

Упаковки сфер и сферические коды

Алексей Тарасов

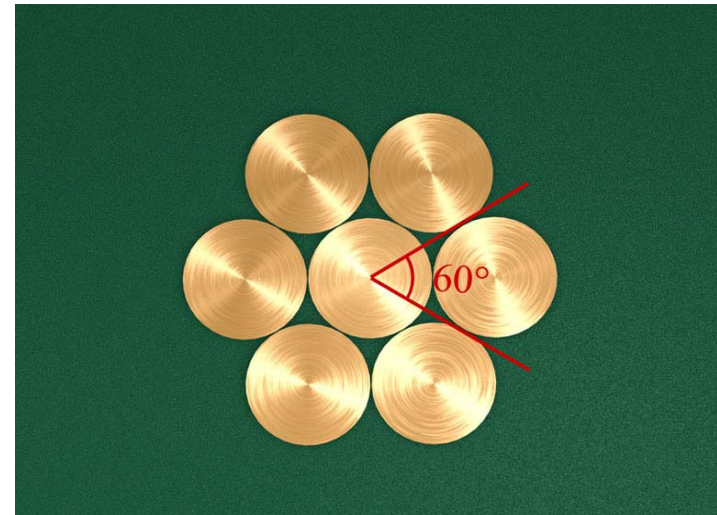
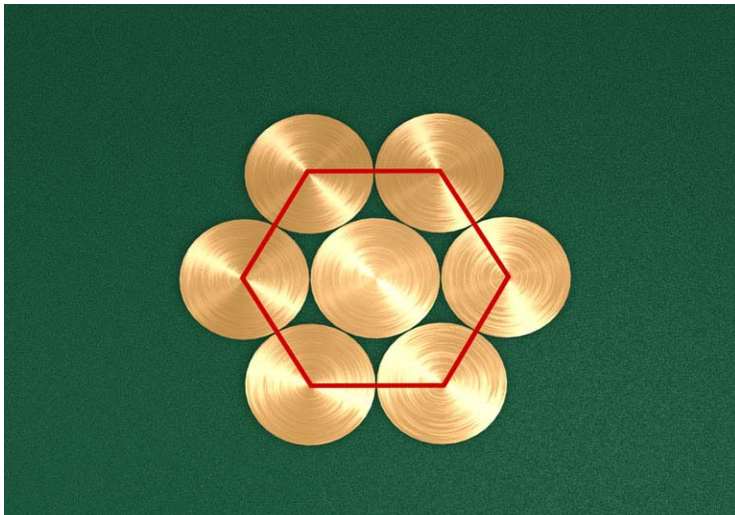
Фестиваль науки 2011

Оглавление

- Контактное число шаров
- Проблема 13 шаров
- Проблема Кеплера
- Проблема Таммеса

Что такое контактное число. На плоскости проблема контактного числа шаров звучит так: сколько монет одинакового радиуса может касаться одной заданной. Если вы расположите монеты на плоскости то ответ очевиден – 6.

