

КОММУТИРУЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

ВАРДАН ОГАНЕСЯН

Если два дифференциальных оператора

$$L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x) \partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^m v_i(x) \partial_x^i$$

коммутируют, то существует полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$ (см. [1]). Кривая Γ , определенная соотношением $R(z, w) = 0$, называется *спектральной кривой*. Если

$$L_n \psi = z \psi, \quad L_m \psi = w \psi,$$

то $(z, w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z, w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Размерность пространства общих собственных функций двух коммутирующих дифференциальных операторов называется *рангом*. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n . Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через тэта-функцию Римана [2]. Случай ранга больше 1 значительно сложнее. Первые примеры коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2 со спектральной кривой рода $g = 1$ были построены Диксмье [3] для невырожденной эллиптической кривой. Общая классификация коммутирующих операторов ранга больше единицы была получена Кричевером [4]. Общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой была получена Кричевером и Новиковым [5]. Общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой был найден Моховым [6], [7]. Миронов в [8] нашел новые методы построения коммутирующих дифференциальных операторов. С помощью этих методов были явно найдены первые примеры коммутирующих операторов ранга 2 и произвольного рода.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x).$$

Предположим, что $u(x)$ имеет полюса в точках $a_1, a_2, \dots$. И в окрестности a_i

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k} + \frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}} + \dots + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i) + O((x-a_i)^2).$$

В работе [9] получены следующие результаты

Теорема 1. Если $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором M порядка $4g + 2$ и M, L_4 являются операторами ранга 2, то $u(x)$ может иметь полюс только порядка 4, $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i + 1)(4n_i + 3)(4n_i + 4)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, где

$k = 0, \dots, n_i, l = 1, 2, 3$. Также $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $r = n_i + 1, \dots, g$. Функция $u(x)$ не может иметь изолированного полюса в бесконечности.

Следствие. Допустим, что $u(x)$ эллиптическая, периодическая или рациональная функция и $u(x)$ не имеет изолированного полюса в бесконечности. Допустим, что a_1 – единственный полюс в фундаментальном параллелограмме, в периодической ленте или на комплексной плоскости. Оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g + 2$ и M, L_4 являются операторами ранга 2 тогда и только тогда, когда $\varphi_{1,-4} = g(4g + 1)(4g + 3)(4g + 4)$, $\varphi_{1,4k-l} = 0$, где $k = 0, \dots, g, l = 1, 2, 3$.

Следствие. Пусть $\wp(x)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса удовлетворяющая уравнению $(\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$. Оператор

$$L_4 = \partial_x^4 + n(4n + 1)(4n + 3)(4n + 4)\wp^2(x),$$

где $n \in \mathbb{N}$, коммутирует с оператором порядка $4n + 2$ тогда и только тогда, когда $\wp(x)$ является решением уравнения $(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 + g_2\wp(x)$. Вычисления показывают, что при $n < 8$ спектральная кривая невырождена для почти всех g_2 .

Теорема 2. Если L_4 коммутирует с дифференциальным оператором M порядка $4g + 2$, M и L_4 являются операторами ранга 2 и $u(x)$ имеет полюс в точке a_i , то решения уравнения $\psi^{(4)}(x) + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x)$ имеют особенности в a_i вида $x^{\sigma_{i,r}}g(x)$, где $r = 1, 2, 3, 4$ и $g(x)$ голоморфна в a_i ,

$$\sigma_{i,1} = \frac{1}{2}(1 - 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$$

$$\sigma_{i,2} = \frac{1}{2}(1 - 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$$

$$\sigma_{i,3} = \frac{1}{2}(5 + 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2})$$

$$\sigma_{i,4} = \frac{1}{2}(5 + 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2}).$$

Это означают, что собственные функции всегда имеют точки ветвления. Следовательно, L_4 не коммутирует с дифференциальным оператором нечетного порядка.

Список литературы

- [1] J.L. Burchnall, I.W. Chaundy, Proc. London Math. Soc. (2), **21** (1923), 420–440.
- [2] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, Функц. анализ и его приложения, 11:1 (1977), 15–31
- [3] Jacques Dixmier, “Sur les algebres de Weyl”, Bulletin de la Societe Mathematique de France 96 (1968): 209–242.
- [4] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, Функц. анализ и его прил., 12:3 (1978), 20–31

- [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, УМН, 35:6(216) (1980), 47–68
- [6] О. И. Мохов, “Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы ранга 3, отвечающие эллиптической кривой”, УМН, 37:4(226) (1982), 169–170
- [7] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 53:6 (1989), 1291–1315
- [8] A.E. Mironov. Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra. Invent. math. (2014) 197:417-431
- [9] V. S. Oganessian, “Explicit characterization of some commuting differential operators of rank 2”, International Mathematics Research Notices, (2016) doi: 10.1093/imrn/rnw085.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА, ЛЕНИНСКИЕ ГОРЫ, 1, МОСКВА, 119991 РОССИЯ