Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Сколковский институт науки и технологий
Лаборатория Понселе (CNRS)

Международная молодежная школа-конференция «Шестая летняя школа по геометрии и математической физике»

Красновидово, 24–29 июня 2016 г.

Сборник статей и тезисов докладов

* * *

International Summer School & Workshop "The 6th Summer School on Geometry and Mathematical Physics"

Krasnovidovo, June 24-29, 2016.

Proceedings and Abstracts

Москва
Издательство МЦНМО
2016 г.

УДК 51
ББК 22
М 43

Международная школа-конференция «Шестая летняя Школа по геометрии и математической физике»: Сборник статей и тезисов докладов. Красновидово, 24–29 июня 2016 г./ Б.А. Дубровин и др. – М.: МЦНМО, 2016. – 58 с.

ISBN 978-5-4439-0682-9

Эта книга содержит рассказ о летних школах по геометрии и математической физике, проводившихся в 2011-2015 гг. лабораторией геометрических методов математической физики (заведующий лабораторией проф. Б.А. Дубровин) . В 2016 году летняя Школа, шестая по счету, стала Школой-конференцией, где в качестве докладчиков также выступили слушатели самых первых школ. Кроме этого, благодаря французской программе научных обменов ПАРСЕКО, ряд лекций и докладов сделают математики и физики, работающие во Франции. В сборник также вошли короткие статьи и тезисы докладов, представленные участниками Шестой летней школы-конференции по геометрии и математической физике 2016 г. Книга предназначена для студентов математических специальностей старших курсов, аспирантов и научных работников.

Книга издана при поддержке РФФИ.

УДК 51
ББК 22

ISBN 978-5-4439-0682-9

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Лаборатория геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова
Сколковский институт науки и технологий
Лаборатория Понселе

Содержание

Л.А. АЛАНИЯ, Д.В. МИЛЛИОНЩИКОВ

ЛЕТНИЕ ШКОЛЫ ЛАБОРАТОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМ. Н.Н. БОГОЛЮБОВА

1. ЗИМНЯЯ ШКОЛА 2010 ГОДА.

Так получилось, что самым первым мероприятием созданной в 2010 году лаборатории геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова стала Школа по геометрии и матфизике. Школа была не летняя, а зимняя, и проходила она с 8 по 10 декабря 2010 года в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН: в МГУ в начале декабря аудитории обычно всегда бывают заняты и директор МИАН, академик Валерий Васильевич Козлов, любезно предоставил аудитории в МИАН для проведения занятий школы, за что организаторы Школы ему искренне благодарны. На Школу записалось большое количество слушателей, все миникурсы получились очень интересными и содержательными - это сразу определило самую высокую планку для всех последующих школ. Приведем ее программу:

- Б.А. Дубровин, “Введение в теорию гамильтоновых уравнений в частных производных”;
- И.А. Богаевский, “Потенциальные решения уравнения Бюргерса с исчезающей вязкостью”;
- А.А. Гайфуллин, “Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и проблема реализации циклов ”;
- И.А. Дынников, “Дискретные спектральные симметрии разностных операторов”;

Самая первая, она же «нулевая», школа понравилась всем участникам, она внушала оптимизм. Многие из ныне активно работающих математиков помнят, как проходили летние и зимние школы в 60-70-80-е годы прошлого века: лекции и занятия происходили за городом, в каком-нибудь пансионате, где бытовые проблемы и другие мелочи не отвлекали участников. В СССР бывали и летние школы, проводившиеся на берегу Черного моря. Летние школы по математике советской поры были прекрасны: ведь там у молодых слушателей была реальная возможность задать лектору вопрос или прямо на лекции или потом, вечером, подойти уже с хорошо продуманным вопросом. Можно было просто поговорить с известными математиками на самые разные (не обязательно математические) темы, обсудить с ними историю того или иного математического открытия. Главное, все это узнать не из книжки, а, как говорится, из первых рук! Именно про такой неформальный характер самых первых, «колмогоровских», летних школ и вспоминают спустя годы все их участники. Открытые задачи, которые формулируются прямо во время лекций, такие своеобразные задачи «на вырост» стали впоследствии ориентиром для самостоятельных исследований многих известных ныне математиков. Мы видим это ярко хотя бы на примерах наших ближайших коллег: Олег Мусин, будучи еще учеником в Колмогоровском интернате МГУ, услышал однажды на популярной лекции про задачу (восходящую еще к Кеплеру) о максимальном числе шаров одинакового радиуса, касающихся центрального шара (такого же радиуса), а потом, много лет спустя, Олег Мусин с блеском ее решил в размерности четыре. Александр Гайфуллин, привлеченный докладом И.Х. Сабитова о проблеме кузнечных мехов (решенной Сабитовым в 1996 году), занимается теорией многогранников, и в 2012 году доказывает многомерный аналог теоремы Сабитова о сохранении объема изгибаемого многогранника, работая под руководством Виктора Матвеевича Бухштабера над другими задачами алгебраической топологии. Подобных примеров можно привести много.

На фотографии – постер Зимней Школы 2010 г.

В 90-е годы о летних школах не приходилось и мечтать, наука и образование были словно забыты властями, многие наши коллеги и друзья в поисках лучшей судьбы покинули Родину. Уровень науки и образования стал неуклонно, год от года, снижаться. Тем, кто продолжал работать в вузах и научных институтах в России, за этим было просто больно наблюдать. В 2010 году у лаборатории им. Н.Н. Боголюбова появляется возможность сделать что-то реальное и нужное. За срок нашего гранта было организовано множество конференций с участием ведущих ученых из самых разных стран, создан прекрасный компьютерный класс, оборудованный по самым высоким стандартам, было еще очень много сделано. Но именно летние школы по геометрии и математической физике стали визитной карточкой нашей лаборатории.

Мы поставили перед собой такие задачи:

- попробовать вернуть, пусть на время летних школ ведущих математиков, выпускников советских (российских) вузов, оказавшихся волею судеб в разных уголках мира, для чтения небольших по продолжительности курсов лекций, восстановив тем самым прерванную в 90-е годы цепочку передачи знаний и опыта;

- сделать при этом упор на лекции на русском языке и быструю их публикацию в Интернете – в тот момент уже существовали возможности найти самые разные лекции на английском языке, а вот курсов лекций на русском языке (именно лекций, а не докладов), посвященных самым свежим научным результатам, в тот момент было в Сети совсем немного.

- создать видеоархив из лекций и опубликовать потом отредактированные конспекты лекций в виде книг.

Многие из сотрудников лаборатории были в разные годы участниками (и лекторами) летних школ и конференций за границей. Честно признаемся, что самые первые наши впечатления от зарубежных школ включали (помимо научной информации и впечатлений от докладов и лекций): прекрасные условия проживания, кофе-брейки (с натуральным кофе!), бейджики с именами для каждого участника, интернет-страничка с программой и разной полезной информацией, красивые цветные постеры, блокноты и ручки... Почему бы нам так не проводить летние школы в России – не забывая о таких приятных и полезных мелочах?

2. ПЕРВАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА, 2011 ГОД.

Первая летняя Школа проходила с 27 июня по 1 июля 2011 г. в пансионате «Воскресенское», что находится в 8 км от МКАД по Калужскому шоссе (теперь это Новая Москва). Как написал потом в своей поэме «Впечатления о летней школе» Антон Корчагин, участник первых школ: «...и жребий пал на Подмосковье». Практически сразу сложился и постоянный оргкомитет Первой Школы, и последующих летних школ, в составе: Б.А. Дубровин (председатель), Л.А. Алания, В.М.

Мануйлов, Д.В. Миллионщиков, Е.В. Троицкий. Программа лекций Первой школы получилась очень интересной. Чтобы это понять, достаточно посмотреть на список лекторов – среди них мы видим математиков и физиков самой первой мировой величины, настоящих лидеров своих направлений. Вот этот список (вместе с названиями соответствующих курсов):

- Б.А. Дубровин, «Введение в теорию Фробениусовых многообразий»;
- А.И. Нейштадт, "Усреднение возмущений в динамических системах";
- А.П. Веселов, «Цепочка Тоды и линейная алгебра»;
- М. Минеев, "Интегрируемая контурная динамика на комплексной плоскости";
- И.М. Кричевер, «Интегрируемые системы и конформные отображения».

Также были организованы специальные занятия – семинары для младшекурсников:

- И.А. Дынников, «Пространство модулей кривых»
- А.А. Гайфуллин, «Полиэдральные пространства неположительной кривизны».

Лекции проходили замечательно, было много содержательных вопросов от слушателей. Видеозаписи этих лекций можно и сейчас посмотреть на портале www.mathnet.ru

Семинарские занятия прекрасно дополняли лекции, они были ориентированы, прежде всего, на младшекурсников и проводились в очень неформальной и живой обстановке.

Приведем список слушателей Первой летней школы по геометрии и матфизике 2011 г.:

- Агапов Сергей (1-й курс мехмат НГУ)
- Алексеев Никита (аспирант СПбГУ, м.н.с. Лаборатории им. П.Л. Чебышева)
- Бирюков Олег (м.н.с. МГОСГИ, г. Коломна)
- Боголюбский Лев (1-й курс мехмат МГУ)
- Бойкий Роман (3-й курс матмех СПбГУ)
- Буркин Сергей (1-й курс мехмат МГУ)
- Васько Иван (аспирант физфак МГУ)
- Волокитина Евгения (аспирант Саратовского гос. Университета)
- Вялов Виктор (аспирант Лаборатории им. Чебышева, СПбГУ)
- Герасимова Мария (2-й курс мехмат МГУ)

- Глухов Евгений (1-й курс Мехмат МГУ)
- Игамбердиев Александр (аспирант Лаборатории им. Чебышева, СПбГУ)
- Карпухин Михаил (3-й курс мехмат МГУ)
- Козлов Иван (5-й курс мехмат МГУ)
- Корчагин Антон (3-й курс мехмат МГУ)
- Костицын Александр (2-й курс физфак МГУ)
- Краснов Владимир (аспирант МГОСГИ г. Коломна)
- Логинов Константин (1-й курс мехмат МГУ)
- Логунов Александр (4-й курс матмех СПБГУ, Лаборатория им.Чебышева)
- Лучников Никита (4-й курс мехмат МГУ)
- Мамедова Фируза (4-й курс мехмат МГУ)
- Назаров Антон (аспирант физфак СПбГУ, лаборатория им.Чебышева)
- Нилов Федор (4-й курс мехмат МГУ)
- Пономарёв Виктор (3-й курс мехмат МГУ)
- Прасолов Максим (5-й курс мехмат МГУ)
- Салиев Шодди (1-й курс мехмат МГУ)
- Смирнов Глеб (4-й курс мехмат МГУ)
- Тодоров Дмитрий (5-й курс матмех СПбГУ)
- Федоров Сергей (СПбГУ, ПОМИ РАН)
- Христофоров Михаил (5-й курс матмех СПбГУ, Лаборатория им. Чебышева)
- Чащин Денис (1-й курс мехмат МГУ)
- Шастин Владимир (5-й курс мехмат МГУ)

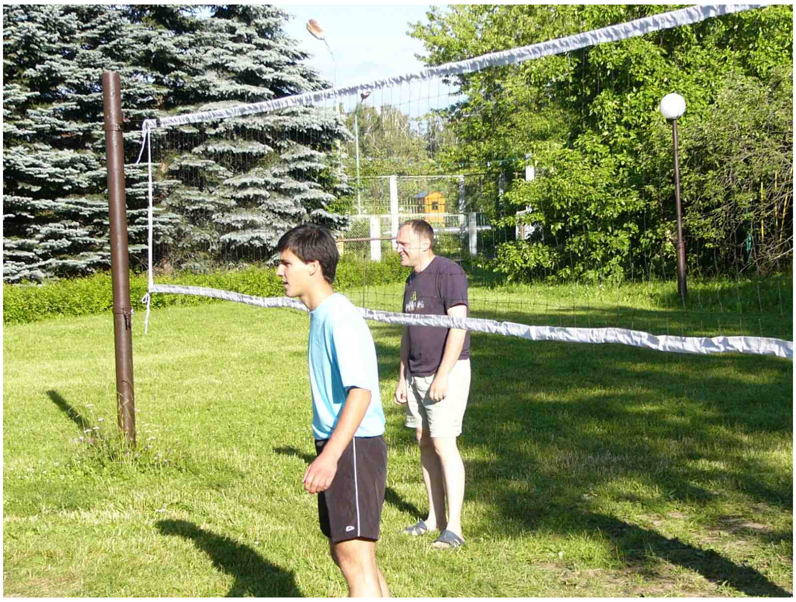
Владимир Шастин с первых минут работы Школы стал незаменимым помощником организаторов: взял на себя обязанности кинооператора и потом приложил много сил и умений к обработке видеофайлов и их размещению в интернете; также он организовывал все футбольные и волейбольные матчи. Таким же незаменимым человеком он был и на последующих школах.

3. ВТОРАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА, 2012 ГОД.

Вторая летняя Школа проходила снова в пансионате «Воскресенское» с 25 по 29 июня 2012 г.

Список миникурсов Второй летней школы 2012 г.

На снимке: слушатели Второй летней Школы 2012 года.



После лекций хорошо поиграть в футбол или в волейбол.
На снимке: А.А. Гайфуллин, А.Е. Миронов.

- Б.А.Дубровин, “Деформации пуассоновых структур и супермногообразия”;
- А.Н.Варченко, “Вещественная алгебраическая геометрия и интегрируемые системы”;
- П.Г. Гриневич, “Элементы теории римановых поверхностей и теорема Римана–Роха”;
- Р.Г. Новиков, “Введение в обратную задачу рассеяния для уравнения Шрёдингера”;
- А.Е.Миронов, “Функция Бейкера-Ахиезера в дифференциальной геометрии и математической физике”;

Список слушателей Второй летней Школы 2012 г.

- Сергей Агапов (НГУ, мех-мат, 1 курс магистратуры)
- Павел Бурангулов (МГУ, мех-мат, 3 год аспирантуры)
- Сергей Буркин (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Борис Васильевский (МГУ, мех-мат, 2 год аспирантуры)
- Андрей Войнов (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Мария Герасимова (МГУ, мех-мат, 3 курс)
- Денис Городков (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Валентина Давлетшина (НГУ, мех-мат, 1 год аспирантуры)
- Мария Елаева (МГУ, лаборатория им. Н.Н.Боголюбова)
- Михаил Карпухин (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Антон Корчагин (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Александр Костицын (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Артем Котельский (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Константин Логинов (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Илья Макаров (МГУ, мех-мат, 1 год аспирантуры)
- Александр Малахов (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Фируза Мамедова (МГУ, мех-мат, 5 курс)
- Гульнара Маулешова (НГУ, мех-мат, 1 курс магистратуры)

- Анна Москал (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Дмитрий Николаев (Липецкий ГТУ, 2 год аспирантуры)
- Надежда Павленко (МГУ, мех-мат, 3 курс)
- Ольга Пасека (МГУ, физфак, 2 год аспирантуры)
- Федор Покровский (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Виктор Пономарев (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Александр Почекета (МИНАН Украины, 2 год аспирантуры)
- Максим Прасолов МГУ (мех-мат МГУ, 1 год аспирантуры)
- Роман Разумовский (МГУ, мех-мат, 2 год аспирантуры)
- Глеб Смирнов (МГУ, мех-мат, 5 курс)
- Асиля Сулейманова (МГУ, мех-мат, 4 курс)
- Григорый Фельдман (МГУ, мех-мат, 5 курс)
- Денис Чащин (МГУ, мех-мат, 2 курс)
- Наталия Шаповал (Киевский НУ, мех-мат, 1 год аспирантуры)
- Владимир Шастин (МГУ, мех-мат, 1 год аспирантуры)
- Игорь Шнурников (МГУ, мех-мат, 3 год аспирантуры)
- Константин Щепин (МГУ, мех-мат, 4 курс)

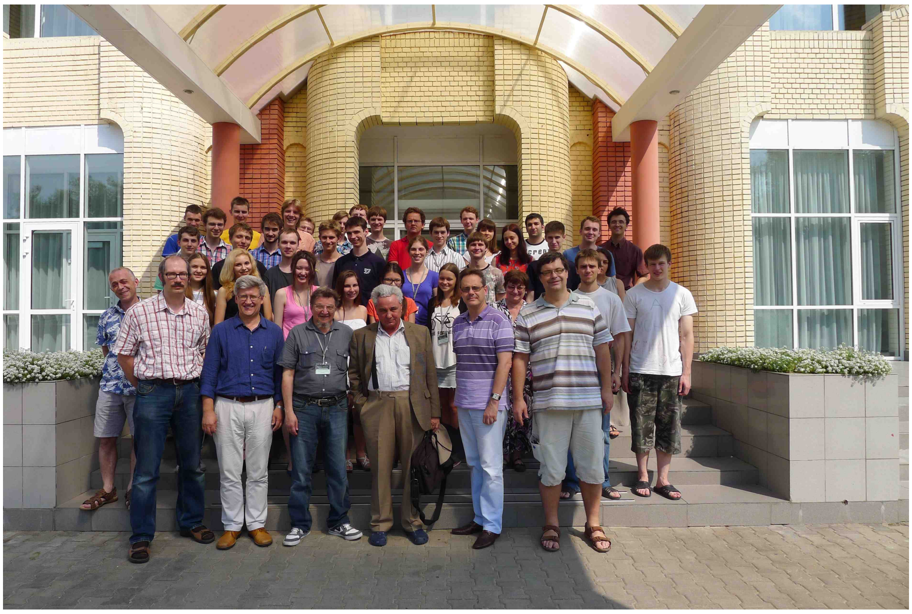
4. ТРЕТЬЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА, 2013 ГОД.

Третья летняя Школа началась ярко: самую первую лекцию прочитал выдающийся математик современности, академик Сергей Петрович Новиков. Лекция называлась «Дискретные треугольные системы», Сергей Петрович быстро перешел к самому широкому кругу вопросов математики и математической физики. Перед слушателями развернулась целая панорама событий, ярких идей и исторических параллелей. После его лекции молодые слушатели Школы буквально окружили Сергея Петровича, у них было столько вопросов к нему, что пришлось даже задержать начало обеда в тот день.

Вот полная программа лекций в 2013 году.

- Сергей Новиков, "Дискретные треугольные системы";
- Александр Белавин, "Инстантоны и ADHM-конструкция самодуальных решений уравнений Янга-Милса";

На снимке: после лекции С.П. Новикова.



На снимке: участники Третьей летней Школы 2013 г. Стоят в первом ряду (слева направо): Л.А. Алания, И.А. Дынников, А.П. Веселов, А.Г. Хованский, С.П. Новиков, В. Драгович, Д.В. Миллионщиков.

- Михаил Берштейн, "Модель Калоджера-Сазерленда, симметрические полиномы и вертексные операторы";
- Александр Буфетов, "Бесконечные детерминантные меры";
- Александр Веселов, ”Системы корней ии их обощения”;
- Владимир Драгович, "Пучки коник и кубик и волчок Ковалевской";
- Леонид Рыбников, "Когомологические действия алгебр Ли";
- Аскольд Хованский, "Выпуклая геометрия и алгебраическая геометрия";

Особенностью Третьей летней школы стало появление молодых, но уже известных, математиков в качестве лекторов. Леонид Рыбников, Михаил Бернштейн, Александр Буфетов вместе Александром Белавиным, Аскольдом Хованским, Александром Веселовым и Владимиром Драговичем составили прекрасный лекторский ансамбль.

Список слушателей Школы в 2013 г.

- Алешкин Константин (мех-мат МГУ, Москва);
- Асаинова Ольга (мех-мат МГУ, Москва);
- Болгарова Анна (мех-мат МГУ, Москва);
- Василевский Борис (мех-мат МГУ, Москва);
- Войнов Андрей (мех-мат МГУ, Москва);
- Герасимова Мария (мех-мат МГУ, Москва);
- Глухов Евгений (мех-мат МГУ, Москва);
- Городков Денис (мех-мат МГУ, Москва);
- Елаева Мария (Финакадемия, Москва);
- Карпухин Михаил (мех-мат МГУ, Москва);
- Корчагин Антон (мех-мат МГУ, Москва);
- Костицын Александр (мех-мат МГУ, Москва);
- Котельский Артем (мех-мат МГУ, Москва);
- Краснов Александр (МГОСГИ,, Коломна);
- Лебедев Александр (мех-мат МГУ, Москва);
- Логинов Константин (мех-мат МГУ, Москва);

- Ляшик Андрей (КНУ, Киев);
- Малахов Александр (мех-мат МГУ, Москва);
- Матушко Мария (ВШЭ, Москва);
- Медведева Яна (мех-мат МГУ, Москва);
- Нурышов Тулеген (мех-мат МГУ, Москва);
- Оганесян Вардан (мех-мат МГУ, Москва);
- Омельяненко Виктор (мех-мат МГУ, Москва);
- Покровский Федор (мех-мат МГУ, Москва);
- Ромаскевич Лена (мех-мат МГУ, Москва);
- Сапарбаева Баян (НГУ, Новосибирск);
- Сечкин Егор (мех-мат МГУ, Москва);
- Смирнов Глеб (мех-мат МГУ, Москва);
- Сулейманова Асиля (мех-мат МГУ, Москва);
- Толганбаева Анара (мех-мат МГУ, Москва);
- Трофимова Анастасия (ВШЭ, Москва);
- Тужилин Михаил (мех-мат МГУ, Москва);
- Цимбалов Юрий (мех-мат МГУ, Москва);
- Чащин Денис (мех-мат МГУ, Москва);
- Шастин Владимир (мех-мат МГУ, Москва);
- Черябкин Андрей (МГОСГИ,, Коломна);
- Щепин Константин (мех-мат МГУ, Москва).

5. ЧЕТВЕРТАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА, 2014 ГОД.

Четвертая летняя Школа проходила с 24 по 27 июня 2014 года снова в «Воскресенском», но никто из участников не догадывался тогда, что этот пансионат принимает нас в последний раз.

Программа в 2014 году снова порадовала новыми темами и новыми именами: мы были очень рады, когда узнали, что Александр Михайлов (Лидс, Великобритания) и Валентин Овсиенко (Реймс, Франция), Владимир Соколов (ИТФ им. Л.Д. Ландау), Сергей Ландо (ВШЭ), Максим Казарян (МИАН им. Стеклова) и Алексей Пенской (ВШЭ. МГУ) согласились прочитать лекции для слушателей Школы.

Список миникурсов в 2014 году.

- Б.А.Дубровин, "Случайные матрицы и интегрируемые системы".
- М.Э.Казарян, "Математическая физика чисел Гурвица".
- С.К.Ландо, "Введение в геометрию пространств модулей алгебраических кривых".
- А.В.Михайлов, “Фрагменты теории интегрируемых систем”;
- В.Ю.Овсиенко, ”Разностные операторы, пространства модулей и фризы Кокстера”;
- А.В.Пенской, “Введение в спектральную геометрию”;
- В.В.Соколов: "Пары Лакса и иерархии интегрируемых уравнений”Высшие симметрии, законы сохранения и классификация интегрируемых систем".