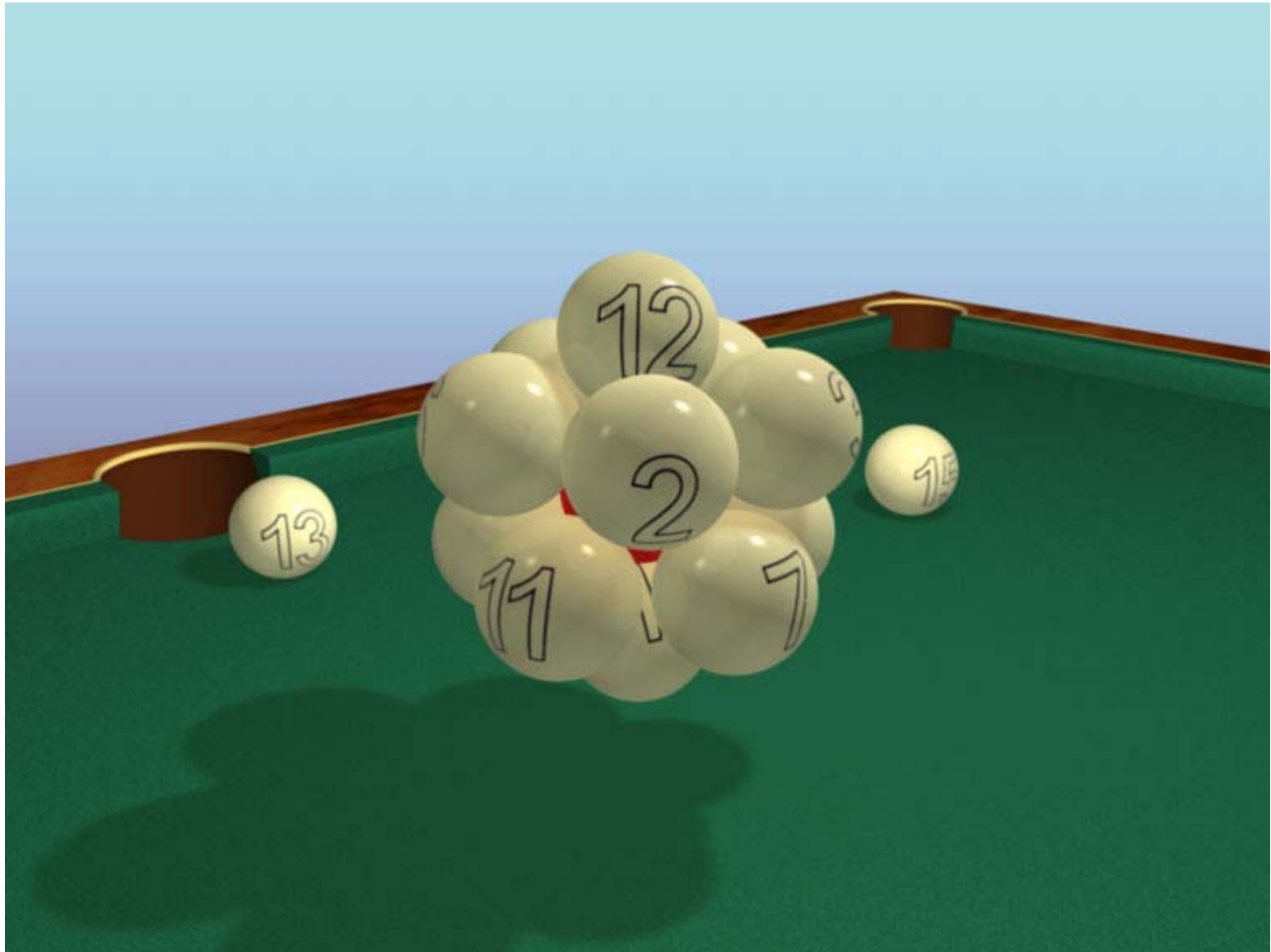
$$k(2)=6$$



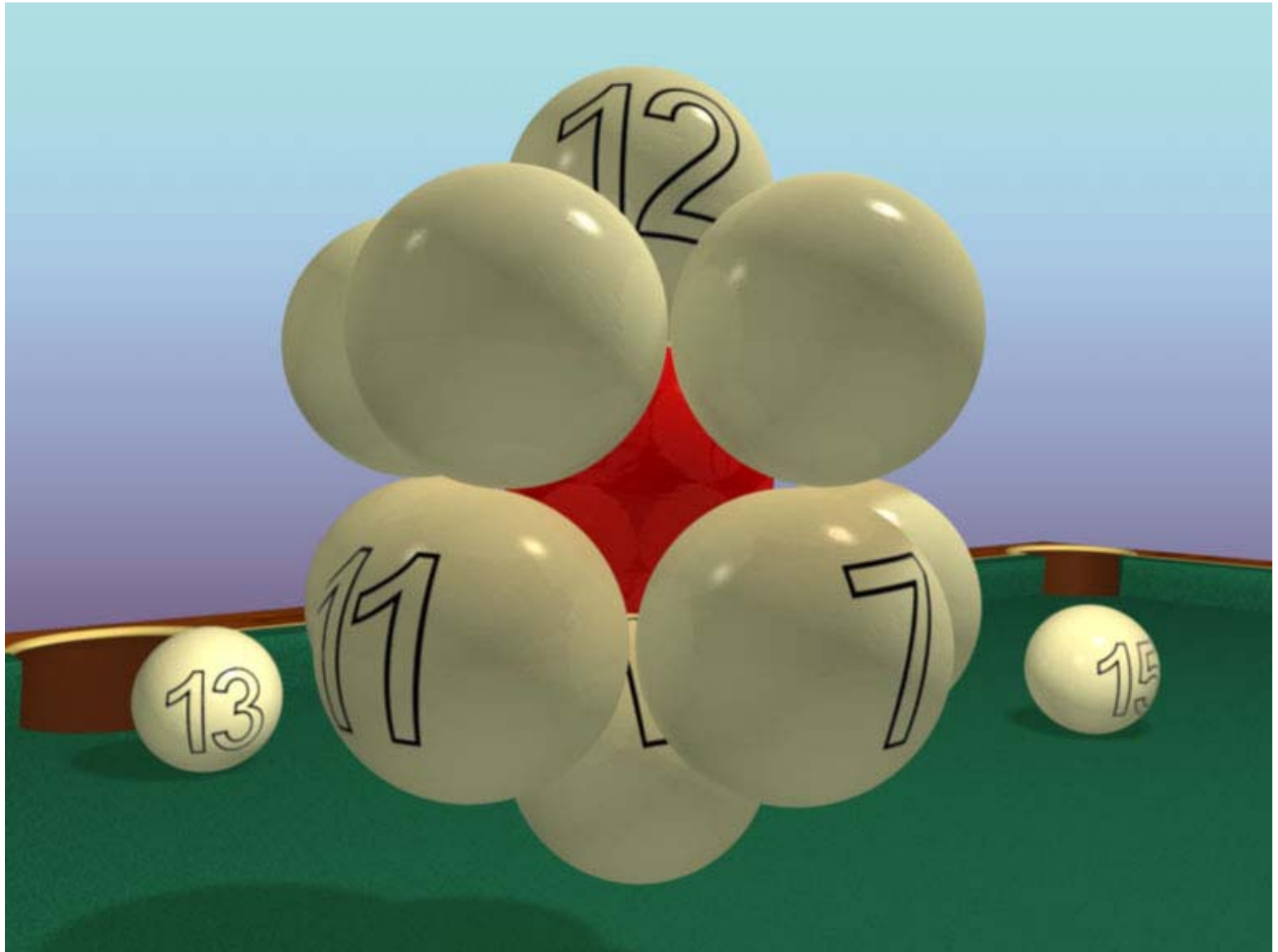
В размерности три проблема контактного числа шаров заключается в том, сколько бильярдных шаров (белых) может коснуться центрального (красного).

