1},\dots,f^2,f^1$, где $f^i(f_j)=\delta^i_j$. Если $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\}$ – набор констант для V относительно $f_1,\dots,f_{n+1}$, то V^* задается константами $\{-\alpha_n,\dots,-\alpha_1,-\beta_{n-1},\dots,-\beta_1\}$ в базисе $f^{n+1},\dots,f^2,f^1$.*

Теорема 13 *Произвольный $(n+1)$-мерный градуированный ленточный L_1-модуль типа $(1,1,1,\dots,1,1)$ ($\alpha_i=1$) при $n+1\geq 10$ изоморфен одному и только одному модулю из приведенной таблицы:*

$module$	b_1	b_2	$\dots$	b_i	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}
$V_{u,v}$	$\frac{6(u+1)}{(v+1)(v+2)}$	$\frac{6(u+2)}{(v+2)(v+3)}$	$\dots$	$\frac{6(u+i)}{(v+i)(v+i+1)}$	$\dots$	$\dots$	$\frac{6(u+n-1)}{(v+n-1)(v+n)}$
$V_{x,3}$	x	x	$\dots$	x	$\dots$	x	x
$V_{t,5}$	t	$\frac{5}{2}$	$\dots$	$\frac{6(i+3)}{(i+2)(i+1)}$	$\dots$	$\frac{6(n+1)}{(n-1)n}$	$\frac{6(n+2)}{n(n+1)}$
$V^*_{t,5}$	$-\frac{6(n+2)}{n(n+1)}$	$-\frac{6(n+1)}{(n-1)n}$	$\dots$	$-\frac{6(n-i)}{(n-i-2)(n-i-1)}$	$\dots$	$-\frac{5}{2}$	$-t$
$V_{t,6}$	t	3	$\dots$	$6/i$	$\dots$	$6/(n-2)$	$6/(n-1)$
$V^*_{t,6}$	$-6/(n-1)$	$-6/(n-2)$	$\dots$	$-6/(n-i)$	$\dots$	-3	$-t$

Список литературы

[1] Y. Benoist, *Une nilvariété non affine*, J. Differential Geometry **41** (1995), 21–52.

[2] Б.Л. Фейгин, Д.Б. Фукс, *Гомологии алгебр Ли векторных полей на прямой*, Функцион. Анализ и его прил., **14**:3 (1980), 45–60.

[3] Д.Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли* М.: Наука, Москва, 1984.

[4] V.G. Kac, A.K. Raina *Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras* Adv. Ser. Math. Phys. 2, 1988.

[5] D.V. Millionschikov, *Cohomology of nilmanifolds and Gontcharova's theorem*, in "Global Differential geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray M. Fernandez and J.Wolf ed., AMS CONM 288 (2001), 381–385.

[6] A. Nijenhuis, R.W. Richardson,Jr., *Deformations of Lie algebra structures*, J. of Math. and Mech., **17**:1 (1967), 89-105.

4.2 О C^*-алгебрах, связанных с ограниченными представлениями свободной группы

Данный раздел посвящен исследованию специального семейства C^*-алгебр, связанных с представлениями свободной группы с заданным ограничением на норму суммы порождающих элементов.

Пусть Γ — дискретная группа. Рассмотрение различных множеств унитарных представлений Γ приводит к различным групповым C^*-алгебрам группы Γ. Например, полная групповая C^*-алгебра группы Γ, обозначаемая через $C^*(\Gamma)$, является замыканием группового кольца $\mathbb{C}[\Gamma]$ по норме, индуцированной универсальным представлением, а редуцированная групповая C^*-алгебра Γ, обозначаемая через $C^*_r(\Gamma)$, — по норме, индуцированной регулярным представлением. Мы здесь рассматриваем некоторые специальные классы представлений свободной группы с двумя образующими для получения соответствующих C^*-алгебр. Эти классы связаны со специальным элементом x группового кольца — суммой образующих и их обратных, иногда называемым *оператором усреднения*. Этот элемент играет важную роль при исследовании групп и их C^*-алгебр. Например, аменабельность Γ равносильна равенству $\|\lambda(x)\| = n$, где λ — регулярное представление Γ, а n — число слагаемых в x. Свойство (T) для Γ равносильно существованию гэпа в спектре $\pi(x)$ вблизи точки n, где π — универсальное представление.