На снимке: участники Четвертой летней Школы 2014 г.

Список слушателей летней школы 2014 г.

- Агапов Сергей (Новосибирск, НГУ);
- Алешкин Константин (Москва, МГУ);
- Асаинова Ольга (Москва, МГУ);
- Ахмедова Валерия (Москва, ВШЭ);

- Войнов Андрей (Москва, МГУ);
- Гаврикова Надежда (Москва, МГУ);
- Глухов Евгений (Москва, МГУ);
- Городков Денис (Москва, МГУ);
- Давлетшина Валентина (Новосибирск, НГУ);
- Елаева Мария (Москва, Финакадемия);
- Зубов Дмитрий (Москва, МГУ);
- Кантонистова Елена (Москва, МГУ);
- Карпухин Михаил (Москва, МГУ);
- Корчагин Антон (Москва, МГУ);
- Костицын Александр (Москва, МГУ);
- Котельский Артем (Москва, МГУ);
- Лавров Петр (Москва, МГУ);
- Логинов Константин (Москва, МГУ);
- Малахов Александр (Москва, МГУ);
- Мамедова Фируза (Москва, МГУ);
- Матушко Мария (Москва, ВШЭ);
- Маулешова Гульнара (Новосибирск, НГУ);
- Медведева Яна (Москва, МГУ);
- Мкртчян Александр (Красноярск, СФУ);
- Назаров Алексей (Москва, МГУ);
- Некрасова Татьяна (Красноярск, СФУ);
- Новичков Павел (Москва, ВШЭ);
- Оганесян Вардан (Москва, МГУ);
- Покровский Федор (Москва, МГУ);
- Сапарбаева Баян (Новосибирск, НГУ);
- Сечкин Георгий (Москва, МГУ);

- Смирнов Глеб (Москва, МГУ);
- Трофимова Анастасия (Москва, ВШЭ);
- Чащин Денис (Москва, МГУ);
- Шаталова Анна (Москва, ВШЭ);
- Яковлев Иван (Москва, ВШЭ).

6. ПЯТАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА, 2015 год. ПЕРЕЕЗД В КРАСНОВИДОВО.

Мегагрант под руководством Б.А. Дубровина закончился в 2014 году и зимой следующего года встал вопрос о следующей Летней школе: состоится ли вообще Шестая летняя школа? Долгое время не удавалось найти источник финансирования, но тут на помощь пришел Фонд «Династия» Дмитрия Зимина. Заявка лаборатории на проведение сезонной школы получила поддержку этого Фонда, при этом оказалось, что пансионат «Воскресенское» стал нам уже «не по карману», и организаторам пришлось переводить летнюю Школу «за Можай». Пансионат МГУ Красновидово в Можайском районе Подмосковья предложил организаторам очень хорошие условия и вопрос был быстро решен. Сразу скажем, никто из участников Школы не пожалел о переезде: прекрасная природа и территория пансионата «Красновидово», удивительно красивый залив Можайского водохранилища - все это самым лучшим образом повлияло на атмосферу проведения Школы. А когда к нам приехал с лекцией Сергей Петрович Новиков, то стало окончательно ясно - Школа снова удалась. Рассказывал Сергей Петрович, как всегда, ярко и эмоционально, его исторические и математические примеры завораживали слушателей, в своей вводной лекции он словно раздвигал научные горизонты. Те участники Школы, которым посчастливилось слушать эту лекцию, будут ее вспоминать очень долго.

Лекторы Пятой летней Школы в 2015 г.

- С.П. Новиков, «Разностные операторы второго порядка на графах и преобразования Лапласа»;
- А.Ю. Буряк, «Матричное интегрирование и перечисление графов»;
- М.С. Вербицкий, «Многообразия Калаби-Яу»;
- П.Г. Гриневич, «Метод обратной задачи»;
- И.А. Дынников, «Геометрическая классификация гомеотопий поверхностей»;
- В.В. Шевчишин, «Симплектические пучки Лефшеца и топология четырехмерных многообразий»;

Список слушателей летней Школы в 2015 году:

На снимке участники Пятой летней Школы 2015 года, Красновидово.

- Алешкин Константин (Москва, МГУ);
- Гагонов Александр (Москва, мехмат МГУ);
- Городков Денис (Москва, мехмат МГУ);
- Жила Александра (Москва, мехмат МГУ);
- Зайнуллина Мейрамгул (Новосибирск, НГУ);
- Закатов Илья (Долгопрудный, МФТИ);
- Зейникешева Индира (Астана, Казахстанский Филиал МГУ);
- Зубов Дмитрий (Москва, мехмат МГУ);
- Ивина Светлана (Москва, ВШЭ);
- Кириллов Илья (Москва, мехмат МГУ);
- Кононов Яков (Москва, ВШЭ);
- Малахов Александр (Москва, МГУ);
- Малиновская Олеся (Москва, ВШЭ);
- Матушко Мария (Москва, ВШЭ);
- Маулешова Гульнара (Новосибирск, НГУ);

- Назаров Алексей (Москва, мехмат МГУ);
- Павленко Надежда (Москва, мехмат МГУ);
- Новичков Павел (Москва, ВШЭ);
- Покровский Федор (Москва, МГУ);
- Рунова Станислава (Долгопрудный, МФТИ);
- Рябичев Сергей (Москва, ВШЭ);
- Сечкин Георгий (Москва, мехмат МГУ);
- Сивкин Владимир (Москва, мехмат МГУ;
- Соломадин Григорий (Москва, мехмат МГУ);
- Улюмджиев Дмитрий (мехмат МГУ);
- Урынбаева Ляззат (Новосибирск, НГУ);
- Чащин Денис (Москва, мехмат МГУ);
- Элияшев Юрий (СФУ);

7. ШЕСТАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА. 2016 Г. ВМЕСТЕ СО СКОЛТЕХОМ И ЛАБОРАТОРИЕЙ ПОНСЕЛЕ.

Наступил 2016 г. Он принес новые проблемы и заботы: Фонд Дмитрия Зимина «Династия» был закрыт в 2015 г, несмотря на все усилия научной общественности его сохранить. На помощь организаторам первой пришла Лаборатория Понселе CNRS (французский аналог РАН), работающая в Москве на базе МЦНМО. Нам удалось заинтересовать Сергея Нечаева, нового директора лаборатории Понселе, планом проведения совместной школы. Чуть позже, в состав оргкомитета Школы-2016 вошел Игорь Моисеевич Кричевер: он привлек Сколковский институт науки и технологий (Сколтех) в качестве еще одного со-организатора и расширил научную программу Школы. При этом, чтобы провести очередную Летнюю школу, организаторам пришлось изменить ее формат и преобразовать ее в Школу-конференцию молодых ученых. На самом деле, организаторы давно думали о таком изменении формата: многие молодые участники первых летних школ добились серьезных научных успехов и нам давно хотелось включить их доклады в программу Школы. В состав докладчиков и лекторов Школы вошло несколько ученых, работающих во Франции: это стало возможным благодаря французскому гранту PARSECO и лаборатории Понселе.

Лекции в 2016 году согласились прочитать:

- Сергей Новиков (Мериленд, США, и МИАН);

- Владимир Акулин (Париж, Франция);
- Владимир Вершинин (Монпелье, Франция);
- Сабир Гусейн-Заде (МГУ);
- Иван Дынников (МИАН и МГУ);
- Петр Зограф (ПОМИ РАН);
- Виктор Клепцын (Ренн, Франция);
- Ольга Кравченко (Лион, Франция);
- Сергей Ландо (ВШЭ);
- Олег Огиевецкий (Марсель, Франция);
- Армен Сергеев (МИАН);
- Михаил Цфасман (Марсель, Франция, ИППИ РАН);
- Сеня Шлосман (Марсель, Франция, ИППИ РАН);

Кроме этого в специальный «молодежный день» школы-конференции запланированы доклады молодых ученых - участников Школы-конференции:

- Дениса Городкова (МИАН);
- Евгения Горского (Университет Калифорнии (Дэвис) и ВШЭ);
- Ивана Лимонченко (МГУ);
- Вардана Оганесяна (МГУ);
- Надежды Павленко (МГУ);
- Максима Прасолова (МГУ);
- Григория Соломадина (МГУ);
- Владимира Шастина (МГУ);

Также на Шестую летнюю школу-конференцию записались:

- Бекетов Максим (МФТИ);
- Гейко Роман (МИФИ);
- Гладких Андрей (МФТИ);
- Денисов Константин (МГУ);

- Дружков Константин (МГУ);
- Закатов Илья (МФТИ);
- Зорина Александра (МГУ);
- Корчагин Антон (МГУ);
- Логинов Константин (ВШЭ);
- Малеев Игорь (МГУ);
- Николаенко Станислав (МГУ);
- Первых Светлана (МГУ);
- Попов Кирилл (Беркли, США);
- Рухович Алексей (МГУ);
- Рябичев Андрей (ВШЭ);
- Салтыков Иван (МГУ);
- Семенова Татьяна (МГУ);
- Сечин Иван (МФТИ);
- Сударикова Анастасия (МГУ);
- Статник Евгений (ВШЭ);
- Тимирова Асия (МГУ);
- Улюмджиев Дмитрий (МГУ);
- Чащин Денис (МГУ);
- Чичерин Иван (МГУ);
- Шаталова Анна (ВШЭ);
- Элияшев Юрий (СибФУ);

8. В КАЧЕСТВЕ ЗАКЛЮЧЕНИЯ.

Нам стало интересно проследить за судьбой некоторых слушателей первых наших школ. Приятно отметить, что многие из них уже защитили кандидатские диссертации и стали работать как профессиональные математики, это в частности (пусть простят нас те, кого мы упустили в этом перечислении):

- Максим Прасолов, к.ф.-м.н., ассистент кафедры высшей геометрии механико-математического факультета МГУ ;
- Владимир Шастин, к.ф.-м.и., научный сотрудник лаборатории геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова, мех-мат. МГУ;
- Иван Козлов, к.ф.-м.н., ассистент кафедры дифференциальной геометрии и приложений, механико-математический факультет МГУ;
- Валентина Давлетшина, к.ф.-м.н., ассистент кафедры геометрии и топологии, механико-математический факультет Новосибирского геосударственного университета;
- Олег Бирюков (защита диссертацию назначена на июнь 2016 г.), ассистент кафедры математики Коломенского социально-гуманитарного университета;

Некоторые участники летних школ, которые в настоящий момент учатся в аспирантуре, тоже добились серьезных научных успехов и некоторые из них были удостоены наград, премий и именных стипендий:

- Михаил Карпухин, аспирант кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ лаборатории геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова, мех-мата МГУ (научный руководитель А.В. Пенской), был среди победителей конкурса имени Августа Мебиуса, конкурса Фонда Династия, а также был удостоен стипендии Саймонса и Добрушинской стипендии;
- Вардан Оганесян, аспирант кафедры высшей геометрии и топологии мехмата МГУ лаборатории геометрических методов математической физики им. Н.Н. Боголюбова, мех-мата МГУ (научный руководитель О.И. Мохов), удостоен стипендии Саймонса и приглашен докладчиком в 2016 г. на важный математематический форум в Гейдельберге: Heidelberg Laureat Forum 2016.
- Денис Городков, аспирант МИАН им. В.А. Стеклова РАН (научный руководитель А.А. Гайфуллин), победитель конкурса Августа Мебиуса в номинации «студенты»;
- Индира Зейникешева, студентка мех-мат факультета МГУ (научный руководитель Т.Е.Панов) получила I премию на конкурсе студенческих работ Казахстанского Филиала МГУ (Астана, Казахстан);

Видео-записи лекций Летних школ по геометрии и математической физике можно найти на портале www.mathnet.ru, кроме этого, вышли из печати два сборника лекций первых двух школ:

[1] Геометрические методы в математической физике. Лекции летней школы. Воскресенское, 27.06.2011–1.07.2011, (под редакцией Б.А.Дубровина). - М.: Изд-во МГУ, 2012.