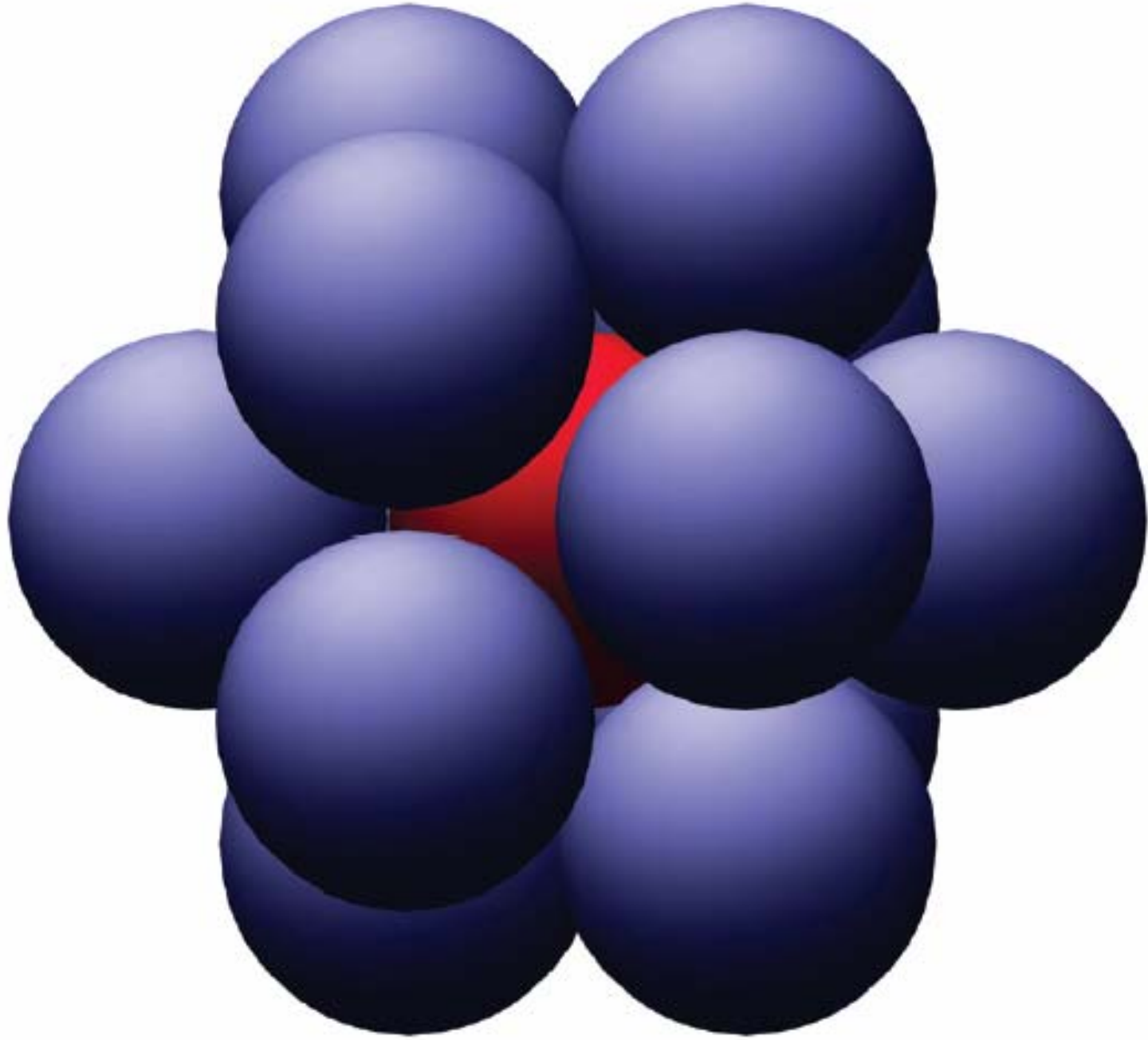


Самая симметрическая конфигурация получается, если 12 шаров расположены в местах, соответствующих вершинам правильного икосаэдра.



В знаменитой книге “Правильные многогранники” Коксетер показал, что для 12 шаров «так много пространства, что шары можно перекачивать, не отрывая от красного, и таким образом можно переставить любые два местами».





(Graphics: Detlev Stalling, ZIB Berlin)

История: Томас Хэрриот (1585)

Задача сэра Уолтэра Рэли:

Разработать формулу, которая позволяет определить сколько пушечных ядер лежит в груди.

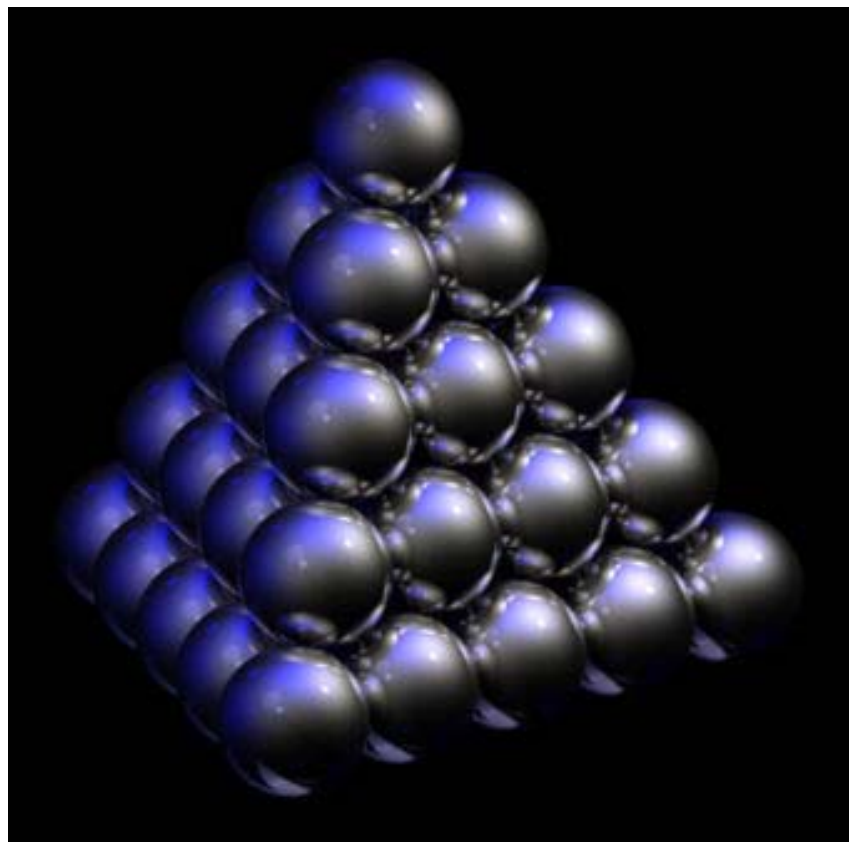
Хэрриот открыл, что для достаточно большой груды плотнейшей упаковкой является так называемая, гране-центро кубическая упаковка (FCC) :

$$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0.74048$$

В частности, Хэрриот доказал что
не меньше 12

$k(3)$





История: Иоганн Кеплер (1611)

