11:15-12:05

Доклад профессора **Шабата А.Б. «Об условиях коммутирования дифференциальных операторов в двумерии».**

12:05-12:30.

Mikhailov A.V. (Лидс, Англия) **«Recursion operators and conservation laws for partial difference equations.** *Имеется видеозапись доклада.*

Recursion operators and conservation laws for partial difference equations

Mikhailov A. V. (University of Leeds, UK)

We adapt a concept of recursion operator to difference equations and show that it generates an infinite sequence of symmetries and canonical conservation laws for a difference equation [**1**]. Similar to the case of partial differential equations these canonical densities can serve as integrability conditions for difference equations. We have found two recursion operators for the Viallet equation satisfying to the elliptic curve equation associated with the Viallet equation.

We discuss the concept of cosymmetries and co–recursion operators for difference equations and present a co–recursion operator for the Viallet equation [**2**]. We also discover a new type of factorisation for the recursion operators of difference equations. This recursion operators and its factorisation into Hamiltonian and symplectic operators can be applied for Yamilov's discretisation of the Krichever–Novikov equation.

For Lax integrable equations we show that the sequence of conservation laws can be obtained recursively using formal diagonalisation of the Darboux transformations.

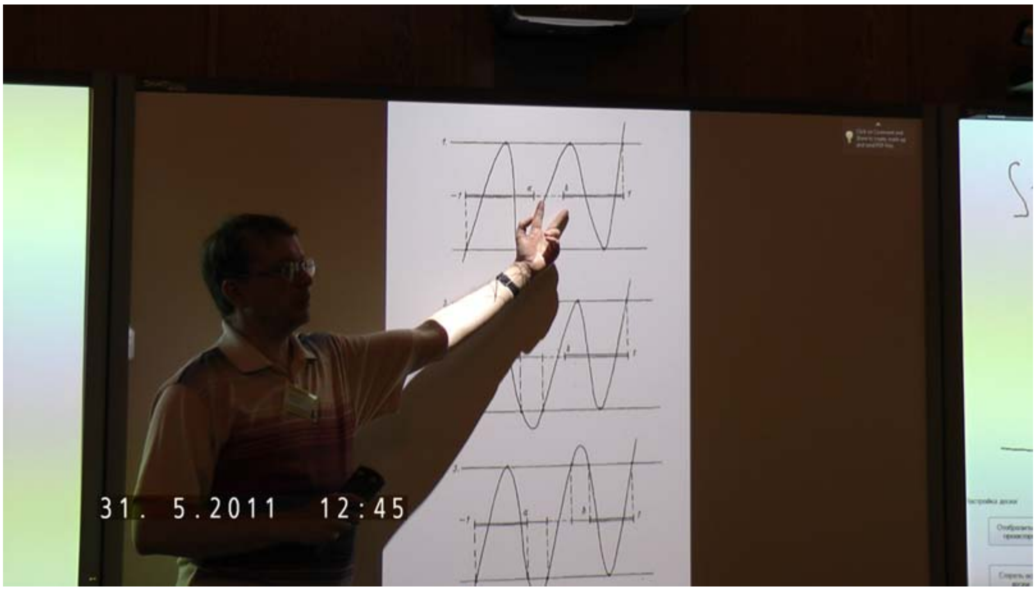
References

[1] A. V. Mikhailov, J. P. Wang, and P. Xenitidis. Recursion operators, conservation laws and integrability conditions for difference equations. *Theoretical and Mathematical Physics*, 167 (2011), no. 1, 421–443. arXiv:1004.5346.

[2] A. V. Mikhailov, J. P. Wang, and P. Xenitidis. Cosymmetries and Nijenhuis recursion operators for difference equations, 2010. arXiv:1009.2403v1. Submitted to *Nonlinearity*.

12:30-12:55.

Царев С.П. «Классические и современные результаты интегрирования tau-поверхностей и уравнения Ламе». *Имеется видеозапись доклада.*



1 июня 2011 г.

9:10-10:00

Доклад академика РАН **С.П.Новикова «Суперсимметричный оператор Паули и алгебраическая геометрия».** *Имеется видеозапись доклада.*

10:10-11:00.

Paolo Santini (Рим, Италия) "Commuting vector fields, integrable multidimensional PDEs of hydrodynamic type and wave breaking in multidimensions". *Имеется видеозапись доклада.*

11:15-11:40.

Manakov S.V. "Exact implicit solutions of integrable PDEs associated with commuting vectro fields". *Имеется видеозапись.*

11:40-12:05.

Соколов В.В. «Интегрируемые системы ОДУ с матричными неизвестными». *Имеется видеозапись доклада.*

12:05-12:30.