[2] Геометрические методы в математической физике 2. Лекции летней школы, Воскресенское, 25-29.06.2012 (под редакцией Б.А.Дубровина). - М.: Изд-во Макс-пресс, 2014.

О ПОЭМЕ АНТОНА КОРЧАГИНА.

Лучшим рассказом о самой первой Летней школе является, вне всякого сомнения, поэма «Впечатления о Летней Школе», написанная ее слушателем Антоном Корчагиным (он же замечательно ее и проиллюстрировал). Мы поместили это художественное произведение в настоящем сборнике с любезного согласия автора. Произведение это, как всякий замечательный образчик наивного искусства (русский лубок, живопись Анри Руссо и Пиросмани, сказки Бориса Шергина), написано ярко и свежо, а нам, организаторам Летних школ, эта поэма доставила ни с чем не сравнимое чувство радости и удовлетворения от хорошо проделанной работы: случилось так, что многое, к чему мы стремились, над чем работали, как оказалось, нашло положительный отклик у молодых участников школы. А один из замечательных рисунков Антона стал фактическим логотипом наших летних школ, на постерах всех последних летних школ он неизменно присутствует. Если приглядеться, то на доске, изображенной на этом рисунке (а этот рисунок есть и на обложке настоящего сборника), выписано уравнение ассоциативности, именно эта формула, написанная Б.А. Дубровиным на его лекции в 2011 году, и стала самой первой формулой на наших летних школах.

Антон Корчагин

Отрывки из

«Впечатлений о Летней Школе
(В четырёх главах)»

. . .
И вот приехал к нам Дубровин
Делиться опытом своим
Он профессурой был любим
За то, что было в нём не мало
Того, на что равняться надо,
За свой безмерный вклад в науку. . .
Студентов не вводил он в скуку
. . .
Всегда скупое на подарки
И грандиозные зачатки
Правительство решило враз,
Важнейший подписав указ,
О том, чтоб щедро поощрить
Души чистейшие порывы,
Которые бывают ныне

Так часто трудновыполнимы:
Итак, Дубровин захотел
Создать ну что-то вроде сказки,
Чтоб роковой судьбы удел
Имел не только чёрны краски...
...

...

Итак, решил Дубровин летом,
Невольно скованный обетом
От гранта пользу извлекать,
Коллег по кафедре послать
На лучезарное приволье –
И жребий пал на Подмосковье,
Где тихий мирный уголок
Случайно взор его привлёк.
Там милый прудик окружали
Громады сосны и дубы
И всем они напоминали
Причуды сказочной страны.

...

Мне нужно миру рассказать
О той прекрасной летней школе,
Где можно было на приволье
Внимать красы лесных дубрав,

. . .

Лихой автобус появился
И взяв студентов весь народ,
Он из Москвы печальной скрылся,
Несясь стремительно вперёд.
Студенты очень рады были,
Что школу эту им открыли,
Друзья мои в окно глядят,
О спектрах бойко говорят,
И в школу поскорей хотят
За парту сесть и уж решать
Задач неписанную рать.

. . .

Перед доской стоит Дубровин
(Читатель знает уж о нём)
Невозмутим он и спокоен. . .
Научным запылал огнём
Он неожиданно для нас
И сразу видно – это ас.
Тут полились определенья
И нет уже совсем сомненья
В красе теорий КДВ,
Хотя она, увы, абстрактна
И, зачастую, непонятна.
И мы хотим решать уже
Задач невиданную рать,
Но вот и лекция опять. . .

Профессор Веселов стоит уж
И взор кидает на ребят
О чём расскажет нам сей муж,
Глаза его огнём горят.
Цепочки Тоды появились,
Ребята в них тотчас влюбились,
Следы мелькают на доске,
Не время думать о тоске
Как здорово, что просто можно,
Определитель посчитав,
Без всяких шуток и забав,
Вдруг заключить совсем несложно
Серьёзный факт из диффуров
Сказать тут можно только «Ох!»

Но вот пошла вся школа дружно
Цереры слуг вкушать плоды,
Передохнуть всем точно нужно –
На шведский стол все забрели.
Об этом я потом скажу:
Я сильно кушать здесь хочу.
И улетим мы тотчас мгновенно
На семинары. Несомненно
Должны задачки там решать
Студенты, но судьба
Такого счастья не дала
И что мы видим: вот опять
Мотивы лекций начались
И монологи полились.

Студенты в нынешнее время
Безмерно ленны и, увы,
Они внимают только бремя
В вопросах, что задать должны.
Для многих даже в созерцанье
Или урок чистописанья
Оборотился лекций дух,
Для них уж лектор – как пастух. . .
Но никогда я не теряю
Надежды на студентов рой.
Он возродится! Ты постой

Их хоронить, я уверяю
Тебя сто крат, но уж ЕГЭ
Наделало вреда везде…

…

Но мы от курса отклонились…
Вот продолжаю я писать,
О летней школе рассуждать.
В роскошном зале мы увидим
Убранств неписанную рать,
Официанты, грязь завидев,
Её уже спешат убрать.
Повсюду свежесть тут летает,
И запах вкусный зазывает
Студента взять салат фруктовый
И шашлыка кусок здоровый,
А в уголке холодный морс
Геометров стоит отрада,
В жару – бесценная награда,
Какой-то мальчик тут унёс
Бокал последний – не беда,
Его несут опять сюда.

И каждый день три раза были
Мы в этом месте золотом,
Но всё равно не позабыли
Мы о событии одном.

Один разок Леван Аланья,
Студентов угадав желанья,
Устроил пир, и были всё:
И морс, и шашлыков полно,
И на зелёной свежей травке
Студенты и профессора
Торжествовали допоздна.
...

Летит веселье, вдруг нежданно
Три дамы пир уж покидают,
И как-то странно и печально:
Еда уж их не привлекает.
Они укромное местечко
Нашли и, три словечка
Промолвив тихо меж собой,
На пир глядят они с тоской.
Втроём, теснясь, уселись как-то,
Туда-сюда на гамаке
Они летают налегке,
Потом пришли на пир обратно.
О, Дамы – Ваш прекрасный ум

Рождал во мне немало дум.

. . .

Но всё ж замечу я для Вас,
Что Дамы окрыляют нас.
Без Дам, наверно, ты скучаешь,
Когда на лекции сидишь,
Но с ними всё ты забываешь,
И за доской уж не следишь.
Их облики меня пленяли раньше,
В развитии ушёл я дальше,
Стал к платонизму склонен я,
Хоть это и утопия.
Младая дева, что сей стих читает,
Я обращаюсь только к Вам,
Сюда приехать нужно Вам!

. . .

Как я люблю, закат встречая,
Гулять подолгу и мечтать,
Волненья, счастье вызывая,
На сердце наступает благодать.
Но как гулял я в тишине
В последней опишу главе.
Увы, сегодня воскресенье,
И роковое провиденье
Назначило на завтра мне
Контрольную работу по Дискре. . .

. . .

Но как мне быть с тобой, читатель,
Когда потерян лиры звук,
Когда сосед твой – упрекатель,
И не протянет руку друг?
На снисхождение надеюсь,
Надеждой – только ей я греюсь,
Я краток буду в остальном...
...

Все были заняты и рады
В круговороте школьных дел,
Но как и всякие отрады,
Их грустный ожидал удел.
Конец! Пора обратно.
Автобус ждёт. Но непонятно,
Зачем обратно ехать нам,
Когда нам лучше здесь, чем там?
Но счастье вечно не бывает –
Пять дней – и нам пора,
Автобус катит со двора,
Москва с закатом нас встречает.
Что за прекрасны были дни,
Хвала Лаборатории.

Конечно, труд мой не являет
Философических идей,
Он только в школу зазывает

Записываться поскорей.
Не пожалеешь ты, читатель,
Мой драгоценнейший приятель,
Найдёшь ты в школе для себя
Всё то, что ждёт душа твоя.
И, может быть, однажды летом
Мы познакомимся с тобой
Когда прекрасною порой
Приедем в школу мы с приветом. . .

Boris Dubrovin
SISSA
via Bonomea 265
34136 TRIESTE Italy

5 июня 2016 г.

Организаторам летней школы
«6-ая Международная молодёжная летняя
школа-конференция по геометрическим
методам математической физики»

Дорогие коллеги,

я бы хотел выразить свою признательность и поддержку всем тем, кто принимает участие в организации в этом году уже шестой летней школы по геометрическим методам математической физики.

Начавшись шесть лет назад как небольшая летняя школа для студентов, организованная Лабораторией геометрических методов математической физики имени Н. Н. Боголюбова, за прошедшие годы школа не просто повторялась и стала ежегодной традицией, но и продолжала развиваться.

Очень рад, что в этом году наша школа переходит на еще более высокий уровень: теперь в ее организации участвует не только Лаборатория геометрических методов математической физики имени Н. Н. Боголюбова, но и матккластер Сколтеха и русско-французская лаборатория Понселе. Также замечательно то, что школа трансформируется в школу-конференцию и в этом году стала международной.

Соответственно и работа организаторов в этом году стала еще более сложной и трудной, и всем им я очень благодарен.

С наилучшими пожеланиями,
Б.А. Дубровин

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

ВАРДАН ОГАНЕСЯН

Если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z,w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [1]). Кривая Γ, определенная соотношением $R(z,w) = 0$, называется *спектральной кривой.* Если

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi,$$

то $(z,w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z,w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом.* Ранг является общим делителем порядков операторов m и n. Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функцию Римана [2]. Случай ранга больше 1 значительно сложней. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье [3] для невырожденной эллиптической кривой. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена Кричевером [4]. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым [5]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой был найден Моховым [6], [7]. Миронов в [8] нашел новые методы построения коммутирующих дифференциальных операторов. С помощью этих методов были явно найдены первые примеры коммутирующих операторов ранга 2 и произвольного рода.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x).$$

Предположим, что $u(x)$ имеет полюса в точках $a_1, a_2, ...$ И в окрестности a_i

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k} + \frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}} + ... + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i) + O((x-a_i)^2).$$

В работе [9] получены следующие результаты

Теорема 1. Если $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором M порядка $4g+2$ и M, L_4 являются операторами ранга 2, то $u(x)$ может иметь полюс только порядка 4, $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, где

$k=0,...,n_i$, $l=1,2,3$. Также $\varphi_{i,4r-1}=\varphi_{i,4r-3}=0$, где $r=n_i+1,...,g$. Функция $u(x)$ не может иметь изолированного полюса в бесконечности.

Следствие. Допустим, что $u(x)$ эллиптическая, периодическая или рациональная функция и $u(x)$ не имеет изолированного полюса в бесконечности. Допустим, что a_1 – единственный полюс в фундаментальном параллелограмме, в периодической ленте или на комплексной плоскости. Оператор $L_4=\partial_x^4+u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и M, L_4 являются операторами ранга 2 тогда и только тогда, когда $\varphi_{1,-4}=g(4g+1)(4g+3)(4g+4)$, $\varphi_{1,4k-l}=0$, где $k=0,...,g$, $l=1,2,3$.