Пусть u и v — образующие свободной группы F_2. Тогда $x = u + u^{-1} + v + v^{-1} \in \mathbb{C}[\Gamma]$.

Определение 14 *Пусть* $\mu \in [0, 4]$. *Представление* $\pi : F_2 \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ *называется* μ-ограниченным, *если*

$$\|\pi(x)\| = \|\pi(u) + \pi(u)^* + \pi(v) + \pi(v)^*\| \leq \mu. \tag{28}$$

Для $0 \leq \mu \leq 4$, сопоставление $u, v \mapsto (\mu/4 \pm i\sqrt{1 - (\mu/4)^2})I$, где I — тождественный оператор на любом (в частности, одномерном) гильбертовом пространстве, задает μ-ограниченное представление группы F_2, что доказывает существование μ-ограниченных представлений. На самом деле, таких представлений много. Например, все представления являются 4-ограниченными. Если π — μ-ограниченное представление, и $\mu \leq \mu' \leq 4$, то π также является и μ'-ограниченным. Пусть Π_μ — множество всех μ-ограниченных представлений, тогда $\Pi_{\mu_1} \subseteq \Pi_{\mu_2}$ при $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq 4$. Одномерный пример (выше) показывает, что при $\mu_1 \neq \mu_2$ множество Π_{μ_1} строго больше, чем Π_{μ_2}.

Определим (полу)норму $\|\cdot\|_\mu$ на $\mathbb{C}[F_2]$, индуцированную Π_μ, и пополним затем $\mathbb{C}[F_2]$ по этой (полу)норме, получая в результате соответствующую групповую C^*-алгебру A_μ.

Определение 15 *Пусть* $a \in \mathbb{C}[F_2]$, $\mu \in [0, 4]$. *Положим*

$$\|a\|_\mu := \sup_{\pi \in \Pi_\mu} \|\pi(a)\|. \tag{29}$$

Замечание 16 *Поскольку* $\|a\|_\mu \leq \|a\|_4 = \|a\|_{max}$, *где* $\|\cdot\|_{max}$ — *норма на* $\mathbb{C}[F_2]$, *индуцированная универсальным представлением, ясно, что* $\|\cdot\|_\mu$ *ограниченна. Более того,* $\|\cdot\|_{\mu_1} \leq \|\cdot\|_{\mu_2}$ *при* $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq 4$. *Очевидно, что это —* C^**-полунорма.*

Положим $N_\mu = \{a \in \mathbb{C}[F_2] : \|a\|_\mu = 0\}$ и пополним $\mathbb{C}[F_2]/N_\mu$ по норме $\|\cdot\|_\mu$. Полученное пополнение обозначим A_μ. Наша цель - исследование семейства C^*-алгебр A_μ.

Замечание 17 *Отметим, что* A_μ *может быть также определена как универсальная* C^**-алгебра, порожденная двумя унитарными элементами,* u, v, *удовлетворяющими единственному соотношению* $\|u + u^* + v + v^*\| \leq \mu$.

Предложение 18 *Для любого $0 \le \mu_1 \le \mu_2 \le 4$, тождественное отображение на $\mathbb{C}[F_2]$ продолжается до сюръективного $*$-гомоморфизма $A_{\mu_2} \to A_{\mu_1}$.*

Если μ_1 близко к μ_2, то следует ожидать, что A_{μ_1} и A_{μ_2} похожи друг на друга, т.е. имеется некая "непрерывность" A_μ по μ. Для характеризации этой "непрерывности" мы воспользуемся понятием непрерывного семейства C^*-алгебр, введенного Диксмье.