Мальцев А.Я. «Динамические солитоны в решетках холодных атомов». *Имеется видеозапись доклада.*

12:30-12:55.

Bialy M. “Semi-Hamiltonian systems which are not in evolution form”. *Имеется видеозапись доклада.*

О полиномиальных интегралах геодезического потока на двумерном торе

Бялый М. Л. (Университет Тель-Авива, Израиль)
Миронов А. Е. (Институт математики им. С. Л. Соболева, Россия)

Нами показано, что существование полиномиального интеграла по импульсам геодезического потока на двумерном торе эквивалентно существованию периодических решений системы квазилинейных уравнений. Эта система является полугамильтоновой. Это означает, что в гиперболической области она может быть записана в виде инвариантов Римана и в виде законов сохранения. Таким образом в гиперболической области к этой системе может быть применен обобщенный метод годографа С. П. Царева.

В случае интегралов третьей и четвертой степени по импульсам показано, что в эллиптических областях эти интегралы сводятся и интегралам первой или второй степени.

Список литературы

[1] *Bialy M., Mironov A.* Rich quasi-linear system for integrable geodesic flows on 2-torus// Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A. 2011. V. 29. № 1. P. 81–90.
[2] *Bialy M., Mironov A.* Cubic and Quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via system of Hydrodynamic type // arxiv: 1101.3449.

14:50-15:15.
Сулейманов Б.И. «Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве посредством L,A–пар и старая квантовая теория».

Квантование некоторых автономных редукций уравнений Пенлеве посредством их L, A-пар и старая квантовая теория

Сулейманов Б. И. (Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, Россия)

Строятся дискретные серии ($n = 1, 2, ...\infty$) явных решений уравнений Шредингера:

$$i\hbar\Psi_t = (-\hbar^2 \frac{\Psi_{xx}}{2}) + \frac{\omega^2 x^2}{2}\Psi, \tag{1}$$

$$i\hbar\Psi_t = -\hbar^2 \frac{\Psi_{xx}}{2} + a(\exp(-2x) - 2\exp(-x))\Psi, \quad (a — \text{const}) \tag{2}$$

$$i\hbar\Psi_t = -\hbar^2(x-1)^2(x\Psi_{xx} + \Psi_x) + (cx)\Psi + \quad (c — \text{const}) \tag{3}$$

определяемых гамильтонианами

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \tag{4}$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + a(\exp(-2q) - 2\exp(-q)), \tag{5}$$

$$H(q,p) = q(q-1)^2 p^2 + cq, \tag{6}$$

гамильтоновых систем

$$q_t = H_p(p,q), \quad p_t = -H_q(p,q). \tag{7}$$

Данные решения уравнений Шредингера (1)–(3), являющиеся ограниченными при всех значениях x, удовлетворяют также уравнениям вида

$$\Psi_t = B(\hbar, t, x, q(t), p(t))\Psi_x + C(\hbar, t, x, q(t), p(t))\Psi, \tag{8}$$

коэффициенты которых зависят от дискретных серий решений гамильтоновых систем (4)–(7), выделяемых старым вариантом правила Бора–Зоммерфельда.

Исключение из систем (4)–(7) импульсов p дает обыкновенное дифференциальное уравнение на q, точечно эквивалентное автономной редукции одного из уравнений Пенлеве. Для гамильтониана (4) это есть редукция уравнения

$$\lambda_{\tau\tau} = c_4(2\lambda^3 + \tau\lambda) + c_3(6\lambda^2 + \tau) + c_2\lambda + c_1) \qquad (c_j — \text{const}),$$

для гамильтониана (5) с потенциалом Морса — редукция третьего уравнения Пенлеве для гамильтониана (6) (выражающегося через гамильтониан энергии с модифицированным экспоненциальным потенциалом Пешля–Теллера) — редукция пятого уравнения Пенлеве. Совместность уравнений Шредингера (1)–(3) с соответствующими уравнениями (8) следует из совместности L, A-пар для уравнений Пенлеве, выписанными в классической статье Р. Гарнье [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-91222 и ФЦП, контракт 02.740.11.0612.

Список литературы

[1] *Garnier R.* Sur des equations differentiellles du troisieme ordre dont l'integrable est uniforme et sur une classe d'equations nouvelles d'ordre superieur l'integrale generale a ses points critiques fixess // Annales scientitificues de l'Ecole Normale Superieure. 1912. V. 29. P. 1–126.

15:15-15:40.