Следствие. Пусть $\wp(x)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса удовлетворяющая уравнению $(\wp'(x))^2=4\wp^3(x)-g_2\wp(x)-g_3$. Оператор

$$L_4=\partial_x^4+n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x),$$

где $n\in\mathbb{N}$, коммутирует с оператором порядка $4n+2$ тогда и только тогда, когда $\wp(x)$ является решением уравнения $(\wp'(x))^2=4(\wp(x))^3+g_2\wp(x)$. Вычисления показывают, что при $n<8$ спектральная кривая невырожденна для почти всех g_2.

Теорема 2. Если L_4 коммутирует с дифференциальным оператором M порядка $4g+2$, M и L_4 являются операторами ранга 2 и $u(x)$ имеет полюс в точке a_i, то решения уравнения $\psi^{(4)}(x)+u(x)\psi(x)=\lambda\psi(x)$ имеют особенности в a_i вида $x^{\sigma_{i,r}}g(x)$, где $r=1,2,3,4$ и $g(x)$ голоморфна в a_i,
$\sigma_{i,1}=\frac{1}{2}(1-4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,2}=\frac{1}{2}(1-4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,3}=\frac{1}{2}(5+4n_i-\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$
$\sigma_{i,4}=\frac{1}{2}(5+4n_i+\sqrt{1-16n_i-16n_i^2})$.
Это означают, что собственные функции всегда имеют точки ветвления. Следовательно, L_4 не коммутирует с дифференциальным оператором нечетного порядка.

Список литературы

[1] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy,Proc. London Math. Soc. (2),**21** (1923), 420–440.

[2] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, Функц. анализ и его приложения, 11:1 (1977), 15–31

[3] Jacques Dixmier, “Sur les algebres de Weyl”, Bulletin de la Societe Mathematique de France 96 (1968): 209–242.

[4] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, Функц. анализ и его прил., 12:3 (1978), 20–31

[5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, УМН, 35:6(216) (1980), 47–68

[6] О. И. Мохов, “Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой”, УМН, 37:4(226) (1982), 169–170

[7] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:6 (1989), 1291–1315

[8] A.E. Mironov. Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra. Invent. math. (2014) 197:417-431

[9] V. S. Oganesyan, “Explicit characterization of some commuting differential operators of rank 2”, International Mathematics Research Notices, (2016) doi: 10.1093/imrn/rnw085.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

РЯД ПУАНКАРЕ, АССОЦИИРОВАННЫЙ С ФИЛЬТРАЦИЕЙ НЬЮТОНА

ГРИГОРИЙ Д. СОЛОМАДИН

Мультииндексная фильтрация на кольце $\mathcal{O}_{V,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/(f)$ функций на аналитической гиперповерхности $\{f = 0\}$ использовалась в [4]. Основная идея заключалась в сопоставлении диаграмме Ньютона f фильтрации, в которой ряд Пуанкаре (см. [2]) мог бы быть посчитан, а ответ сопоставлен с соответствующей дзета-функцией монодромии. Мотивацией для этого являлись совпадение ряда Пуанкаре и дзета-функции монодромии в некоторых случаях ([1]), а также некие соотношения между ними в других (например, [3]). Одной из естественных фильтраций на кольце $\mathcal{O}_{V,0}$, соответствующей диаграмме Ньютона $\Gamma = \Gamma_f$, является дивизориальная фильтрация [7]. Она определяется дивизорами торического разрешения особенности f, соответствующими граням Γ. В первых работах, однако, она считалась неудобной для вычислений, в отличие от некой другой [4]. Последняя определяется по диаграмме Ньютона f, и поэтому называется ньютоновой. Впоследствии ситуация с двумя упомянутыми фильтрациями изменилась до противоположной. Фильтрация, считавшаяся "упрощением", оказалась трудной для вычислений. Наконец, иная фильтрация была рассмотрена в [5].

Ряд Пуанкаре $P(\underline{t})$ (хронологически определенной) "первой", или ньютоновой, фильтрации впоследствии оказался лишенным топологической инвариантности ([8]).

Докладчиком получен ряд результатов. Доказана неотрицательность коэффициентов ряда Пуанкаре $P(\underline{t})$ ньютоновой фильтрации. Изучена зависимость ряда Пуанкаре $P(\underline{t})$ от коэффициентов ростка f, имеющего фиксированную диаграмму Ньютона: $\Gamma_f = \Gamma$. Далее, получена явная формула для ряда $P(\underline{t})$ в случае ростка f функции от двух переменных в общем положении. Последний результат обобщает полученную ранее формулу для $P(\underline{t})$ ([6]). При доказательстве разработаны новые вычислительные методы для ряда $P(\underline{t})$.

Список литературы

[1] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade: The Alexander polynomial of a plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic. Int. J. Math. 14, no.1, 47—54 (2003)

[2] С. М. Гусейн-Заде, “Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике и его приложения”, УМН, 65:3(393) (2010), 5—42

[3] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade: Poincare series and zeta function of the monodromy of a quasihomogeneous singularity. Math. Res. Lett. 9, 509—513 (2002).

[4] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade: Multi-variable Poincare series associated with Newton diagrams. Journal of Singularities 1, 60—68 (2010).

[5] A. Lemahieu: Poincare series of embedded filtrations. arXiv:0906.4184. (2011)

[6] S. M. Gusein-Zade: On a Newton filtration for functions on a curve singularity. arXiv:1206.0135 [math.AG] (2012)

[7] S. M. Gusein-Zade: On divisorial filtrations associated with Newton diagrams. arXiv:1008.4659 [math.AG] (2010)

[8] Г. Соломадин: Ряд Пуанкаре фильтрации, ассоциированной с диаграммой Ньютона, и топологический тип особенности. Вестник Московского университета 4, с. 24—28 (2015)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТИПЫ СПЕКТРОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛАМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ СИНГУЛЯРНЫМИ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА.

АЛЕКСЕЙ Л. НАЗАРОВ

Алгебраическая кривая и дивизор на ней служат источниками данных для построения функций Бейкера-Ахиезера, которые являются собственными для одного или нескольких дифференциальных операторов, связанных коммутационными соотношениями [1]. Функции, возникающие как потенциалы для этих операторов, позволяют проинтегрировать нелинейные уравнения, описывающие физические процессы (цепочка Тода, уравнения Кадомцева-Петвиашвили, синус-Гордона и др.).

Собственные функции БА одномерного оператора Шредингера строятся по гиперэллиптической кривой Г [1] следующим образом: они имеют полюса 1-го порядка в точках дивизора и ассимптотику $\psi(x,z) = e^{ikx}(1+o(1/k))$, где $z = 1/k$ – локальная координата в окрестности точки Вейерштрасса $P = \infty$; квазиимпульс определяется dp – абелевым дифференциалом второго рода, таким, что вблизи точки P он имеет разложение $dp = dk + O(1)$.

Рассмотрим оператор $L = -\partial_x^2 + u(x)$ с конечнозонным потенциалом и z-мероморфными собственными функциями БА. Тогда справедливы утверждения:
1) Функци $\psi(x,z)$ являются x-мероморфными [1].
2) Особенности потенциала $u(x)$ имеют вид $\frac{n(n+1)}{x^2}$, особенности $\psi(x,z)$ имеют вид $\frac{d_{-n}}{x^n} + \frac{d_{-(n-2)}}{x^{n-2}} + ...$ [3].
3) На множестве точек римановой поверхности (контуре), где функции $\psi(x,z)$ ограничены существует скалярное произведение, индефинитное в полюсах $\psi(x,z)$ по переменной x в малой окресности действительной прямой [2].
4) L - симметричен в пространстве функций $\psi(x,z)$ с особенностями п.2) относительно скалятрного произведения п.3) [2]; обозначим это пространство F^L.
5) На контуре возможно ввести обладающий важными для физических приложений (например, в теории струн) мультипликативными свойствами аналог пребразования Фурье в пространстве F^L [2].
5) Контур интегрирования для записи разложения по собственным функциям определяется соотношением: $Im \int_0^z dp = 0$ [2], тем же, которым определяется спектр для оператора с регулярным потенциалом.

В теории конечнозонного интегрирования принято вводить нормировку дифференциала квазиимпульса таким образом, чтобы его периоды по любым циклам были чисто вещественны [4], это обеспечивает однозначность мнимой части интеграла квазиимпульса везде на римановой поверхности.

В работе исследуется вопрос, какой вид могут иметь спектры оператора Шредингира в пространстве функций F^L. Зача в более конкретной постановке звучит как: какое множество точек на комлексной плоскости образуют нулевые линии уровня мнимой части абелевых интегралов с полюсом первого порядка в бесконечности и чисто вещественными периодами.

Теорема 1. *1) Количество топологических типов спектров операторов Шредингера конечнозонных рода g - конечно.*
2) Для сингулярного оператора Шредингера конечнозонного рода 1 имеется 3 допустимых топологических типа спектра. Для сингулярного оператора Шредингера конечнозонного рода 2 имеется 6 допустимых топологических типов спектра. Все эти топологические типы реализуются.

Проведен численный эксперимент, позволивший проверить допустимость тех или иных топологических типов, и привести конкретные числовые занчения параметров римановой поверхности и квазиимпульса на ней, отвечающих каждому из допустимых типов спектра для родов 1 и 2.

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, УМН, 31:1(187) (1976), 55–136

[2] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, “Сингулярные конечнозонные операторы и индефинитные метрики”, УМН, 64:4(388) (2009), 45–72

[3] J. J. Duistermaat, F. A. Grunbaum. Differential equations in the spectral parameter. Communications in Mathematical Physics, 103 (1986), no. 2, 177–240.

[4] И. М. Кричевер, “Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса”, Функ. анализ и его прил., 20:3 (1986), 42–54

[5] J. A. Jenkins, Univalent Functions and Conformal Mapping, Springer, Berlin (1958)

[6] А. К. Звонкин, С. К. Ландо, Графы на поверхностях и их приложения, М.: МЦНМО (2010)

[7] G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1957)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

О ГАМИЛЬТОНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ УРАВНЕНИЙ АССОЦИАТИВНОСТИ

НАДЕЖДА А. ПАВЛЕНКО

В случае трех примарных полей уравнения ассоциативности (уравнения Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде) могут быть представлены в виде интегрируемой недиагонализуемой однородной системы гидродинамического типа (О.И. Мохов, [1]). При этом, как было установлено О.И.Моховым и Е.В.Ферапонтовым, гамильтонова геометрия соответствующей системы гидродинамического типа существенно зависит от вида метрики уравнения ассоциативности в рассматриваемых плоских координатах: в одном из важнейших случаев ими была найдена локальная гамильтонова структура, задаваемая плоской метрикой, а в другом - доказано, что таких гамильтоновых структур не существует.

В докладе будут представлены совместные результаты О.И. Мохова и автора, полностью решающие в случае трех примарных полей проблему классификации уравнений ассоциативности, обладающих локальной однородной гамильтоновой структурой первого порядка, задаваемой плоской метрикой, в представлении в виде системы гидродинамического типа.

Работа велась за счет средств гранта РНФ №16-11-10260.

Список литературы

[1] Мохов О.И.: Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. №3. С.85–192; English transl. in Russian Math. Surveys. 1998. V.53. №3. P. 515–622.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

УСЛОВИЯ КОНЕЧНОСТИ В КРУЧЕНОЙ K-ТЕОРИИ.