Пусть I — локально компактное хаусдорфово пространство, $\{A(x)\}_{x\in I}$ — семейство C^*-алгебр Обозначим через $\prod_{x\in I} A(x)$ множество функций $a = a(x)$, определенных на I и таких, что $a(x) \in A(x)$ для каждого $x \in I$.

Определение 19 *Пусть $\mathcal{A} \subset \prod_{x\in I} A(x)$ — подмножество, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) $\mathcal{A}$ является $*$-подалгеброй в $\prod_{x\in I} A(x)$,

(ii) для каждого $x \in I$ множество $\{a(x) : a \in \mathcal{A}\}$ плотно в $A(x)$,

(iii) для каждого $a \in \mathcal{A}$ функция $x \mapsto \|a(x)\|$ непрерывна,

(iv) пусть $a \in \prod_{x\in I} A(x)$; если для каждого $x \in I$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $a' \in \mathcal{A}$, что $\|a(x) - a'(x)\| < \varepsilon$ в некоторой окрестности точки x, то $a \in \mathcal{A}$.

Тогда тройка $(A(x), I, \mathcal{A})$ называется непрерывным семейством C^*-алгебр.

Пусть $I = [0,4]$, $A = C(I, C^*(F_2))$, $B = \{f \in A : \|f(\mu)\|_\mu = 0, \forall \mu \in I\}$. Ясно, что B — замкнутый идеал в A, с фактор-отобраением $q : A \to A/B$. Определим отображение $\iota : A/B \to \prod_{\mu\in I} A_\mu$ формулой $\iota(b)(\mu) = q_\mu(a(\mu))$, где $b \in A/B$, а $a \in A$ такое, что $b = q(a)$, $q_\mu : C^*(F_2) = A_4 \to A_\mu$ — фактор-отображение. Легко видеть, что ι корректно определено и инъективно, поэтому теперь можно считать A/B подалгеброй в $\prod_{\mu\in I} A_\mu$. Доказательство того, что $(A_\mu, I, A/B)$ является непрерывным семейством, опирается на следующие леммы.

Лемма 20 *Для любого $a \in C^*(F_2)$ функция $N_a : I \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой $\mu \mapsto \|a\|_\mu$, непрерывна.*

Лемма 21 *Положим $I_\mu = \{a \in C^*(F_2) : \|a\|_\mu = 0\}$. Тогда $\{g(\mu_0) : g \in B\} = I_{\mu_0}$ для каждого $\mu_0 \in I$.*

Поскольку мы считаем A/B подалгеброй в $\prod_{\mu\in I} A_\mu$, для каждого $b \in A/B$, наряду с фактор-нормой, можно говорить и о супремум-норме, если считать b функцией, заданной на I. Следующая лемма утверждает их равенство.

Лемма 22 *Пусть $a \in A$, $b = q(a) \in A/B$. Положим*

$$\|b\|_1 = \inf_{g\in B} \|a+g\| = \inf_{g\in B} \sup_{\mu\in I} \|a(\mu)+g(\mu)\|$$

и

$$\|b\|_2 = \sup_{\mu\in I} \inf_{g\in B} \|a(\mu)+g(\mu)\| = \sup_{\mu\in I} \|a(\mu)\|_\mu \text{ (по лемме 21).}$$

Тогда $\|b\|_1 = \|b\|_2$.

Теорема 23 *$(A_\mu, I, A/B)$ является непрерывным семейством C^*-алгебр.*

Отождествим теперь A_0 с некоторым амальгамированным свободным произведением C^*-алгебр.