Zenchuk A.I. “Second order multidimensional partially integrable nonlinear systems and their application in hydrodynamics”

15:40-16:05.
Сакиева А.У. «Дискретизация гиперболических уравнений Лиувиллевского типа»

Дискретизация гиперболических уравнений Лиувиллевского типа

Сакиева А. У. (Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Россия)

Уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

называется уравнением типа Лиувилля, если оно имеет интегралы по обоим характеристическим направлениям: т. е. имеет x-интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy}, \ldots)$ и y-интеграл $V(x, y, u, u_x, u_{xx}, \ldots)$.

Аналогично, дифференциально-разностное уравнение вида

$$\frac{d}{dx}u(n+1, x) = f(x, u(n, x), u(n+1, x), \frac{d}{dx}u(n, x)) \tag{2}$$

с неизвестной функцией $u(n, x)$, зависящей от непрерывной переменной x и дискретной переменной n, является полудискретным уравнением Лиувиллевского типа, если существуют функции F и I, зависящие от конечного числа аргументов x, $\{u(n+k, x)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\left\{\frac{d^k}{dx^k}u(n, x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, такие, что $D_x F = 0$ и $DI = I$, где D_x — оператор полного дифференцирования по x, а D — оператор сдвига: $Dp(n) = p(n+1)$ (см. **[1]**, **[2]**).

Уравнение (2) называется дискретным аналогом уравнения (1), если в пределе при сгущении сетки по $n = y/\epsilon$ уравнение (2) переходит в уравнение(1). В докладе предполагается обсуждение эффективного алгоритма отыскания дискретных аналогов Лиувиллевского типа для уравнений вида (1), которые сами являются уравнениями Лиувиллевского типа. Суть алгоритма состоит в том, что предполагается, что уравнение (1) и его дискретный аналог имеют общий интеграл. Для интегрируемых по Дарбу уравнений (1) построены их полудискретные аналоги. Для этого мы берем для каждого интегрируемого уравнения (1) его интеграл $W(x, y, u, u_y, u_{yy})$ или $V(x, y, u, u_x, u_{xx})$, и по этому интегралу строим полудискретное уравнение $u_{1x} = f(x, u, u_1, u_x)$ такое, что для этого искомого уравнения функция W или V является n-интегралом (см. **[3]**).

Пример 1. Для уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$ y-интегралом является функция $V = u_{xx} - 0.5{u_x}^2$. Вычисления показывают, что полудискретный аналог этого уравнения есть уравнение $u_{1x} = u_x + Ce^{0.5(u+u_1)}$, $C = \text{const}$, для которого эта же функция V является n-интегралом.

Список литературы

[1] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* On Darboux Integrable Semi-Discrete Chains // J. Phys. A: Math. Theor. 43 (2010) 434017 (14 pp).

[2] *Адлер В. Э., Старцев С. Я.* О дискретных аналогах уравнения Лиувилля // ТМФ. 121:2. 1999. С. 271–289.

[3] *Habibullin I. T., Zheltukhina N. A., Sakieva A. U.* Discretization of hyperbolic type Darboux integrable equations preserving integrability // arXiv:1102.1236v1 [nlin.SI] 7 feb 2011.

16:05-17:25.
Базайкин А.В.
«Параллельные Spin(7)–структуры на некомпактных римановых пространствах».

17:25-17:50.
Кудрявцева Е.А.
“On the topology of the spaces of Morse functions on surfaces”

17:50-18:15
Талалаев Д.В.
«Обобщенная система Тоды»

2 июня 2011 г.

9:10-10:00
Zakharov V.E.
“Spaces of diagonal curvature and n-orthogonal coordinate system”

11:15-12:30
И.М.Кричевер (Колумбийский университет, США)

12:05-12:30.
Christian Klein (Dijon, France)
“Numerical Study of the Kadomtsev-Petviashvili Equation”
Имеется видеозапись доклада.

12:30-12:55
Доклад **Владимира Матвеева** (Дижон, Франция) **"Multiple rogue-waves solutions and extreme rogue wave solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation”.** *Имеется видеозапись.*

3 июня 2011

14:50-15:15
Мохов О.И.
«Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 4, отвечающие эллиптической кривой: размерность системы уравнений Кричевера-Новикова деформации параметров Тюрина»

15:15-15:40
Mineev Mark
"Laplacian Growth as a Paradigm for Integrable Interface Dynamics".

15:40-16:05
Гриневич П.Г.
«Periodic trajectories of the billiard on ellipsoids and isoperiodic deformations»

16:05-16:40
Бунькова Е.А.
«Формальная группа Кричевера и деформированная функция Бейкера-Ахиезера»

Во время докладов конференции.

17:00-17:25
Шейнман О.К.
«О связи между лаксовыми интегрируемыми системами и уравнением Книжника-Замолодчикова»

17:25-17:50
Пенской А.В.
«Extremal spectral properties of Lawson tau-functions and the Lame equation».