МАРИЯ А. ГЕРАСИМОВА

В своей работе [1] В.Матаи, Р. Мелроуз и И. Зингер разработали теорию индекса для проективных семейств псевдодифференциальных операторов. Иначе говоря, такое семейство $\{D_b, b \in X\}$ на слоях расслоения

$$\phi : M \to X$$

с базой X, типичным слоем F, -это набор локально эллиптических семейств для открытого покрытия базы X, действующих на конечномерных векторных расслоениях фиксированного ранга. Проективные векторные расслоения определеяют целочисленный класс, класс Диксмье-Дуади, $\Theta \in H^3(X, \mathbb{Z})$. Тогда при предположении, что $\Theta \in TorH^3(X, \mathbb{Z})$, можно определить аналитических и топологических индекс D_b как элементы крученной K-теории со скручивающим элементом Θ, и они равны.
В.Нистор и Е. Троицкий в своей работе [2], [3], [4] рассматривают семейства эллиптических операторов, инвариантных под действием семейства групп Ли. Операторы, инвариантные относительно действия семейства групп Ли $\mathcal{G} \to B$, будем называть калибровочно-инвариантными.
Для определения калибровочно-эквивариантного индекса необходимо определить и изучить свойства групп $K^i_{\mathcal{G}}(Y)$ калибровочно-эквивариантной K-теории для любого локально-тривиального расслоения $Y \to B$, на котором $\mathcal{G}$ действует гладко, поскольку они являются естественной областью значений для индекса калибровочно-инвариантных семейств эллиптических операторов. Оказывается, что эти группы удовлетворяют обычным свойствам групп эквивариантной K-теории, однако возникают новые интересные свойства, связанные с тем, что расслоение $\mathcal{G} \to B$ не тривиально. В условиях *конечной голономии* эти группы устроены хорошо. Более того, если $C^*(\mathcal{G})$ -обертывающая C^*-алгебра расслоения компактных групп Ли, то $K^j_{\mathcal{G}}(B) \cong K_j(C^*(\mathcal{G}))$, если $\mathcal{G} \to B$ удовлетворяет условию конечной голономии.Алгебра $\mathcal{C}^*(\mathcal{G})$ изоморфна прямой сумме полей конечномерных матричных алгебр над накрытием над B.
Мы доказываем, что класс Диксмье-Дуаиди этих полей может быть получен из единственного класса в $H^2(B, Z(G) \cap G'))$, где G' -коммутант. Более точно, если $\hat{B}$ -универсальное накрытие над B и $B' = \hat{B} \times_{\pi_1(B,b_0)} (Aut(G)/Aut_0(G))$, пусть

$$f_\sigma : B' \to B_\sigma = B \times_{\pi_1(B,b_0)} (Aut(G)/Aut_0(G))\sigma.$$

В случае когда $\mathcal{G}$ удовлетворяет условиям конечной голономии препятствие $\chi' \in H^2(B', Z(G) \cap G')$ и инвариант Диксмье-Дуади связаны следующим образом:

$$(f_\sigma)^*(f_*(\chi_\sigma)) = \sigma_*(\chi'),$$

где $\sigma_* : H^2(B', Z') \to H^2(B', \mathbb{Z}/d_\sigma\mathbb{Z})$ и $f_* : H^2(B_\sigma, \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \to TorH^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$.
Тем самым, установлена связь между условиями конечной голономии для групп калибровочно-эквивариантной K-теории и условием принадлежности $TorH^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00357.

Список литературы

[1] V. Mathai, R. B Melrose, I. M Singer, The index of projective families of elliptic operators. Geometry and Topology, volume 9, 2005, pp.341-373

[2] V. Nistor, E. Troitsky, An index for gauge-invariant operators and the Dixmier-Douady invariant. Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004) No.1, 185-218.

[3] V. Nistor, E. Troitsky, The Thom isomorphism in gauge-equivariant K-theory. In: C*-algebras and elliptic theory, Birkh?user Trends in Math. series, 2006, pp.213-245

[4] V. Nistor, E. Troitsky, Analysis of gauge-equivariant complexes and a topological index theorem for gauge-invariant familie, Russian Journal of Mathematical Physics January 2015, Volume 22, Issue 1, pp 74-97

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОСОБЫХ ВЕКТОРОВ МОДУЛЕЙ ВЕРМА НАД АЛГЕБРОЙ ВИРАСОРО

Д.В. МИЛЛИОНЩИКОВ

Алгеброй Вирасоро Vir называется бесконечномерная алгебра Ли, определенная своим базисом $\{C, L_i, i \in \mathbb{Z}\}$ и коммутационными соотношениями:

$$[L_i, C] = 0, \ \forall i \in \mathbb{Z}, \quad [L_i, L_j] = (i-j)L_{i+j} + \frac{i^3 - i}{12}\delta_{i+j,0}C.$$

Модуль $V(h, c)$ над алгеброй Vir называется модулем Верма, если он свободен, как модуль над универсальной обертывающей алгеброй $U(Vir^-)$ подалгебры $Vir^- {=} \langle \{L_i\}, i{<}0\rangle$, и при этом он порождается некоторым вектором v таким, что

$$Cv = cv, \ L_0 v = hv, \quad L_i v = 0, \ i > 0,$$

где $c, h \in \mathbb{C}$. Как векторное пространство модуль $V(h, c)$ может быть задан своим бесконечным базисом v, $L_{-i_1} \dots L_{-i_s} v$, $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_s$, $s \geq 1$. Модуль Верма $V(h, c)$ является $\mathbb{Z}_+$-градуированным: $V(h, c) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} V_n(h, c)$, $V_n(h, c) = \langle L_{-i_1} \dots L_{-i_s} v, \ i_1{+}\dots{+}i_s{=}n\rangle$. Легко видеть, что $V_n(h, c)$ является собственным подпространством оператора L_0, которое соответствует собственному значению $h{+}n$: $L_0(L_{-i_1} \dots L_{-i_s} v) = (h + i_1 + \dots + i_s)L_{-i_1} \dots L_{-i_s} v$.

Ненулевой вектор $w \in V(h, c)$ называется *особым*, если $L_i w = 0, \forall i > 0$.

Из теоремы Каца, а также классических результатов Фейгина и Фукса, следует, что в модуле Верма $V(h, c)$ найдется особый вектор w с градуировкой n, если и только, если существуют такие два натуральных числа p и q, а также комплексное число $t \neq 0$, такие, что $pq = n$ и

$$c = c(t) = 13 + 6t + 6t^{-1}, \quad h = h_{p,q}(t) = \frac{1-p^2}{4}t + \frac{1-pq}{2} + \frac{1-q^2}{4}t^{-1}.$$

Верно также и следующее утверждение: для фиксированных натуральных чисел p и q и для комплексного праметра t модуль Верма $V(h_{p,q}(t), c(t))$ содержит однородный особый вектор $w_{p,q}(t)$ градуировки pq, при этом вектор $w_{p,q}(t)$ определен однозначно с точностью до умножения на константу:

$$w_{p,q}(t) = S_{p,q}(t)v = \sum_{|I|=pq} P^I_{p,q}(t) L_{-I} v = \sum_{i_1+\dots+i_s=pq} P^{i_1,\dots,i_s}_{p,q}(t) L_{-i_1} \dots L_{-i_s} v,$$

где символ $S_{p,q}(t)$ обозначает некоторый элемент в $U(Vir^-)$. Коэффициенты $P^I_{p,q}(t)$ являются полиномами от t и t^{-1}. Он выбран так, что коэффициент $P^{1,\dots,1}_{p,q}(t)$ равен единице. Также $S_{p,q}(t) = S_{q,p}(t^{-1})$.

В 1988 г. Бенуа и Сент-Обан [2] нашли явную формулу для серии $S_{1,p}(t)$:

$$S_{1,p}(t) = \sum_{i_1 + \dots + i_s = p} \frac{(p{-}1)!^2 t^{s-p}}{\prod_{l=1}^{s-1} \left((\sum_{q=1}^{l} i_q)(p{-}\sum_{q=1}^{l} i_q) \right)} L_{-i_1} \dots L_{-i_s}, \qquad (1)$$

Примеры:

$$S_{1,1}(t){=}L_{-1},\ S_{1,2}(t){=}L_{-1}^2{+}t^{-1}L_{-2},\ S_{1,3}(t){=}L_{-1}^3{+}2t^{-1}(L_{-1}L_{-2}{+}L_{-2}L_{-1}){+}4t^{-2}L_{-3}.$$

Спустя три года Бауэр, Ди Франческо, Ицыксон и Зубер [1] опубликовали новое доказательство особости векторов $S_{1,p}(t)v$. Кроме того, они предложили алгоритм для отыскания всех особых векторов. Но на практике этот алгоритм встречает серьезные вычислительные проблемы и до сих пор не понятно, каким образом написать с его помощью явную формулу для всех $S_{p,q}(t)$.

Теорема 2. *Пусть $V(h,c)$ является модулем Верма над алгеброй Вирасоро, причем*

$$c{=}c(t){=}13{+}6t{+}6t^{-1},\ h{=}h_{2,p}(t){=}{-}\frac{1}{4}(p{-}1{+}t)(t^{-1}\,(p{+}1){+}3)\,,\ t\in\mathbb{C}, t\neq 0.$$

Рассмотрим элемент универсальной обертывающей алгебры Ли $U(Vir^-)$

$$S_{2,p}(t) = \sum_{i_1+\ldots+i_s=2p\ .} f_{2,p}(t;i_1,\ldots,i_s)L_{-i_1}\ldots L_{-i_s}, \tag{2}$$

где суммирование происходит по всем неупорядоченным разбиениям числа $2p$ на положительные слагаемые, а коэффициенты $f_{2,p}(t;i_1,\ldots,i_s)$ определены формулами

$$f_{2,p}(t;i_1,\ldots,i_s){=}\frac{(2p{-}1)!^2(2t)^{s-2p}\prod\limits_{r=1}^{2p-1}(p{-}t{-}r)\prod\limits_{m=1}^{s}\left((2t{-}1)(i_m{-}1){+}2p{-}1{-}2\sum\limits_{n=1}^{m-1}i_n\right)}{\prod\limits_{k=0}^{2p-1}(2p{-}1{-}2k)\prod\limits_{l=1}^{s-1}\left((\sum\limits_{n=1}^{l}i_n)(2p{-}\sum\limits_{n=1}^{l}i_n)(p{-}t{-}\sum\limits_{n=1}^{l}i_n)\right)}. \tag{3}$$

Тогда вектор $S_{2,p}(t)v$ является особым в модуле Верма $V(h,c)$.

Примеры: $S_{2,1}(t) = L_{-1}^2{+}tL_{-2}$ и $S_{2,2}(t){=}L_{-1}^4{+}4tL_{-1}L_{-2}L_{-1}{+}\frac{(1-t^2)}{t}(L_{-1}^2L_{-2}{+}$ ${+}L_{-2}L_{-1}^2){+}\frac{(1-t^2)^2}{t^2}L_{-2}^2{+}\frac{(1+t)(4t-1)}{t}L_{-1}L_{-3}{+}\frac{(1-t)(4t+1)}{t}L_{-3}L_{-1}{+}\frac{3(1-t^2)}{t}L_{-4}.$

Список литературы

[1] M. Bauer, Ph. Di Francesco, C. Itzykson, J.-B. Zuber,: Covariant differential equations and singular vectors in Virasoro representations. Nuclear Physics, B362 (1991), 515–562.