Напомним, что для C^*-алгебр A_1, A_2 и B и вложений $i_k : B \to A_k$, $k = 1, 2$, *амальгамированное свободное произведение* является C^*-алгеброй $A_1 *_B A_2$ с вложениями $j_k : A_k \to A_1 *_B A_2$, удовлетворяющими равенству $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$, если выполнено следующее условие: если $\phi_k : A_k \to A$, $k = 1, 2$, — два $*$-гомоморфизма с $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, то тогда существует единственный $*$-гомоморфизм $\phi : A_1 *_B A_2 \to A$, такой что $\phi \circ j_k = \phi_k$, $k = 1, 2$. $*$-гомоморфизм ϕ, индуцированный с помощью ϕ_1 и ϕ_2, обозначается $\phi_1 *_B \phi_2$.

Пусть $p : S^1 \to [-1, 1]$ — проекция окружности $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Она индуцирует вложение $i_1 : C[-1, 1] \to C(S^1)$, $i_1(\mathrm{id}) = z + \overline{z}$, где $z = x+iy$ — координата на S^1, а id — тождественная функция на $C[-1, 1]$. Пусть $\tau : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$ — меняющий ориентацию автоморфизм. Положим $i_2 = i_1 \circ \tau$. Тогда $i_2(\mathrm{id}) = -(w + \overline{w})$.

Вложения i_1 и i_2 алгебры $C[-1, 1]$ в $C(S^1)$ задают амальгамированное свободное произведение $D = C(S^1) *_{C[-1,1]} C(S^1)$.

Лемма 24 *C^*-алгебры A_0 и D изоморфны.*

Применим точную последовательность Кунца в K-теории для амальгамированных свободных произведений:

$$\begin{tikzcd} K_0(C[-1,1]) \arrow[r, "(i_1,i_2)"] & K_0(C(S^1)) \oplus K_0(C(S^1)) \arrow[r, "j_1-j_2"] & K_0(A_0) \arrow[d] \\ K_1(A_0) \arrow[u] & K_1(C(S^1)) \oplus K_1(C(S^1)) \arrow[l, "j_1-j_2"'] & K_1(C[-1,1]) \arrow[l, "(i_1,i_2)"'] \end{tikzcd}$$

Следствие 25 *(i) Группа $K_0(A_0)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и порождается элементом* [1]*;*

(ii) Группа $K_1(A_0)$ изоморфна $\mathbb{Z}^2$ и порождается элементами $[u]$ and $[v]$, которые порождают первую и вторую копии алгебры $C(S^1)$.

Применим метод Кунца длявычисления K-групп для C^*-алгебр A_μ, $0 \le \mu < 4$.

Замечание 26 *Из следствия 25 мы можем получить частичную информацию о K-группах C^*-алгебр A_μ ($0 < \mu < 4$). Поскольку фактор-отображение $A_4 \to A_0$ пропускается через A_μ и индуцирует изоморфизм в K-теории, можно заключить, что группа $K_*(A_\mu)$ содержит $K_*(A_4)$ как прямое слагаемое.*

Теорема 27 *Фактор-отображение $A_4 \to A_\mu$ индуцирует изоморфизм K_*-групп.*

4.3 Квантизация разветвленных накрытий

Результаты данного раздела и детали доказательств изложены в электронном препринте [5].

Целью настоящей работы является получение адекватного описания разветвленных накрытий в терминах (коммутативных) С*-алгебр и модулей над ними, допускающего естественное обобщение на некоммутативный случай, т.е. квантизацию. Фактически получено два описания, тесно связанных между собой.

Под *разветвленным накрытием* мы понимаем открытое и замкнутое непрерывное сюръективное отображение компактных хаусдорфовых пространств $p : Y \to X$ с конечным ограниченным числом прообразов $\# p^{-1}(x)$, $x \in X$.