Extremal spectral properties of Lawson τ-surfaces and the Lamé equation

Penskoi A. V. (Moscow State University, Independent University of Moscow, Bauman Moscow State Technical University, Russia)

Let M be a closed surface and g be a Riemannian metric on M. Let us consider the associated Laplace–Beltrami operator $\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$ and its eigenvalues

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \lambda_3(M,g) \leqslant \ldots$$

It turns out that the question about the supremum of the functional $\Lambda_i(M,g) = \lambda_i(M,g)\mathrm{Area}(M,g)$ over the space of Riemannian metrics g on a fixed surface M is very difficult and only few results are known. The functional $\Lambda_i(M,g)$ depends continuously on the metric g, but this functional is not differentiable. However, it was shown by Berger in the paper [**1**] that for analytic deformations g_t the left and right derivatives of $\Lambda_i(M,g_t)$ with respect to t exist.

Definition 1 (Nadirashvili [**2**], El Soufi and Ilias [**3**]). A Riemannian metric g on a closed surface M is called extremal for the functional $\Lambda_i(M,g)$ if for any analytic deformation g_t such that $g_0 = g$ the following inequality holds,

$$\frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0+} \leqslant 0 \leqslant \frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0-}.$$

The list of surfaces M and values of index i such that the maximal or at least extremal metrics for the functional $\Lambda_i(M,g)$ are known is quite short (see the paper [**4**] for detailed references): $\Lambda_1(\mathbb{S}^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{R}P^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{T}^2,g)$, $\Lambda_1(\mathbb{K},g)$, $\Lambda_2(\mathbb{S}^2,g)$ and $\Lambda_i(\mathbb{T}^2,g)$, $\Lambda_i(\mathbb{K},g)$ for some particular values of i.

Definition 2 (Lawson [**5**]). A Lawson tau-surface $\tau_{m,k} \subset \mathbb{S}^3$ is defined by the doubly-periodic immersion $\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ given by the following explicit formula,

$$\Psi_{m,k}(x,y) = (\cos mx\cos y,\ \sin mx\cos y,\ \cos kx\sin y,\ \sin kx\sin y).$$

Lawson proved that for each unordered pair of positive integers (m,k) with $(m,k) = 1$ the surface $\tau_{m,k}$ is a distinct compact minimal surface in $\mathbb{S}^3$. Let us impose the condition $(m,k) = 1$. If both integers m and k are odd then $\tau_{m,k}$ is a torus. If one of integers m and k is even then $\tau_{m,k}$ is a Klein bottle. The torus $\tau_{1,1}$ is the Clifford torus.

Our main result is the following theorem from the paper [**4**]. The proof is based on the theory of periodic Sturm–Liouville problems and the theory of the Lamé equation.

Theorem 1. *Let $\tau_{m,k}$ be a Lawson torus. Then the induced metric on $\tau_{m,k}$ is an extremal metric for the functional $\Lambda_j(\mathbb{T}^2,g)$, where $j = 2\left(\left[\sqrt{m^2+k^2}\right] + m + k\right) - 1$. Let $\tau_{m,k}$ be a Lawson Klein bottle. Then the induced metric on $\tau_{m,k}$ is an extremal metric for the functional $\Lambda_j(\mathbb{K},g)$, where $j = 2\left[\frac{\sqrt{m^2+k^2}}{2}\right] + m + k - 1$. The corresponding values of $\Lambda_j(\mathbb{T}^2,g)$, $\Lambda_j(\mathbb{K},g)$ are given in the paper* [**4**].

References

[1] Berger M., *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes,* Compositio Math. 26 (1973), 129–149.

[2] Nadirashvili N., *Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces,* Geom. Funct. Anal. 6 (1996), no. 5, 877–897.

[3] El Soufi A., Ilias S., *Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions.* Pacific J. Math. 195 (2000), no. 1, 91–99.

[4] Penskoi A. V., *Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation,* submitted to Moscow Math. J., preprint arXiv:1009.0285.

[5] Lawson H. B., *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. 92 (1970), 335–374.

17:50-18:15
Миронов А.Е.
«О полиномиальных интегралах геодезического потока на двумерном торе»

УЧАСТНИК КОНФЕРЕНЦИИ
И.Г. ПЕТРОВСКОГО
2011
INTERNATIONAL CONFERENCE
«Differential Equations and Related Topics»,
dedicated to
IVAN G. PETROVSKII
NOTEBOOK
БЛОКНОТ
2011
INTERNATIONAL CONFERENCE
«Differential Equations and Related Topics»,
dedicated to
IVAN G. PETROVSKII
PROGRAM
BOOK of ABSTRACTS
СБОРНИК ТЕЗИСОВ
Moscow, May 30 - June 4
2011