[2] L. Benoit, Y. Saint-Aubin: Degenerate conformal field theories and explicit expressions for some null vectors. Phys. Letters, 215(B) (1988), 517–522.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00414)

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

ГОМОЛОГИИ ХЕГОРА-ФЛОЕРА И ЧИСЛА РАЗВЯЗЫВАНИЯ

ЕВГЕНИЙ ГОРСКИЙ

Какое минимальное количество перекрестков в диаграмме узла нужно изменить, чтобы узел развязался? Какое минимальное количество перекрестков между различными компонентами зацепления нужно изменить, чтобы оно распалось? Эти задачи - одни из самых базовых в теории узлов, однако их решение требует мощных средств трех- и четырехмерной топологии. Я расскажу о том, как гомологии Хегора-Флоера дают нижние оценки на числа развязывания, следуя работам П. Ожвата, З. Сабо, Б. Оуэнса и других, а также недавней работе М. Databaseородзика и докладчика.

Доклад поддержан грантом РФФИ 16-01-00409.

Университет Калифорнии, Дэвис, США и ВШЭ

ОРБИФОЛДНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ИХ ОБОБЩЕНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ РЯДЫ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ.

С.М.ГУСЕЙН-ЗАДЕ

Понятие орбифолдной эйлеровой характеристики топологического пространства с действием конечной группы прищло из физики струн. Математический смысл этого понятия обсуждался, в частности, в работах Хирцебруха-Хофера и Атьи-Сегала. В последней были преложены его версии высших порядков. Имеется ряд обобщений этих понятий (например, со значениями в некоторой модификации кольца Гротендика квази-проективных многообразий). Многие из них удовлетворяют аналогам формулы Макдональда. Классическая формула Макдональда утверждает, что для топологического пространства X имеет место равенство $1+\sum_{k=1}^{\infty}\chi(S^kX) = (1-t)^{-\chi(X)}$, где $\chi(\cdot)$ – эйлерова характеристика, определенная в терминах когомологий с компактными носителями, $S^kX = X^k/S_k$ – kая симметрическая степень пространства X. Формула типа Макдональда для инварианта – это формула, которая дает производящий ряд значений инварианта для симметрических степеней пространства (или для их аналогов) в виде ряда, не зависящего от пространства, в степени, равной значению инварианта для самого пространства. Формулы типа Макдональда могут быть сформулированы для ряда инвариантов, которые могут рассматриваться как обобщения эйлеровой характеристики. Если инвариант принимает значения в кольце, отличном от кольца целых чисел (или другого числового кольца), для придания смысла соответствующему выражению надо использовать, так называемую, степенную структуру над кольцом.

Лекция основана на работах, выполненных при поддержке гранта РФФИ-16-01-00409.

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ И ГИПОТЕЗА ВИТТЕНА.

С.К.ЛАНДО

Изучение пространств рациональных функций на комплексных кривых было начато в работах Римана в конце XIX века. Геометрия таких пространств тесно связана с геометрией пространств модулей комплексных кривых, однако в некоторых отношениях она заметно проще – благодаря тому, что каждое такое пространство разветвленно накрывает проективное пространство подходящей размерности. Значимые результаты о пространствах рациональных функций были получены Гурвицем, и пространства рациональных функций часто называют пространствами Гурвица. На рубеже XX и XXI веков эти результаты были существенно дополнены за счет построения подходящих компактификаций пространств Гурвица. В лекциях будут описаны пространства Гурвица и их компактификации, рассказано, как исследование геометрии этих пространств позволяет делать выводы о геометрии пространств модулей кривых с отмеченными точками. В частности, будет объяснено, как доказывать гипотезу Виттена о числах пересечений так называемых ?-классов на пространствах модулей кривых.

Факультет математики НИУ ВШЭ

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ЧАСТЕЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

В.М.АКУЛИН

Я начну с краткого изложения основ квантовой механики и напомню как задается физическое состояние и измеряемые квантовой системы в чистом и смешанном состояниях, а также о том, как вводится мера смешанности состояний. За этим последует рассказ про независимые и перепутанные состояния частей системы и приведены примеры простейших двух- и трех-частевых перепутанных состояний Белла и Гринбера-Хароша-Цайлингера. Я коснусь известного парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена о нелокальности квантовой механики на примере состояний Белла. Далее предстоит обсуждение связи между перепутанностью и смешанностью, введение мер перепутывания для случая систем из двух частей и объяснение сложностей возникающих при обобщении на случай многих частей. Потом последует изложение наших результатов, полученных в сотрудничестве с Катериной Мандиларой, Андреем Смилгой и Лоренцой Виолой, о том как формулируется проблема многочастевого перепутывания в рамках теории групп, и как используя картаново разложение групп можно ввести понятие логарифма вектора, и на этой основе проклассифицировать такое перепутывание. Как часто бывает в физике, для новых физических ситуаций оказывается удобным и адекватным некий непривычный математический язык, и таким языком оказываются в данном случае кольца нильпотентных полиномов, про которые я расскажу на простейшем примере. В заключительной части лекции, я намерен рассказать о последних наших результатах, полученных в сотрудничестве с Григорием Кабатянским и Катериной Мандиларой и касающихся многочастевого перепутывания в открытых квантовых системах, находящихся по причине своей открытости в смешанных состояниях. Упор будет сделан на геометрических картинках, связанных с этой проблемой и алгоритмом ее решения.

Лаборатория Амэ Коттон, Орсэ, Франция и Институт Проблем Передачи Информации,Москва.

MINIMAL TRIANGULATIONS OF PROJECTIVE PLANES

DENIS A. GORODKOV

We discuss a problem arising from the following result:

Теорема 3 (Brehm, Kühnel [1]). *Let M^d be a combinatorial manifold with n vertices. Then if $n < \lceil 3d/2 \rceil + 3$, then M is PL homeomorphic to a sphere, and if $n = 3d/2 + 3$, then either M is PL homeomorphic to a sphere, either M is a manifold "like a projective plane", i.e., manifolds with a Morse function with exactly 3 critical points (in particular, the latter manifolds exist only in dimensions $n = 2, 4, 8, 16$) (cf. [2]).*

In the smooth and topological cases, corresponding projective planes are examples of manifolds "like a projective plane". It is natural to look up for minimal triangulations in terms of number of vertices among combinatorial manifolds from Theorem 3.

In dimensions $n = 2$ and $n = 4$ these combinatorial manifolds are unique and are the minimal triangulations of the real and complex projective planes, respectively. In 1992 Brehm and Kühnel [3] constructed three PL isomorphic combinatorial manifolds corresponding to the case of $n = 8$, but they did not manage to prove the homeomorphism between these manifolds and the quaternionic projective plane. (There are still no explicit examples in the case $n = 16$.)

It follows from the work of Eells and Kuiper [2] that these manifolds are PL homeomorphic iff their Pontryagin numbers coincide. In the case of $n = 8$ it is sufficient to compute the number p_1^2, as p_2 is then computed from the classic Hirzebruch formula. In 2004 Gaifullin [4] constructed a purely combinatorial algorithm for computing the first Pontryagin class of a combinatorial manifold. Realizing this algorithm in the general case, we computed the first Pontryagin class of the three Brehm–Kühnel combinatorial manifolds. The corresponding Pontryagin numbers coincided with those of the quaternionic projective plane, thus these manifolds are PL homeomorphic to $\mathbb{H}P^2$.

Список литературы

[1] Brehm U. and Kühnel W.: Combinatorial manifolds with few vertices. Topology 26 (1987), 465–473.

[2] Eells J. and Kuiper N. H.: Manifolds which are like projective planes. Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 14 (1962), 181–222.

[3] Brehm U. and Kühnel W.: 15-vertex triangulations of 8-manifolds. Math. Ann. 294 (1992), 167–193.

[4] Gaifullin A. A.: Local formulae for combinatorial Pontryagin classes. Izv. Math. 68 (2004), no. 5, 861–910.

Steklov Mathematical Institute of RAS, Gubkina, 8, Moscow, 119991 Russia

ON CERTAIN TORIC SPACES ARISING FROM SIMPLE POLYTOPES

IVAN LIMONCHENKO

To any convex simple n-dimensional polytope P with m facets one can associate its moment-angle manifold $\mathcal{Z}_P$ – one of the main objects of study in toric topology. This manifold was introduced firstly by M.Davis and T.Januszkiewicz as a generalization of the notions of a quasitoric manifold and a projective toric manifold. V.Buchstaber and T.Panov proved that $\mathcal{Z}_P$ is a smooth $(m+n)$-dimensional closed 2-connected manifold with a compact torus T^m action, whose orbit space is homeomorphic to the polytope P itself, and cohomology algebra of $\mathcal{Z}_P$ is isomorphic to the Tor-algebra $Tor_{k[v_1,\ldots,v_m]}(k[P],k)$ of P over a polynomial algebra, when k is a field or the ring of integers. Studying Massey products in the Tor-algebras is related to a graded version of a classical J.-P.Serre problem on rationality of Poincaré series for Noetherian local rings being studied since 1960s. The topology of $\mathcal{Z}_P$ is governed by the face lattice of P and can be very complicated.

In our talk we shall introduce several equivalent definitions of $\mathcal{Z}_P$ arising in toric and symplectic geometry, their relation to smooth toric varieties, and then discuss higher Massey products in cohomology and rational formality of moment-angle manifolds $\mathcal{Z}_P$ when P is a 2-truncated cube, that is a consecutive cut of only codimension 2 faces starting with a cube. We introduce a family of n-dimensional 2-truncated cubes P, such that there is a nontrivial n-fold Massey product in cohomology of the moment-angle manifold $\mathcal{Z}_P$ for any $n \geqslant 2$. V.Buchstaber and V.Volodin proved that any flag nestohedron can be realized as a 2-truncated cube; we present our family of 2-truncated cubes as flag nestohedra for $n \geqslant 3$. Then we discuss some results and problems concerning nontrivial triple Massey products for $\mathcal{Z}_P$ when P is a graph-associahedron of M.Carr and S.Devadoss or a generalized associahedron of S.Fomin and A.Zelevinsky, based on the properties of these polytopes arising in representation theory, cluster algebras and convex geometry.

The work was supported by RFBR (grant no. 14-01-00537a).

Department of Geometry and Topology, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia

E-mail address: `ilimonchenko@gmail.com`

THE PROOF OF BLAGOJEVIC-GRUJIC-ZIVALJEVIC CONJECTURE ON SYMMETRIC PRODUCTS OF ALGEBRAIC CURVES

DMITRY V. GUGNIN

The talk is based on the author's recent arxiv preprint 1606.00453v2.

Let $M^2_{g,k}$ and $M^2_{g',k'}$ be compact Riemann surfaces with punctures ($g, g' \geq 0$ — genuses, $k, k' \geq 1$ — number of punctures). For any Hausdorff space X the quotient space $\mathrm{Sym}^n X := X^n/S_n$ is the n-th symmetric product of X, $n \geq 2$. It is well known, that $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ is a smooth quasi-projective variety. Open manifolds $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ and $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ are homotopy equivalent *iff* $2g + k = 2g' + k'$.

Blagojević-Grujić-Živaljević Conjecture (2003). *Fix any $n \geq 2$, and two pairs (g, k) and (g', k') with the condition $2g + k = 2g' + k'$. If $g \neq g'$, then open manifolds $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ and $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'}$ are not continuously homeomorphic.*

The conjecture was posed in 2003 by P. Blagojević, V. Grujić and R. Živaljević and proved by them for the case $\max(g, g') \geq \frac{n}{2}$ (this implies the case $n = 2$). As far as the author knows, up to this moment there were no results if $\max(g, g') < \frac{n}{2}$.

The aim of this talk is to present the proof of the following generalization of this conjecture.

Theorem 1. *Fix any $n \geq 2$, and two pairs (g, k) and (g', k') with the condition $2g + k = 2g' + k'$. If $g \neq g'$, then open manifolds $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k} \times \mathbb{R}^N$ and $\mathrm{Sym}^n M^2_{g',k'} \times \mathbb{R}^N$ are not continuously homeomorphic for all $N \geq 0$.*

Here is the plan of the proof of Theorem 1.