Основным результатом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 28 *Пусть $i : C(X) \to C(Y)$ — вложение, где X и Y — компактные хаусдорфовы пространства. Пусть $p = i^*$ — сюръекция $p : Y \to X$, двойственная по Гельфанду к i. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *Сюръекция p является разветвленным накрытием.*

2) *Рассмотрим $C(Y)$ как $C(X)$-модуль по отношению к естественному действию, индуцированному i. Тогда $C(Y)$ может быть таким образом снабжено $C(X)$-значным скалярным произведением, что становится (полным) гильбертовым $C(X)$-модулем.*

3) *Можно определить положительное унитальное условное ожидание $E : C(Y) \to C(X)$ топологически конечного индекса (в смысле [1]).*

Доказательство: Импликация 1)⇒2) доказывается в теореме 4.3 [5]. Импликация 3)⇒1) доказывается в теореме 5.6 [5]. Эквивалентность 2)⇔3) известна (ср. [2]). □

Эта теорема дает способ для квантизации разветвленных накрытий. Точнее, мы можем ввести следующее определение.

Определение 29 *Некоммутативным разветвленным накрытием* называется пара (B, A), состоящая из таких C^*-алгебры B и ее C^*-подалгебры A с общей единицей, что выполнено одно из следующих условий, эквивалентных по [2, Theorem 1].

1) Алгебра B может быть таким образом снабжена A-значным скалярным произведением, что становится (полным) гильбертовым A-модулем.

2) Имеется положительное условное ожидание $E : B \to A$ топологически конечного индекса.

Эти теорема и определение могут быть уточнены в случае (несингулярных конечнолистных) накрытий следующим образом. Результат следующей теоремы является отчасти известным.

Теорема 30 *Пусть $i : C(X) \to C(Y)$ — вложение, где X и Y — компактные хаусдорфовы пространства. Пусть $p = i^*$ — сюръекция $p : Y \to X$, двойственная по Гельфанду к i. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1) *Сюръекция p является конечнолистным накрытием.*

2) *Модуль $C(Y)$ может быть таким образом снабжен $C(X)$-значным скалярным произведением, что становится конечнопорожденным проективным гильбертовым $C(X)$-модулем.*

3) *Можно определить положительное унитальное условное ожидание $E : C(Y) \to C(X)$ (алгебраически) конечного индекса (в смысле [6]).*

Доказательство: Имплинкация 1)⇒3) доказана в [6, Proposition 2.8.9]. Импликация 2)⇒1) доказывается в теореме 4.4 [5]. Эквивалентность 2)⇔3) может быть извлечена из [6, pp. 92–93]. □

Определение 31 *Некоммутативное накрытие* — это пара (B, A), состоящая из таких C^*-алгебры B и ее C^*-подалгебры A с общей единицей, что выполнено одно из следующих эквивалентных условий. (Эквивалентность может быть выведена из [6, pp. 92–93]).

1) Алгебра B может быть таким образом снабжена A-значным скалярным произведением, что становится конечнопорожденным проективным гильбертовым A-модулем.

2) Существует положительное условное ожидание $E : B \to A$ алгебраически конечного индекса.

Список литературы

[1] Michel Baillet, Yves Denizeau, and Jean-François Havet, *Indice d'une espérance conditionnelle*, Compositio Math. **66** (1988), no. 2, 199–236.

[2] M. Frank and E. Kirchberg, *On conditional expectations of finite index*, J. Oper. Theory **40** (1998), no. 1, 87–111.

[3] M. Frank, V. M. Manuilov, and E. V. Troitsky, *Hilbert C^*-modules from group actions: beyond the finite orbits case*, E-print arxiv:math.OA/0903.1741.

[4] ———, *On conditional expectations arising from group actions*, Zeitschr. Anal. Anwendungen **16** (1997), 831–850.

[5] A. Pavlov and E. Troitsky, *Quantization of branched coverings*, E-print arxiv.org/abs/1002.3491

[6] Y. Watatani, *Index for C*-subalgebras*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. 424, AMS, Providence, 1990.