И. Кеплер. Шестугольная снежинка, 1611

В этой маленькой брошюре Кеплер изучал следующие вопросы:

- Почему соты формируются как шестиугольники?
- Почему зерна граната имеет форму икосаэдра ?
- Почему лепесты цветов чаще всего группируются по 5?
- Почему снежинки выглядят именно так как они выглядят?

Гипотеза Кеплера (1611):

Самая плотная упаковка трехмерного пространства эквивалентными сферами = 0.74048...

Проблема Гильберта 18:3 (1900):

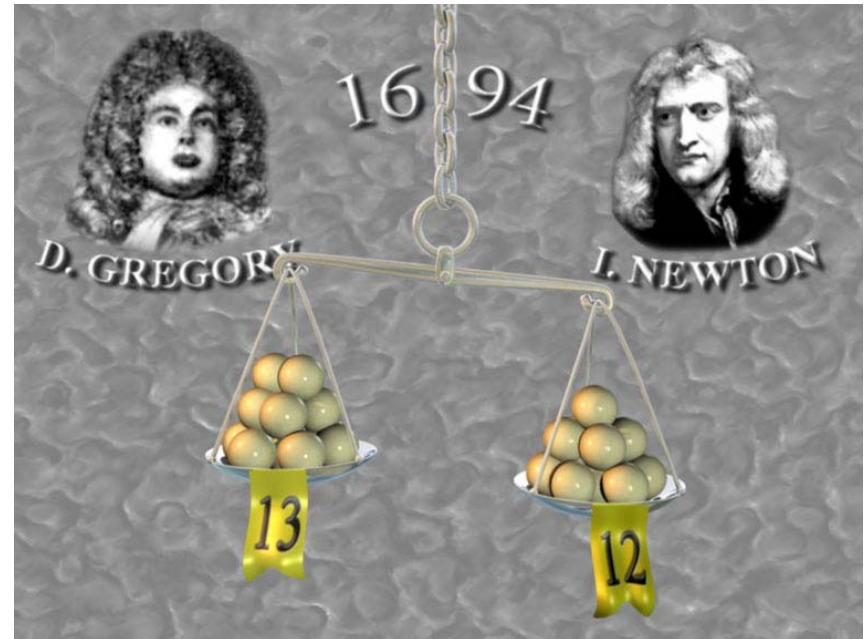
«Как можно расположить бесконечного число одинаковых тел заданной формы наиболее плотно в пространстве, например шаров заданного радиуса... Как можно сложить их вместе так, чтобы отношение заполненного пространства к незаполненному было как можно больше?»

История: Грегори и vs. Ньютон (1694)

4 мая, 1694 Дэвид Грегори прибыл с визитом в Кембридж для нескольких дней непрерывных дискуссий о научных материях с главным ученым на тот – Исааком Ньютоном. Грегори делал записи всего что говорил великий мастер. Одна из дискуссий была посвящена **числу 13**. В меморандуме Грегори была проблема 13 сфер.

Ньютон: $k(3)=12$ vs.

Грегори: $k(3)=13$ (Главным аргументом Грегори было: площадь единичной сферы $\approx 14.9 \times$ площади сферической шапочки радиуса 30° .)



Проблема Ньютона – Грегори = Проблема тринадцати сфер

История: Гаусс (1831)

Карл Фридрих Гаусс (1831):

Упаковка FCC это единственная плотнейшая решетка в размерности три.

В частности, $k^*(3)=12$, где $k^*(n)$ это максимальное контактное число для решетчатых упаковок.

Эрмит (1850,1874); Лебег (1856); Селлинг (1874);

Минковский (1883), ..., Малер (1992).

Коркин & Золотарев: $n=4$ (1872), $n=5$ (1877).

Блихфильд (1925, 1929, 1935): $n=6,7,8$.

Кон & Кумар (2003): $n=24$.