Set $s := 2g + k - 1 = 2g' + k' - 1$. If $s = 0$ or 1, then $g = g'$. So, we have $s \geq 2$. Fix a pair (g, k) with the condition $2g + k - 1 = s$. We will denote by $\mathbb{Z}_2$ the field $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Step 1. The space $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k} \sim \mathrm{Sk}^n T^s$ has torsion-free integral homology. Therefore, we have the ring isomorphism $H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2$.

Step 2. The integral cohomology ring $H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z})$ is equal to the cutted exterior algebra $\Lambda^{\leq n}_{\mathbb{Z}}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ for some $\mathbb{Z}$-basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ of $H^1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z})$. Thus, the ring $H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2)$ is equal to $\Lambda^{\leq n}_{\mathbb{Z}_2}(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_s)$ for some (any) $\mathbb{Z}_2$-basis $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_s$ of $H^1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2)$.

Step 3. The open manifold $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ is a Zariski-open subset of the smooth projective variety $\mathrm{Sym}^n M^2_g$, where M^2_g is the initial compact Riemann surface without punctures. The total Chern class of the complex manifold $\mathrm{Sym}^n M^2_g$ was computed by Macdonald in 1962. The inclusion $i_{(n)} \colon \mathrm{Sym}^n M^2_{g,k} \to \mathrm{Sym}^n M^2_g$ induce the ring homomorphism $i^*_{(n)} \colon H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_g; \mathbb{Z}) \to H^*(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z})$, and $i^*_{(n)}(c_1(\mathrm{Sym}^n M^2_g)) = c_1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k})$.
From Macdonald's calculations one can easily derive that

$$c_1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}) = -(\alpha_1 \smile \alpha_2 + \alpha_3 \smile \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2g-1} \smile \alpha_{2g})$$

for some $\mathbb{Z}$-basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ of $H^1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z})$.

Step 4. Suppose we have a complex vector bundle $\xi\colon E \to B$ with the fiber $\mathbb{C}^n$ and the base B, which is a connected ENR (compact, or non-compact and homotopy equivalent to a finite polyhedron). Then the Stiefel-Whitney classes w_k of the realization $\xi_{\mathbb{R}}\colon E_{\mathbb{R}} \to B$ can be computed from the Chern classes c_l of the initial vector bundle $\xi\colon E \to B$ as follows:

$$w_{2k+1}(\xi_{\mathbb{R}}) = 0 \ \ \forall k \geq 0; \ \ w_{2k}(\xi_{\mathbb{R}}) = \rho_2(c_k(\xi)) \ \ \forall k \geq 1.$$

Here, $\rho_2\colon H^*(B; \mathbb{Z}) \to H^*(B; \mathbb{Z}_2)$ is the reduction homomorphism.

The statement of this step is a well known fact.

Step 5. Combining two previous steps, we have that

$$w_2(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}) = \overline{\alpha}_1 \smile \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 \smile \overline{\alpha}_4 + \ldots + \overline{\alpha}_{2g-1} \smile \overline{\alpha}_{2g}$$

for some $\mathbb{Z}_2$-basis $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_s$ of $H^1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2)$. As one has

$$H^2(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda^2(H^1(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}; \mathbb{Z}_2)),$$

we get

$$w_2(\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}) = \overline{\alpha}_1 \wedge \overline{\alpha}_2 + \overline{\alpha}_3 \wedge \overline{\alpha}_4 + \ldots + \overline{\alpha}_{2g-1} \wedge \overline{\alpha}_{2g}.$$

Step 6. (Topological invariance of Stiefel-Whitney classes for open smooth manifolds)

Suppose we have closed smooth connected manifolds M^n and N^n. By celebrated Wu formula, if $f\colon M^n \to N^n$ is a homotopy equivalence, then $f^*(w_k(N^n)) = w_k(M^n)$ for all $k \geq 1$. It is the famous *Homotopy invariance* of Stiefel-Whitney classes for closed manifolds.

But, the trivial example $M^2 = S^1 \times \mathbb{R}^1$ and $N^2 =$ (open Möbius strip) shows us that even w_1 is not a *homotopy* invariant for open manifolds.

Now we want to pose the following

Conjecture 1. *Suppose we have a purely continuous homeomorphism $f\colon M^n \to N^n$ of two open connected smooth manifolds, which are homotopy equivalent to a finite polyhedron. Then $f^*(w_k(N^n)) = w_k(M^n)$ for all $1 \leq k \leq n$.*

Remark. This conjecture is trivially true for w_1 (a loop preserve or change the orientation), and for $w_n = 0$.

We will present the proof of this conjecture for w_2 with the following additional condition: the abelian groups $H_1(M^n; \mathbb{Z})$ and $H_2(M^n; \mathbb{Z})$ are torsion-free and $H_2(M^n; \mathbb{Z})$ is generated by the images of continuous mappings of torus T^2 to M^n.

Step 7. Combining the steps 5 and 6, we get that the topological type of the open manifold $\mathrm{Sym}^n M^2_{g,k}$ determines the genus g. Moreover, as Stiefel-Whitney classes are invariant under taking the direct product with the euclidian spaces $\mathbb{R}^N, N \geq 0$, we conclude the proof of Theorem 1.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 14-11-00414.

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail address: dmitry-gugnin@yandex.ru

A COMBINATORIAL MODEL OF THE LIPSHITZ METRIC FOR SURFACES WITH PUNCTURE

VLADIMIR SHASTIN

In the work [1] Ivan Dynnikov described a polynomial algorithm for the solution of the word problem in mapping class groups of punctured surfaces, where as the size of the algorithm's input he uses a modified version of the word length function of the mapping class group. Namely for a finite generating set $\mathcal{A}$ of the mapping class group of a punctured surface S Dynnikov defined *the zipped word length function* $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$ as follows:

$$\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}(\varphi) = \min_{\substack{\varphi = a_1^{k_1} \ldots a_m^{k_m} \\ a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A} \\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}}} \sum_{i=1}^{m} \log_2(|k_i| + 1),$$

where $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$.

For special generating sets $\mathcal{A}$ he proved that the word problem is efficiently solvable with respect to $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$:

Theorem (Dynnikov). *Let S be a compact surface, $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_n) \in S$ a non-empty collection of pairwise distinct points such that the mapping class group $G = MCG(S \setminus \mathcal{P})$ is infinite. Let $\mathcal{A}$ be a finite generating set for G such that*

1. *every element in $\mathcal{A}$ is a fractional power of a Dehn twist;*
2. *every Dehn twist from G is conjugate to a fractional power of an element from $\mathcal{A}$*

Then the word problem in G is solvable in polynomial time with respect to $zwl_{\mathcal{A}}$.

The function $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$ determines the right-invariant metric $\rho_{\mathcal{A}}$ on $\mathrm{MCG}(S)$ as follows:

$$\rho_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) = \mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}(\psi\varphi^{-1}),$$

where $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$.

It turns out that this metric is closely related to the Lipshitz metric on the Teichmüller space. In this talk we describe this relation and give the proof of the following theorem:

Theorem. *Let S be an oriented surface with non-empty set of punctures, ϵ a positive constant, σ a hyperbolic structure on S, lying in the ϵ-thick part of the Teichmüller space $\mathcal{T}_\epsilon(S)$, and $\mathcal{A}$ a finite generating set of $MCG(S)$ with the following properties:*

1. *every element in $\mathcal{A}$ is a fractional power of a Dehn twist;*
2. *every Dehn twist from G is conjugate to a fractional power of an element from $\mathcal{A}$*

Let also $i_\sigma \colon MCG(S) \to \mathcal{T}_\epsilon(S)$ be the map that sends $\varphi \in MCG(S)$ to the image of σ under φ. Then i_σ is a quasi-isometry from $MCG(S)$ equipped with the metric $\rho_{\mathcal{A}}$ to the thick part of $\mathcal{T}(S)$ equipped with the Lipshitz metric.

Список литературы

[1] I. Dynnikov. Counting intersections of normal curves, unpublished preprint

[2] В. А. Шастин, "Комбинаторная модель метрики Липшица для поверхностей с проколами", Сиб. электрон. матем. изв., 12 (2015), стр. 910–929,

The author is partially supported by Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University (Russian Federation government grant 14.Z50.31.0020).

Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Brat'ev Kashirinykh street 129, Chelyabinsk 454001, Russia.

E-mail address: vashast@gmail.com

TWISTED SIMPLICIAL GROUPS AND TWISTED HOMOLOGY OF CATEGORIES

V.V.VERSHININ

Let A be either a simplicial complex K or a small category C with $V(A)$ as its set of vertices or objects. We define a twisted structure on A with coefficients in a simplicial group G as a function δ from vertices to endomorphisms of G with certain commutativity condition.

We give a canonical construction of twisted simplicial group as well as twisted homology for A with a given twisted structure. Also we determine the homotopy type of of this simplicial group as the loop space over certain twisted smash product.

The talk is based on the joint work with Jingyan Li and Jie Wu, arXiv:1509.06424 .

RANDOM METRICS ON HIERARCHICAL GRAPHS

VICTOR KLEPTSYN

Take a «diamond»-shaped graph. Replace each of its four edges by a copy of a «diamond» graph. Then each of sixteen edges again by a diamond, etc. The resulting object is called a hierarchical [diamond] graph. Moreover, a graph can be turned into a metric space by choosing lengths of its edges; if we agree to divide lengths by two on each step of this procedure, we have a [Gromov–Hausdorff] convergence of metric spaces, thus turning the limit object into a metric space.

Now, instead of multiplying the lengths by deterministic constant (1/2), let us multiply them by random constants, chosen independently and identically distributed for all the replacements. Does the sequence of (random) metric graphs that we have defined converge (perhaps, after a suitable normalization)? If yes, what can be said about the limiting metric space?

This is a «baby version» of a more (and very) complicated problem (originating, in particular, from physics) of giving a rigorous sense to a likewise–defined two–dimensional object. However, even this baby version turned out to be sufficiently difficult. I will speak on a joint work of Mikhail Khristoforov, Michele Triestino and myself, devoted to its study (and on some corollaries and nearby topics).

University de Rennes, France

CLUSTER STRUCTURE OF DIMER CONFIGURATIONS

OLGA KRAVCHENKO

Cluster algebra theory ([1]) makes unexpected connections among different areas of mathematics: Ptolemy theorem, cross-ratio, Grassmanninans, dilogarithm, certain discrete dynamical systems and many others.

After a brief introduction to cluster algebras we will consider bipartite graphs and dimer partition functions on them.

It turns out thatthere are ways to change the graph while preserving the partition function, such changes (moves) have a cluster interpretation ([2, 3]).

We will study a certain sequence of moves, interpreted in particular as the $Y - \Delta$ move in electric chains, making a connection to the Stasheff's associahedron ([4, 5]).

Список литературы

[1] Fomin, S.; Zelevinsky, A. Cluster algebras. I. Foundations. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), no. 2, 497—529.

[2] Fock V.V., Marshakov A. Loop groups, Clusters, Dimers and Integrable systems http://lanl.arxiv.org/abs/1401.1606.

[3] Goncharov A. B., Kenyon R. Dimers and cluster integrable systems. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 46 (2013), no. 5, 747—813.

[4] Loday, Jean-Louis: Realization of the Stasheff polytope. Archiv der Mathematik 83 (3): 267—278.

[5] Stasheff J.D.: Homotopy associativity of H-spaces. I, II. Transactions of the American Mathematical Society 108: 293—312.

Institut Camille Jordan, Universite Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France