5 Школа по геометрическим методам математической физики для студентов и аспирантов

5.1 Введение в теорию гамильтоновых уравнений в частных производных (Б.А. Дубровин)

Основной целью курса, прочитанного на Школе по геометрическим методам математической физики для студентов и аспирантов в декабре 2010 года, было введение слушателей в проблематику теории бесконечномерных гамильтоновых систем, являющейся одной из активно развивающихся областей современной математической физики. Первая часть лекционного курса была посвящена изложению геометрических основ гамильтонова формализма, включая теорию деформаций пуассоновых структур и их симметрий, а также используемой в теории деформаций техники геометрии супермногообразий. Вторая часть курса содержала изложение современных подходов к классификации гамильтоновых уравнений в частных производных, а также введение в теорию деформаций интегрируемых систем. Наконец, заключительный раздел курса дал слушателям первое представление о геометрических, аналитических и численных методах, используемых при изучении фазовых переходов от регулярного к осцилляторному поведению, наблюдаемых в решениях достаточно общего класса нелинейных уравнений в частных производных. В этой области современной математики все еще очень много открытых проблем; слушатели получили хорошую основу для того, чтобы начать самостоятельные исследования проблем, освещенных в этих лекциях.

5.2 Дискретные спектральные симметрии разностных операторов (И.А.Дынников)

Курс представлял собой элементарное введение в дискретизацию динамических систем и затрагивал частный случай таких систем, связанный со спектральными симметриями дифференциальных операторов. Интерес к дискретизации систем дифференциальных уравнений связан, в частности, с применением компьютеров для моделирования этих систем, поэтому с развитием компьютерной техники многократно возрос и интерес к различного рода дискретизациям. Кроме того, проблемы существования и единственности решений для дискретных систем часто оказываются более элементарными, чем для их непрерывных аналогов, поэтому дискретные системы могут давать и новые методы для исследования непрерывных. Дискретизация часто связана с деформацией алгебраических соотношений, которая может трактоваться как квантование. Простейший пример такого рода был приведен в курсе.

Курс содержал несколько примеров разностных операторов, обладающих симметриями, на которых основаны некоторые классические интегрируемые системы, в частности, гармонический осциллятор и комплексный анализ. На этих примерах на доступном для студентов уровне показано, как наличие указанных симметрий влечет ряд следствий, аналогичных непрерывным случаям, и какие возникают новые эффекты, связанные с дискретизацией.

5.3 Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и проблема реализации циклов. (А.А. Гайфуллин)

Лекция была посвящена одной из важнейших интегрируемых систем – цепочке Тоды – и ее приложениям к классической задаче алгебраической топологии — проблеме Н. Стинрода о реализации циклов.

Цепочка Тоды — интегрируемая система, описывающая систему частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием между соседними частицами. Первая часть лекции была посвящена изложению основных свойств цепочки Тоды: было выписано ее лаксово представление, первые интегралы, доказана интегрируемость по Лиувиллю.

Во второй части было показано, что цепочку Тоды можно естественным образом интерпретировать как динамическую систему на изоспектральном многообразии симметрических трехдиагональных вещественных матриц. Было рассказано о классических результатах К. Томеи, применившего эту динамическую систему для изучения топологических свойств этого изоспектрального многообразия, включая доказательство его асферичности и вычисление его фундаментальной группы.

Третья часть лекции была посвящена новому комбинаторному подходу к классической задаче топологии - проблеме Н. Стинрода о реализации циклов. Этот подход основан на реализации классов гомологий образами конечнолистных накрытий над изоспектральным многообразием симметрических трехдиагональных вещественных матриц, при этом ключевую роль играют те свойства этого многообразия, которые доказываются с использованием цепочки Тоды как динамической системы на нем.

6 Заключение

Резюмируя, мы можем с полным основанием сказать, что, несмотря на сжатые сроки, намеченные на 2010 год исследования были реализованы в полном объеме. Нет сомнения, что результаты работы, произведенной в течение указанного периода, послужат хорошей основой для успешной реализации плана работ научных исследований в 2011–2012 годах.

7 Список приложений

1) Код компьютерной программы. 2) Диск DVD с видеозаписью лекций школы. 3) Постер школы.