История: Щютте и в.д. Варден (1953)

Рейнольд Хопп думал, что он решил задачи тринадцати сфер в 1874. Однако, там была обнаружена ошибка – анализ ошибки был опубликован **Тосамом Хэйлсом** : Статус гипотезы Кеплера, *Mathematical Intelligencer*, **16** (1994), 47-58.

Окончательно проблема тринадцати сфер была решена **Kurt Куртом Щютте** и **Баартелом Лииндертом ван дер Варденом** в 1953. Они доказали:

$$k(3)=12$$

Это не конец истории про проблему 13 сфер

В 1956 год Джон Лич написал очень красивый (в 2 страницы) набросок доказательства проблемы 13 сфер.

Это доказательство попало в знаменитый сборник «Доказательства из КНИГИ», но было удалено во втором издании.

В. Цианг (2001)

Х. Маехара (2001, 2007)

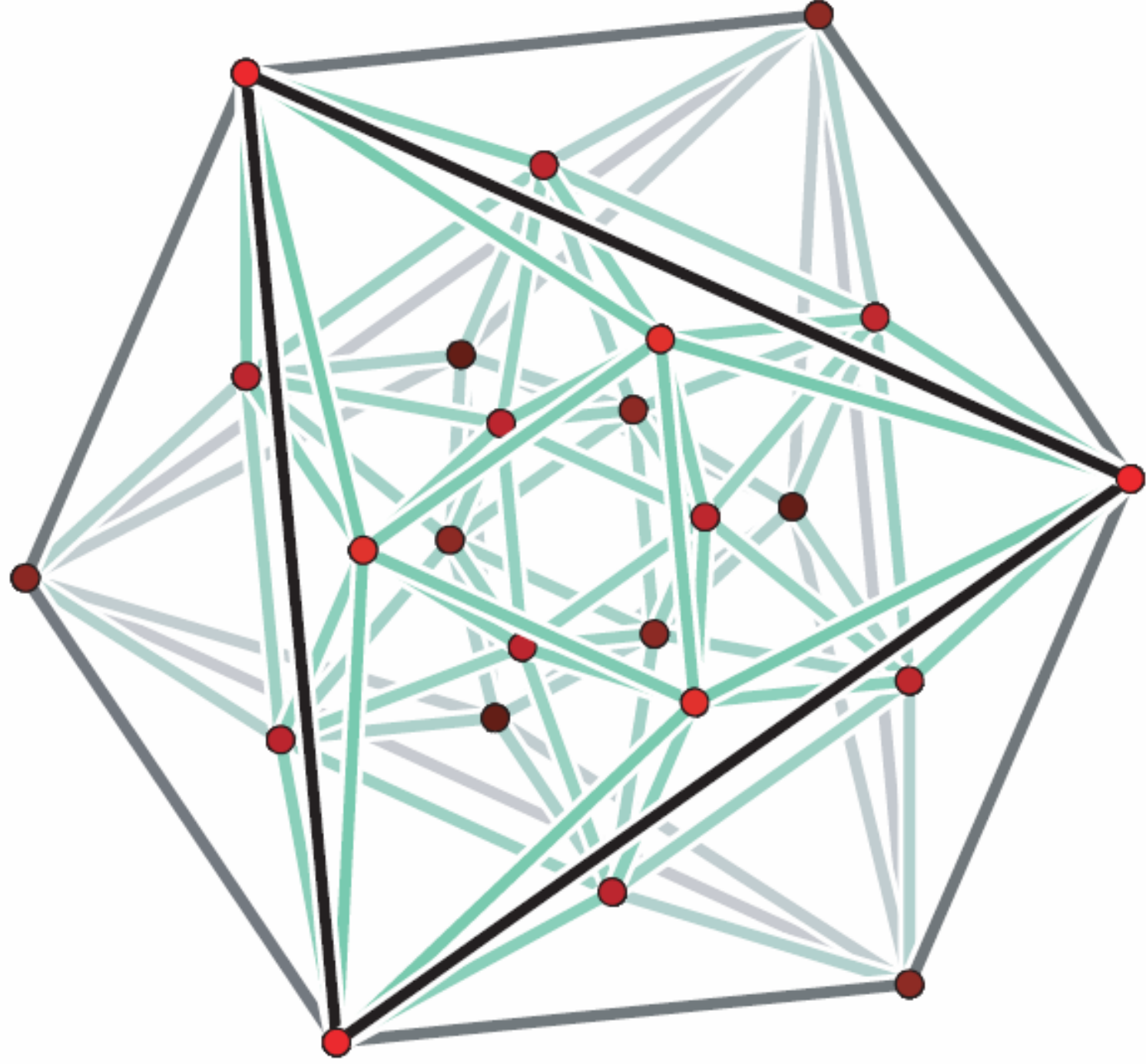
К. Бёрёцки (2003)

К. Анстрейхер (2004)

Мусин (2006)

$k(4)$ не меньше 24

$n=4$: Существуют 24 вектора с двумя нулевыми компонентами и двумя из ± 1 , например $(0, +1, 0, -1)$. Все они имеют длину $\sqrt{2}$ и минимальное расстояние $\sqrt{2}$. Правильно растянув мы получаем центры контактной конфигурации для 24 единичных сфер. А значит $k(4) \geq 24$. Выпуклая оболочка 24 точек дает знаменитый 4-х мерный многогранник — 24-ячеечник, открытый в 1852 Людвигом Шлёфли.



(Graphics: Michael Joswig/polymake [13])



История: Коксетер(1963)

Коксетер предложил верхние оценки для $k(n)$ в 1963 году для $n=4, 5, 6, 7$, и 8 эти оценки были 26, 48, 85, 146, и 244, соответственно.

Границы Коксетера основаны на гипотезе, что шапочки равного размера могут быть упакованы не плотнее чем упаковка, где триангуляция Делоне из центров сферических шапочек, состоящей из регулярных симплексов. Эта гипотеза была доказана **Бёрёцким** в 1978.

1979 - 2003

1993: **В.-И. Цианг** claims предложил доказательство $k(4)=24$ (а так же доказательство гипотезы Кеплера). Его работа до сих пор не получила положительного отзыва .

1999: **В.В. Арестов** и **А.Г. Бабенко** доказали что граница $k(4)<26$ не может быть улучшена (классическим) методом Дельсарта .

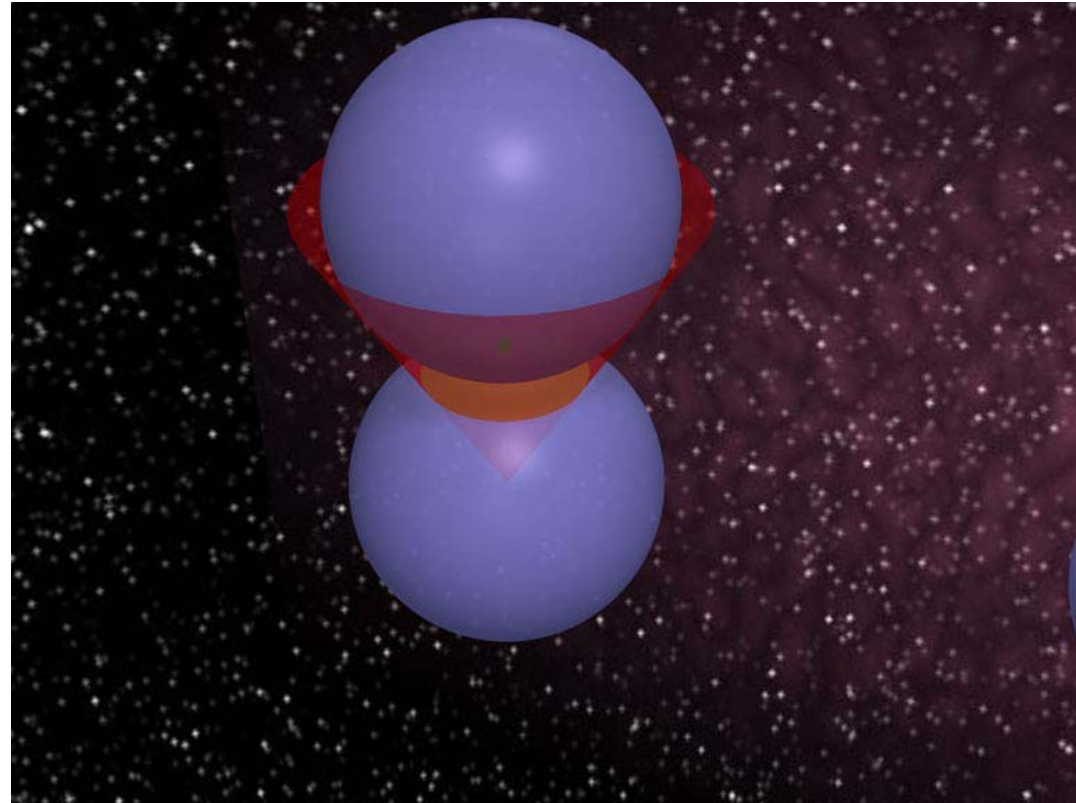
2003: $k(4)=24$

Мусин в 2003 году доказал что $k(4)=24$

Доказательство базируется на модификации метода Дельсарта.

Упаковка сферическими шапочками

Если единичные сферы касаются единичной сферы S , тогда для множества точек касания угловое расстояние между любой парой не меньше 60° . Значит, контактное число это максимальное число непересекающихся сферических шапочек радиусом 30° на S .

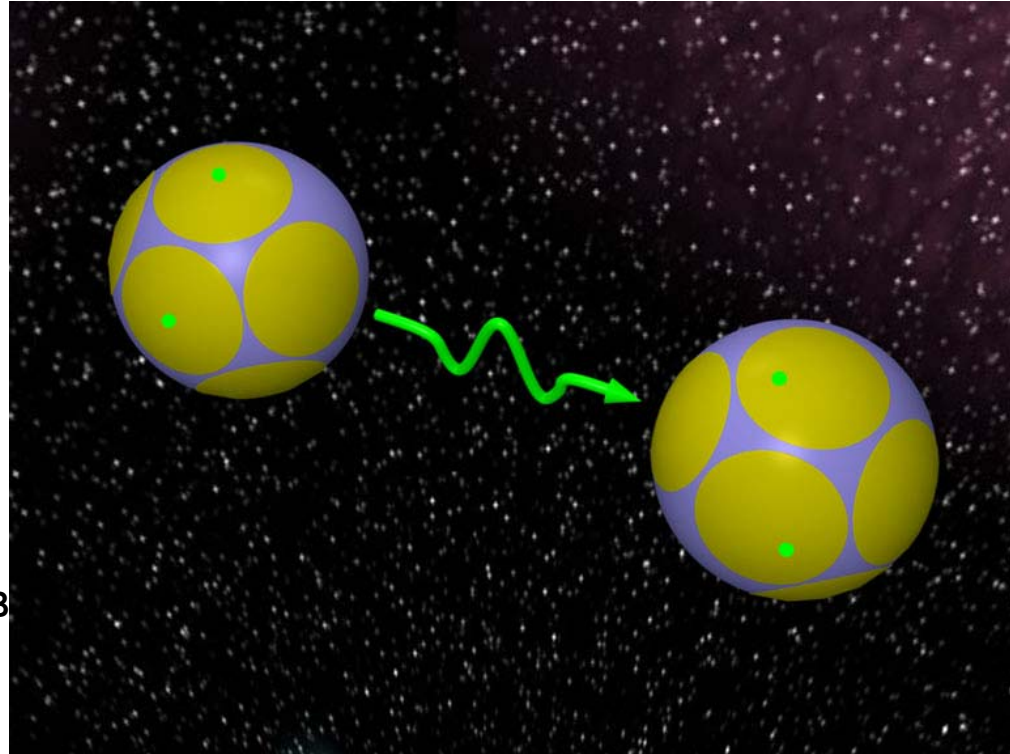


Сферические коды

К. Е. Шэннон

[“Математическая теория коммуникаций”, 1948] предложил использовать упаковки единичной сферы сферическими шапочками заданного радиуса r для *теории кодирования*.

Главным приложением этой теории была разработка принципов сигналов для передачи и хранения данных.



Задача Таммеса

Как должны упакованы N одинаковых сферических шапочек на единичной сфере, чтобы угловой диаметр шапочки был максимальным.

Таммес (диссертация) «Происхождение числа и расположения выходов в пыльце зерен», Гронинген.

Еще одна формулировка

Рассмотрим конечное множество точек X ,
 $|X|=N$.

Через $\varphi(X)$ обозначим минимальное
расстояние между парой точек из X .

$$D_N := \max_{X \subset S^2} \{\varphi(X)\}$$

Задача Таммеса

Ласло Фейеш Тот. (1943) $N=3,4,6,12,\infty$

К. Шютте, Б.Л. Ван дер Варден, (1951)
 $N=5,7,8,9$

Л. Данцер (1963) $N=10,11$

Р.Н. Робинсон (1961) $N=24$

О. Мусин, А.Тарасов (2010) $N=13$

